# WTNP106 - Chauffage d'un milieu poreux désaturé avec air dissous

**Résumé :**

On chauffe un milieu poreux dont les pores sont remplis d'un mélange d'eau (liquide et vapeur) et d'air (sec et dissous dans l'eau). La saturation initiale en liquide est de 50%, le chargement est un flux thermique uniforme sur les bords du domaine. La modélisation faite par un seul élément correspond à la modélisation d'un problème homogène en espace.

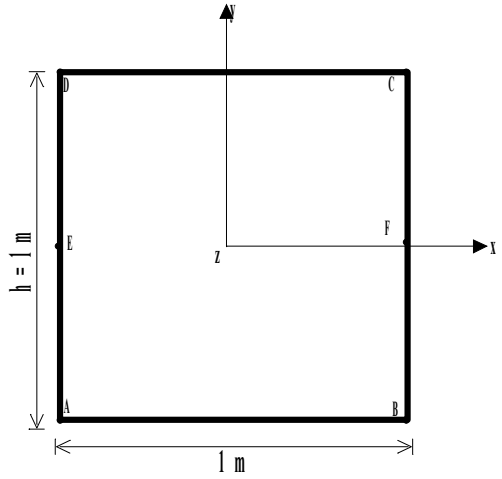
La solution de référence est une solution analytique approchée.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Problème de référence

## 1.1 Géométrie




Coordonnées des points ( $m$ ) :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | -0,5 | -0,5 | $C$ | 0,5 | 0,5 |
| $B$ | 0,5 | -0,5 | $D$ | -0,5 | 0,5 |

## 1.2 Propriétés du matériau

On ne donne ici que les propriétés dont la solution dépend, sachant que le fichier de commandes contient d'autres données de matériau (modules d'élasticité, conductivité thermique …) qui finalement ne jouent aucun rôle dans la solution du problème traité.

| | | |
|---|---|---|
| Eau liquide | Masse volumique ( $kg.m^{-3}$ ) | $10^3$ |
| | Chaleur à pression constante ( $J.K^{-1}$ ) | 4180 |
| | coefficient de dilatation thermique du liquide ( $K^{-1}$ ) | 0. |
| | Viscosité dynamique de l'eau liquide ( $Pa.s$ ) | 0.001 |
| | Perméabilité relative à l'eau | $kr_w(S)=1$ |
| Vapeur | Chaleur massique ( $J.K^{-1}$ ) | 1900 |
| | Enthalpie initiale (chaleur latente de vaporisation) $J/Kg$ | 2,5E6. |
| | Masse molaire( $kg.mol^{-1}$ ) | 0,018 |
| Gaz | Chaleur massique ( $J.K^{-1}$ ) | 1900 |
| | Masse molaire ( $kg.mol^{-1}$ ) | 0,018 |
| | Perméabilité relative au gaz | $kr_{gz}(S)=1$ |
| | | $1,8^{E}$-5 |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

| | | |
|---|---|---|
| | Viscosité du gaz ( $kg.m^{-1.s^{-1}}$ ) | |
| Air dissous | Chaleur massique ( $J.K^{-1}$ ) | 1900 |
| | Constante de Henry ( $Pa.m^{3.}mol^{-1}$ ) | 50000 |
| Squelette | Capacité calorifique à contrainte constante ( $J.K^{-1}$ ) | 1050 |
| Etat initial | Porosité | 0,3 |
| | Température ( $K$ ) | 300 |
| | Pression de gaz ( $Pa$ ) | 1E5 |
| | Pression de vapeur ( $Pa$ ) | 3700 |
| | Saturation initiale en liquide ( $Pa$ ) | 0,5 |
| Constantes | Constante des gaz parfaits | 8,315 |
| Coefficients homogénéisés | Masse volumique homogénéisée ( $kg.m^{-3}$) | 2200 |
| | Isotherme de sorption | $S(P_c)=0.5-10^{-12}(P_c-P_{vp}^0-P_c^0)$ Avec $P_{vp}^0=3700$ $P_c^0=0$ |

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

Sur tous les bords :

Flux thermique $\mathbf{q}_{ext}.\mathbf{n}=10^6$

Flux hydraulique nul



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 2 Solution de référence

## 2.1 Méthode de calcul

### 2.1.1 Calcul de la pression de vapeur à partir de la température

Nous supposons la courbe de saturation linéaire. Elle s'écrit donc :

$$S = S_0 + S' \Delta P_c \qquad \text{éq 2.1.1-1}$$

L'équation [éq 2.2.3.3-2] du document de référence [R7.01.11] donne alors :

$$\begin{aligned}
\Delta m_w &= \rho_w \phi S' \Delta P_c \\
\Delta m_{vp} &= (\rho_{vp} - \rho_{vp}^0)\phi^0(1 - S_0) - S' \rho_{vp}^0 \phi^0 \Delta P_c \\
\Delta m_{ad} &= (\rho_{ad} - \rho_{ad}^0)\phi^0 S_0 + S' \rho_{ad}^0 \phi^0 \Delta P \\
\Delta m_{as} &= (\rho_{as} - \rho_{as}^0)\phi^0(1 - S_0) - S' \rho_{as}^0 \phi^0 \Delta P_c
\end{aligned} \qquad \text{éq 2.1.1-2}$$

