

## HSNV104 - Thermo-plasticité et métallurgie en déformations planes avec restauration d'écrouissage

---

### Résumé :

On traite la détermination de l'évolution mécanique d'un parallélépipède rectangle en déformations planes soumis à des évolutions thermique  $T_{(t)}$  et métallurgique  $Z_{(t)}$  connues et uniformes (la transformation métallurgique est de type bainitique).

Les éléments utilisés sont des éléments bidimensionnels en déformations planes et la relation de comportement est la plasticité de von Mises avec écrouissage isotrope linéaire. On tient compte de la restauration d'écrouissage, mais non de la plasticité de transformation.

Le coefficient de dilatation  $\alpha$  dépend de la composition métallurgique.

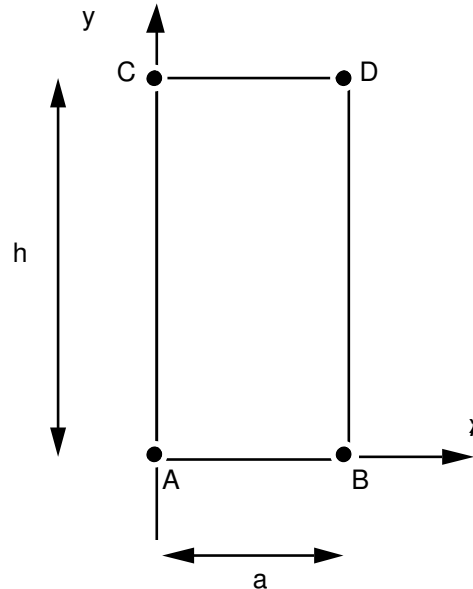
La solution de référence est obtenue par la résolution analytique du problème.

Les résultats fournis par *Code\_Aster* sont très satisfaisants avec des erreurs inférieures à 0,8% .

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

Largeur :  $a = 0.05$  m.  
Hauteur :  $h = 0.2$  m.



### 1.2 Propriétés des matériaux

La convention suivante est adoptée afin de distinguer les paramètres de la phase chaude (austénitique) des paramètres des phases froides (ferrito-perlitique, bainitique et martensitique) :

- \**aust* = caractéristiques relatives à la phase austénitique
- \**fbm* = caractéristiques relatives aux phases ferrito-perlitique, bainitique et martensitique

#### Paramètres métallurgiques :

TRC pour modéliser une évolution métallurgique de type bainitique, sur toute la structure, de la forme :

$$Z_{fbm} = \begin{cases} 0. & \text{si } t \leq \tau_1 & \tau_1 = 60 \text{ s} \\ \frac{t - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} & \text{si } \tau_1 \leq t < \tau_2 & \tau_2 = 112 \text{ s} \\ 1. & \text{si } t \geq \tau_2 \end{cases}$$

#### Paramètres thermiques :

Capacité calorifique :  $\rho C_p = 2.10^6 \text{ J.m}^{-3} . ^\circ\text{C}^{-1}$

Conductivité :  $\lambda = 9999.9 \text{ W.m}^{-1} . ^\circ\text{C}^{-1}$

#### Paramètres thermo-mécaniques :

- Paramètres thermo-élastiques :

Module d'Young  $E = 200000 \cdot 10^6 \text{ Pa}$

Coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$

Coefficients de dilatation thermique  $\alpha_{fbm} = \alpha_{aust} = 20.10^{-6} . ^\circ\text{C}^{-1}$

Température de définition du coefficient de dilatation :  $T_{ref} = 900 \text{ }^\circ\text{C}$

État de déformation thermique de référence :  $\Delta \varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}} = 2.52 \cdot 10^{-3}$

Limite d'élasticité :

$$\sigma_y^{fbm} = 1200 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$\sigma_y^{aust} = 400 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

- Paramètres thermo-plastiques (loi avec écrouissage linéaire)

Modules tangents :  $E_T^{fbm} = E_T^{aust} = 2000 \cdot 10^6 \text{ Pa}$

On a alors :  $H^{fbm} = H^{aust} = \frac{EE_T}{(E - E_T)} = 2,04 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

- Paramètres pour la restauration d'écrouissage (restauration complète) :  $\theta_{\gamma,3} = 0$   
 $\theta_{\gamma,3}$  est le taux d'écrouissage transmis de l'austénite à la phase ferritique 3 (bainite).

