
SSNV515 – Essai de traction avec la loi de Rankine

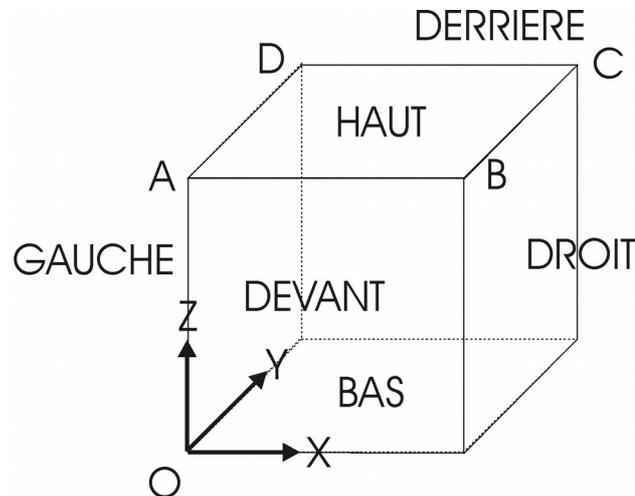
Résumé

On réalise un essai de traction simple avec *la loi de Rankine*. Les solutions calculées sont comparées à une solution analytique. Trois modélisations sont proposées :

- une modélisation 0D avec SIMU_POINT_MAT ;
- une modélisation 3D ;
- une modélisation 2D axisymétrique ;

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



L'essai de traction simple est effectué sur un seul élément fini isoparamétrique de forme cubique *CUB4*. La longueur de chaque arête vaut 1. Les différentes facettes de ce cube sont des groupes de mailles nommés *HAUT*, *BAS*, *DEVANT*, *DERRIERE*, *DROIT* et *GAUCHE*. Le groupe de mailles *SYM* contient par ailleurs les groupes de mailles *BAS*, *DEVANT* et *GAUCHE*; le groupe de mailles *COTE* les groupes de mailles *DERRIERE* et *DROIT*.

1.2 Propriétés de matériaux

Les propriétés élastiques sont :

- module d'Young : $E = 1 \text{ MPa}$
- coefficient de Poisson : $\nu = 0,25$

La limite en traction est égale à $\sigma_t = 1 \text{ kPa}$

1.3 Conditions aux limites et chargements

L'essai de traction simple consiste à imposer à l'éprouvette une elongation verticale tout en maintenant la pression latérale constante et égale à la contrainte isotrope initiale $P_0 = 10 \text{ kPa}$

Dans le modèle considéré, l'élément cubique représente un huitième de l'échantillon. Les conditions limites sont donc les suivantes :

- Les conditions de symétrie :
 - $u_z = 0$ sur le groupe de maille *BAS*
 - $u_x = 0$ sur le groupe de maille *GAUCHE*
 - $u_y = 0$ sur le groupe de maille *DEVANT*
- Les conditions de pression latérale :
 - $P_n = P_0 = 10 \text{ kPa}$ sur les groupes de mailles *DROIT* et *ARRIERE*
- Les conditions de chargement :
 - $u_z = +1$ sur le groupe de maille *HAUT*

Le chargement s'effectue en 30 pas de temps entre $t=0$ et $t=30$ pendant lesquels le déplacement imposé sur le groupe de mailles *HAUT* varie de $u_z=0$ à $u_z=0.3$ (déformation verticale totale de 30%).

1.4 Résultats

Les solutions sont post-traitées au point C , en termes de :

- contrainte verticale σ_{zz} ;
- déformation horizontale ϵ_{xx} ;
- norme de la déformation plastique déviatorique $e^P = \|\mathbf{e}^P\|$

Elles sont comparées à une solution analytique (décrite dans le paragraphe suivant) en termes d'écart maximal entre $t=0$ et $t=20$.

2 Solution analytique

Introduisons d'abord les notations suivantes :

$$\begin{cases} A = K + \frac{4}{3}G \\ B = K - \frac{2}{3}G \\ C = 2\left(K + \frac{G}{3}\right) \end{cases} \quad (1)$$

Avec $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ et $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ les modules de compressibilité et de cisaillement, respectivement.

Soit \mathbf{C} le tenseur d'élasticité de Hooke, on aura avec l'hypothèse $\epsilon_{yy} = \epsilon_{xx}$:

$$\mathbf{C} \cdot d\boldsymbol{\epsilon} = \begin{cases} Bd\epsilon_{zz} + Cd\epsilon_{xx} \\ Bd\epsilon_{zz} + Cd\epsilon_{xx} \\ Ad\epsilon_{zz} + 2Bd\epsilon_{xx} \end{cases} \quad (2)$$

On notera pour simplifier la contrainte verticale à l'instant t $\sigma^+ = \sigma_{zz}^+$, de sorte que le critère de Rankine s'écrit :

$$\sigma^+ \leq \sigma_t \quad (3)$$

On a par ailleurs :

$$\begin{cases} \sigma^{\text{préd}} = \sigma^- + \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot d\boldsymbol{\epsilon} \\ \sigma^+ = \sigma^- + \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot (d\boldsymbol{\epsilon} - d\lambda \mathbf{n}) = \sigma^{\text{préd}} - \underbrace{d\lambda \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}}_{\Delta\sigma_c} \end{cases} \quad (4)$$

Avec $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et où :

$$d\lambda = \frac{\langle \sigma^{\text{préd}} - \sigma_t \rangle_+}{A} \quad (5)$$

D'après la loi d'écoulement associée, on a aussi :

$$\begin{cases} d\epsilon_{zz}^P = d\lambda = d\epsilon_v^P \\ e^P = \frac{2}{3}d\lambda \end{cases} \quad (6)$$

Comme $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\Delta\sigma_c = d\lambda A \quad (7)$$

La combinaison des équations (7), (5) et (4) nous donne la contrainte σ_{zz}^+ . Les équations (6) et (5) nous donnent la norme de la déformation plastique déviatorique e^P .