On écrit que la masse totale d'eau et la masse totale d'air sont conservée (car il n'y a pas de flux d'eau ni de gaz au bord) et on obtient :

$$\begin{aligned}
&\Delta m_w + \Delta m_{vp} = 0 \quad \Rightarrow \\
&(\rho_w - \rho_{vp}) S' \Delta P_c + (\rho_{vp} - \rho_{vp}^0)(1 - S_0) = 0 \qquad \text{éq 2.1.1-3} \\
&\Delta m_{ad} + \Delta m_{as} = 0 \quad \Rightarrow \\
&(\rho_{ad} - \rho_{as}) S' \Delta P_c + (\rho_{as} - \rho_{as}^0)(1 - S_0) + (\rho_{ad} - \rho_{ad}^0) S_0 = 0 \qquad \text{éq 2.1.1-4}
\end{aligned}$$

[R7.01.11] [éq 4.1.4-1] donne par ailleurs :

$$\ln\left(\frac{p_{vp}}{p_{vp}^0}\right) = \frac{M_{vp}^{ol}}{\rho_w^0}\left(\frac{1}{RT} - \frac{1}{K_H}\right)(p_{gz} - p_{gz}^0) + \frac{M_{vp}^{ol}}{\rho_w^0 K_H}(p_{vp} - p_{vp}^0) - \frac{M_{vp}^{ol}}{\rho_w^0 R T^+}(p_c - p_c^0) + \frac{M_{vp}^{ol} R}{\rho_w^0 K_H}(p_{vp} - p_{gz}) \ln\left(\frac{T}{T^0}\right) + \frac{M_{vp}^{ol}}{R}\int_{T^0}^{T} (h_{vp}^m - h_w^m)\frac{dT}{T^2} \qquad \text{éq 2.1.1-5}$$

Le couplage des équations [éq 2.1.1-3], [éq 2.1.1-4] et [éq 2.1.1-5], auquel il faut ajouter l'équation des gaz parfaits pour la vapeur, l'air sec et l'air dissous ainsi que la loi de henry est un système fortement non linéaire que nous résoudrons en petites perturbations, ce qui permet de le linéariser.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Tous calculs faits, on obtient :

$$\Delta P_{vp}\left[\left(\rho_w - \rho_{vp}^0\right)S\left(+\frac{(1-S_0)M_{vp}^{ol}}{RT^0}\right) - \left(\rho_w - \rho_{vp}^0\right)S\right]\Delta P_w + \Delta P_{as}\left[\left(\rho_w - \rho_{vp}^0\right)S\left(1 - \frac{RT^0}{K_H}\right)\right] +$$
$$\left[-\left(\rho_w - \rho_{vp}^0\right)S\left(\frac{RP_{as}}{K_H} - \frac{M_{vp}^{ol}P_{vp}^0}{RT^{0^2}}(1-S_0)\right)\right]\Delta T = 0$$

$$\Delta P_{vp}\left(\left(\rho_{ad}^0 - \rho_{as}^0\right)S\right) - \left(\rho_{ad}^0 - \rho_{as}^0\right)S\Delta P_w + \Delta P_{as}\left[\left(\rho_{ad}^0 - \rho_{as}^0\right)S\left(1 - \frac{RT^0}{K_H}\right) + M_{vp}^{ol}\left(\frac{S_0}{K_H} + \frac{(1-S_0)}{RT^0}\right)\right] +$$
$$\left[-\left(\rho_{ad}^0 - \rho_{as}^0\right)S\left(\frac{RP_{as}}{K_H} - \frac{M_{vp}^{ol}P_{as}}{RT^{0^2}}(1-S_0)\right)\right]\Delta T = 0$$

$$\Delta P_{vp}\left[-\frac{1}{P_{vp}^0}\right] + \frac{M_{vp}^{ol}}{\rho_w^0 RT}\Delta P_w +$$
$$\left[\frac{M_{vp}^{ol}}{\rho_w^0}\frac{P_{as}}{K_H T^0}(1-R) + \frac{M_{vp}^{ol}}{R}\frac{h_{vp}^m - h_w^m}{T^{0^2}}\right]\Delta T = 0$$

éq 2.1.1-6

### 2.1.2 Calcul de la température

L'équation [éq 3.2.4.3-1] du document de référence [R7.01.11] donne :

$$\Delta Q = -3\alpha_{gz}^m T\Delta p_{gz} + C_\varepsilon^0 \Delta T \qquad \text{éq 2.1.2-1}$$

(puisque les autres coefficients de dilatation sont nuls).