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

- $u_y = 0$  sur le côté  $AB$  ;  $u_x = 0$  en  $A$ .
- $T = T^0 + \mu t$ ,  $\mu = -5 \text{ }^\circ\text{C} \cdot \text{s}^{-1}$  sur toute la structure.
- Le chargement sur la structure est dû aux phénomènes de dilatation thermique et métallurgique contraints dans la direction  $z$  par la condition de déformations planes.

## 1.4 Conditions initiales

$$T^0 = 900 \text{ }^\circ\text{C} = T^{ref}$$

## 2 Solution de référence

### 2.1 Forme du champ solution

Le champ de contrainte solution  $\sigma(t)$  est de la forme :

$$\sigma(t) = \sigma_o(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit la forme suivante du tenseur des déformations élastiques :

$$\epsilon^e(t) = \frac{\sigma_o(t)}{E} \begin{pmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De plus, étant donné que  $\sigma(t)$  garde une direction constante, on a :

$$\epsilon^p(t) = \epsilon_o^p(t) \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $\epsilon^p$  est le tenseur des déformations plastiques.

### 2.2 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

**Notation** : par la suite, on notera  $\epsilon_\alpha^{eff}$  (resp.  $\epsilon_y^{eff}$ ) la variable d'écroissage effective des phases froides (resp. de la phase chaude).

**Avant transformation**, solution thermo-élastique pour  $t < t_1$ .

$$\begin{cases} \epsilon_{zz}(t) = \epsilon_{zz}^e(t) + \epsilon_{zz}^{th}(t) = 0 \\ \epsilon_{zz}^{th}(t) = \alpha_{aust}(T - T^0) \\ \sigma_{zz}(t) = -E \epsilon_{zz}^{th}(t) \end{cases}$$

La limite élastique est atteinte pour  $t = t_1$  tel que :

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(t_1) = -E \epsilon_{zz}^{th}(t_1) = \sigma_y^{aust} &\Leftrightarrow T(t_1) - T^0 = \frac{-\sigma_y^{aust}}{E \alpha_{aust}} = -100.^\circ C \\ &\Leftrightarrow t_1 = \frac{T(t_1) - T^0}{\mu} = 20 s \end{aligned}$$

**Avant transformation**, solution thermo-élasto-plastique,  $t_1 \leq t \leq \tau_1$ .

$$\begin{cases} \varepsilon_{zz}(t) = \varepsilon_{zz}^e(t) + \varepsilon_{zz}^{th}(t) + \varepsilon_{zz}^p(t) = 0 \\ \varepsilon_{zz}^{th}(t) = \alpha_{aust}(T - T^0) \\ \varepsilon_{zz}^p(t) = \frac{-\sigma_y^{aust} - E \alpha_{aust}(T - T^0)}{E + H^{aust}} \\ \sigma_{zz}(t) = -E(\varepsilon_{zz}^p(t) + \varepsilon_{zz}^{th}(t)) \\ \varepsilon_{\gamma}^{eff}(t) = p(t) = \varepsilon_{zz}^p(t) \\ \varepsilon_{\alpha}^{eff}(t) = 0 \end{cases}$$

**Pendant la transformation**, pour  $\tau_1 < t \leq \tau_2$ , on est en régime élastique, on a donc une solution thermo-élastique avec changement de phase.

$$\begin{cases} \varepsilon_{zz}(t) = \varepsilon_{zz}^e(t) + \varepsilon_{zz}^{th}(t) + \varepsilon_{zz}^p(\tau_1) = 0 \\ \varepsilon_{zz}^{th}(t) = Z_{aust} \alpha_{aust}(T - T^0) + Z_{fbm}(\alpha_{fbm}(T - T^0) + \Delta \varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}}) \\ \sigma_{zz}(t) = -E(\varepsilon_{zz}^p(\tau_1) + \varepsilon_{zz}^{th}(t)) \\ \varepsilon_{\gamma}^{eff}(t) = \varepsilon_{zz}^p(\tau_1) \\ \varepsilon_{\alpha}^{eff}(t) = 0 \end{cases}$$

**Après la transformation**, solution thermo-élastique pour  $\tau_2 < t < t_2$ .

$$\begin{cases} \varepsilon_{zz}(t) = \varepsilon_{zz}^e(t) + \varepsilon_{zz}^{th}(t) + \varepsilon_{zz}^p(\tau_1) = 0 \\ \varepsilon_{zz}^{th}(t) = \alpha_{fbm}(T - T^0) + \Delta \varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}} \\ \sigma_{zz}(t) = -E(\varepsilon_{zz}^{th}(t) + \varepsilon_{zz}^p(\tau_1)) \\ \varepsilon_{\gamma}^{eff}(t) = \varepsilon_{zz}^p(\tau_1) \\ \varepsilon_{\alpha}^{eff}(t) = 0 \end{cases}$$

La limite élastique est atteinte pour  $t = t_2$  tel que :

$$\sigma_{zz}(t_2) = R(T, Z, \varepsilon^{eff}) + \sigma_y(T, Z)$$

A cause de la restauration d'écroissage et du fait qu'on était en régime élastique pendant toute la transformation :  $R = 0$  avant replastification.

On a donc en  $t_2$  :

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(t_2) = -E(\varepsilon_{zz}^{th}(t_2) + \varepsilon_{zz}^p(\tau_1)) = \sigma_y^{fbm} &\Leftrightarrow T(t_2) - T^0 = -\frac{\sigma_y^{fbm} + E(\Delta \varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}} + \varepsilon_{zz}^p(\tau_1))}{E \alpha_{fbm}} \simeq -624 \text{ } ^\circ\text{C} \\ \Rightarrow t_2 = \frac{T(t_2) - T^0}{\mu} &\simeq 125 \text{ s} \end{aligned}$$

**Après la transformation**, solution thermo-élasto-plastique pour  $t \geq t_2$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{zz}(t) = \varepsilon_{zz}^e(t) + \varepsilon_{zz}^{th}(t) + \varepsilon_{zz}^p(t) = 0 \\ \varepsilon_{zz}^{th}(t) = \alpha_{fbm}(T - T^0) + \Delta \varepsilon_{fy}^{T_{ref}} \\ \varepsilon_{zz}^p(t) = \frac{-\sigma_y^{fbm} - E(\alpha_{fbm}(T - T^0) + \Delta \varepsilon_{fy}^{T_{ref}}) + H^{fbm} \varepsilon^p(\tau_1)}{E + H^{fbm}} \\ \sigma_{zz}(t) = -E(\varepsilon_{zz}^p(t) + \varepsilon_{zz}^{th}(t)) \\ \varepsilon_y^{eff}(t) = 0 \\ \varepsilon_\alpha^{eff}(t) = \varepsilon_{zz}^p(t) - \varepsilon_{zz}^p(\tau_1) \end{array} \right.$$

## 2.3 Résultats de référence

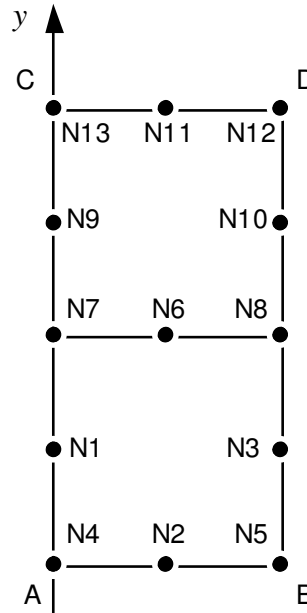
À $t=60 s$ :	$\sigma_{zz}$	$\varepsilon_y^{eff}$	$\varepsilon_\alpha^{eff}$	$\varepsilon_{xx}^{th}$	$\varepsilon_{xx}^{meca}$	$\varepsilon_{xx}^{plas}$
À $t=89 s$ :	$\sigma_{zz}$	$\varepsilon_y^{eff}$	$\varepsilon_\alpha^{eff}$	$\varepsilon_{xx}^{th}$	$\varepsilon_{xx}^{meca}$	$\varepsilon_{xx}^{plas}$
À $t=112 s$ :	$\sigma_{zz}$	$\varepsilon_y^{eff}$	$\varepsilon_\alpha^{eff}$	$\varepsilon_{xx}^{th}$	$\varepsilon_{xx}^{meca}$	$\varepsilon_{xx}^{plas}$
À $t=176 s$ :	$\sigma_{zz}$	$\varepsilon_y^{eff}$	$\varepsilon_\alpha^{eff}$	$\varepsilon_{xx}^{th}$	$\varepsilon_{xx}^{meca}$	$\varepsilon_{xx}^{plas}$