L'équation [éq 3.2.4.3-2] donne :

$$\alpha_{gz}^m = \frac{\phi(1-S_{lq})}{3T} \qquad \text{éq 2.1.2-2}$$

On obtient donc :

$$\Delta Q = -\phi(1-S_{lq})(\Delta p_{vp} + \Delta p_{as}) + C_\varepsilon^0 \Delta T \qquad \text{éq 2.1.2-3}$$

Dans ce problème, $\Delta Q$ n'est rien d'autre que la chaleur apportée par unité de volume.

En appelant $Vol$ le volume total de la pièce et $Surf$ sa surface latérale et $\Delta t$ le temps d'application des flux :

$$\Delta Q = \Delta t \frac{Surf}{Vol}\mathbf{q}_{ext}.\mathbf{n} \qquad \text{éq 2.1.2-4}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

### 2.1.3 Système à résoudre

$$\begin{bmatrix} (\rho_w - \rho_{vp}^0)S + \frac{(1-S_0)M_{vp}^{ol}}{RT^0} & -(\rho_w - \rho_{vp}^0)S & -(1-S_0)p_{vp}^0\frac{M_{vp}^{ol}}{RT^{0^2}} - (\rho_w - \rho_{vp}^0)S\frac{RP_{as}^0}{K_H} & (\rho_w - \rho_{vp}^0)S(1-\frac{RT^0}{K_H}) \\ (\rho_{ad}^0 - \rho_{as}^0)S & -(\rho_{ad}^0 - \rho_{as}^0)S & -(\rho_{ad}^0 - \rho_{as}^0)S\frac{RP_{as}^0}{K_H} - \frac{M_{vp}^{ol}P_{as}^0}{RT^{0^2}}(1-S_0) & (\rho_{ad}^0 - \rho_{as}^0)S\left(1-\frac{RT^0}{K_H}\right) + M_{vp}^{ol}\left(\frac{S_0}{K_H} + \frac{(1-S_0)}{RT^0}\right) \\ -\frac{1}{P_{vp}^0} & \frac{M_{vp}^{ol}}{\rho_w^0 RT} & \frac{M_{vp}^{ol}P_{as}^0}{\rho_w^0 K_H T^0}(1-R) + \frac{M_{vp}^{ol}}{R}\frac{h_{vp}^m - h_w^m}{T^{0^2}} & 0 \\ -\phi(1-S_{lq}) & 0 & C_\varepsilon^0 & -\phi(1-S_{lq}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta P_{vp} \\ \Delta P_w \\ \Delta T \\ \Delta P_{as} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta t \frac{Surf}{Vol}\mathbf{q}_{ext}.\mathbf{n} \\ 0 \end{bmatrix}$$

éq 2.1.2-5

| $S_0$ | $S'$ | $T^0$ | $p_{vp}^0$ | $h_{vp}^0$ | $\rho_{vp}^0$ (calculé) | $\rho_{lq}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5,00E-01 | -1,00E-12 | 3,00E+02 | 3,70E+03 | 2,50E+06 | 2,67E-02 | 1,00E+03 |

| $r_0$ | $\phi^0$ | $\rho_s$ (calculé) | $C_\sigma^s$ | $C_{lq}^p$ I | $C_{vp}^p$ | $C_\varepsilon^0$ (calculé) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,20E+03 | 3,00E-01 | 2,93E+03 | 1,05E+03 | 4,18E+03 | 1,90E+03 | 2,78E+06 |

| $\mathbf{q}_{ext}.\mathbf{n}$ | $\Delta t$ | $Surf$ | $Vol$ |
|---|---|---|---|
| 1,00E+06 | 10 | 400 | 1,00E+04 |

On obtient les résultats suivants :

Après résolution de ce système, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \Delta P_{vp} \\ \Delta P_w \\ \Delta T \\ \Delta P_{as} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.4 \\ -99500 \\ 0.144 \\ 45.7 \end{bmatrix}$$

Ce qui donne en terme de résultat Aster (incrément) :

| $PRE1$ | $PRE2$ | $DT$ | $PVP(V3)$ |
|---|---|---|---|
| 9.95 E4 | 7.5E1 | 1.44E-1 | 2.94E1 |

## 2.2 Incertitudes

Les incertitudes sont assez grandes parce-que la solution analytique est une solution approchée du fait de la linéarisation des équations.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 3 Modélisation A

## 3.1 Caractéristiques de la modélisation A

Modélisation en déformations planes. Un élément $Q8$ .
Discrétisation en temps : un seul pas de temps : $10\,s$ .

## 3.2 Valeurs testées

| Nœud | Champ | Composante | Instant ( $s$ ) | Référence (analytique) |
|---|---|---|---|---|
| *NO1* | DEPL | *TEMP* | 10 | 0.1440 |
| *NO1* | DEPL | *PRE1* | 10 | $9.95\,10^4$ |
| *NO1* | DEPL | *PRE2* | 10 | 75 |
| *NO1* | VARI_ELNO | *V3* | 10 | 29.4 |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 4 Synthèse des résultats

La solution est en très bon accord avec la solution analytique hormis pour la pression de gaz. Les faibles différences sont dues à la linéarisation.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)