## 2.4 Références bibliographiques

1. DONORE A.M. - WAECKEL F. - Influence des transformations structurales dans les lois de comportement élasto-plastiques Note HI-74/93/024.
2. DONORE.A.M. - WAECKEL.F. - RAZAKANAIVO.A. - Doc. Aster [R4.04.02].

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation



$A = N4$ ,  $B = N5$ ,  $C = N13$ ,  $D = N12$ .

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 13.

Nombre de mailles et types : 2 mailles QUAD8, 6 mailles SEG3.

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de Référence	Référence	Tolérance ( % )
$\sigma_{zz}$ $t = 60s$	ANALYTIQUE	4.0792E8	0.1
$\varepsilon_y^{eff}$ $t = 60s$	ANALYTIQUE	3.9604E-3	0.1
$\varepsilon_\alpha^{eff}$ $t = 60s$	ANALYTIQUE	0.	0.1
$\varepsilon_{xx}^{th}$ $t = 60s$	ANALYTIQUE	-6.0E-3	0.1
$\varepsilon_{xx}^{meca}$ $t = 60s$	ANALYTIQUE	-2.59208E-3	0.1
$\varepsilon_{xx}^{plas}$ $t = 60s$	ANALYTIQUE	-1.9802E-3	0.1
$\sigma_{zz}$ $t = 89s$	ANALYTIQUE	7.0684E8	0.80
$\varepsilon_y^{eff}$ $t = 89s$	ANALYTIQUE	3.9604E-3	0.1
$\varepsilon_\alpha^{eff}$ $t = 89s$	ANALYTIQUE	0.	0.1
$\varepsilon_{xx}^{th}$ $t = 89s$	ANALYTIQUE	-7.49460E-3	0.5
$\varepsilon_{xx}^{meca}$ $t = 89s$	ANALYTIQUE	-3.04046E-3	0.1
$\varepsilon_{xx}^{plas}$ $t = 89s$	ANALYTIQUE	-1.9802E-3	0.3
$\sigma_{zz}$ $t = 112s$	ANALYTIQUE	9.4392E8	0.1
$\varepsilon_y^{eff}$ $t = 112s$	ANALYTIQUE	0.	0.1

$\varepsilon_{\alpha}^{eff}$	$t=112s$	ANALYTIQUE	0.	0.1
$\varepsilon_{xx}^{th}$	$t=112s$	ANALYTIQUE	-8.68E-3	0.1
$\varepsilon_{xx}^{meca}$	$t=112s$	ANALYTIQUE	-3.39608E-3	0.1
$\varepsilon_{xx}^{plas}$	$t=112s$	ANALYTIQUE	-1.9802E-3	0.1
$\sigma_{zz}$	$t=176s$	ANALYTIQUE	12.101E8	0.1
$\varepsilon_{y}^{eff}$	$t=176s$	ANALYTIQUE	0.	0.1
$\varepsilon_{\alpha}^{eff}$	$t=176s$	ANALYTIQUE	5.068921E-3	0.1
$\varepsilon_{xx}^{th}$	$t=176s$	ANALYTIQUE	-1.508E-2	0.1
$\varepsilon_{xx}^{meca}$	$t=176s$	ANALYTIQUE	-6.3298E-3	0.1
$\varepsilon_{xx}^{plas}$	$t=176s$	ANALYTIQUE	-4.51465E-3	0.1

## 3.4 Remarques

Dans cette modélisation :

$$\varepsilon_{zz}^{pl}(T, Z) = 0$$

L'erreur sur  $\sigma_{zz}$  à 89 secondes provient en fait de l'erreur commise sur la description numérique de la transformation métallurgique qui est, à cet instant, d'environ 56% .



## 4 Synthèse des résultats

Les résultats trouvés avec *Code\_Aster* sont très satisfaisants, avec des pourcentages d'erreur inférieurs à 0.8%.