Essayons d'obtenir maintenant l'expression de la déformation élastique horizontale $\epsilon_{xx}^{\text{élas}}$.

Latéralement, on a la condition $\sigma_{xx}^+ = P_0$, soit :

$$\sigma_{xx}^{\text{préd}} - \Delta \sigma_{xx,C} = P_0 \quad (8)$$

Avec $\Delta \sigma_{xx,C} = d \lambda B$

On obtient alors en utilisant l'équation (2) :

$$\sigma_{xx}^- + C d \epsilon_{xx}^{\text{élas}} + B d \epsilon_{zz} - B d \lambda = P_0 \quad (9)$$

D'où l'incrément de déformation élastique horizontale :

$$d \epsilon_{xx}^{\text{élas}} = \frac{P_0 - \sigma_{xx}^- + B(d \lambda - d \epsilon_{zz})}{C} \quad (10)$$

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation A est réalisée sur un point matériel 0D avec SIMU_POINT_MAT.

3.2 Grandeurs testées et résultats

3.2.1 Valeurs testées

Les solutions sont post-traitées au point C , en termes de :

- contrainte verticale σ_{zz} ;
- déformation horizontale ϵ_{xx} ;
- norme de la déformation plastique déviatorique $e^P = \|\mathbf{e}^P\|$

Elles sont comparées à une solution analytique (décrite dans le paragraphe suivant) en termes d'écart maximal entre $t=0$ et $t=20$. Les résultats sont récapitulés dans les tableaux suivants :

$$Q = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} \quad [Pa]$$

Variable	Ecart absolu Code_Aster – Analytique
σ_{zz}	0
ϵ_{xx}	$3 \cdot 10^{-5}$
e^P	$1.333 \cdot 10^{-5}$

3.2.2 Commentaires

L'écart avec la solution analytique est très faible.

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation B est réalisée en 3D avec STAT_NON_LINE.

4.2 Grandeurs testées et résultats

4.2.1 Valeurs testées

Les solutions sont post-traitées au point C , en termes de :

- contrainte verticale σ_{zz} ;
- déformation horizontale ϵ_{xx} ;
- norme de la déformation plastique déviatorique $e^P = \|\mathbf{e}^P\|$

Elles sont comparées à une solution analytique (décrite dans le paragraphe suivant) en termes d'écart maximal entre $t=0$ et $t=20$. Les résultats sont récapitulés dans les tableaux suivants :

$$Q = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} \quad [Pa]$$

Variable	Ecart absolu Code_Aster - Analytique
σ_{zz}	0
ϵ_{xx}	$3 \cdot 10^{-5}$
e^P	$1.333 \cdot 10^{-5}$

4.2.2 Commentaires

L'écart avec la solution analytique est très faible.

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation C est réalisée sur un point matériel 2D axisymétrique avec STAT_NON_LINE.

5.2 Grandeurs testées et résultats

5.2.1 Valeurs testées

Les solutions sont post-traitées au point C , en termes de :

- contrainte verticale σ_{zz} ;
- déformation horizontale ϵ_{xx} ;
- norme de la déformation plastique déviatorique $e^P = \|\mathbf{e}^P\|$

Elles sont comparées à une solution analytique (décrite dans le paragraphe suivant) en termes d'écart maximal entre $t=0$ et $t=20$. Les résultats sont récapitulés dans les tableaux suivants :

$$Q = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{s} : \underline{s}} \quad [Pa]$$

Variable	Ecart absolu Code_Aster – Analytique
σ_{zz}	0
ϵ_{xx}	$3 \cdot 10^{-5}$
e^P	$1.333 \cdot 10^{-5}$

5.2.2 Commentaires

L'écart avec la solution analytique est très faible.

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation D est réalisée sur un point matériel 3D avec STAT_NON_LINE. La différence par rapport à la modélisation B est le calcul de l'état initial par un chargement thermique. Pour amener l'échantillon à la contrainte isotrope initiale $P_0 = 10 \text{ kPa}$, on amène l'échantillon de 20° à 30° celcius. Les déplacements de l'échantillon sont bloqués, de sorte que la dilatation thermique amène l'échantillon en compression. On obtient :

$$\sigma_0 = \frac{E}{9(1-2\nu)} \alpha \Delta T = P_0$$

Soit la valeur suivante du coefficient de dilatation thermique : $\alpha = \frac{9(1-2\nu)P_0}{E \Delta T}$

6.2 Grandeurs testées et résultats

6.2.1 Valeurs testées

Les solutions sont post-traitées au point C , en termes de :

- contrainte verticale σ_{zz} ;
- déformation horizontale ϵ_{xx} ;
- norme de la déformation plastique déviatorique $e^P = \|e^P\|$

Elles sont comparées à une solution analytique (décrite dans le paragraphe suivant) en termes d'écart maximal entre $t=0$ et $t=20$. Les résultats sont récapitulés dans les tableaux suivants :

$$Q = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} \text{ [Pa]}$$

Variable	Ecart absolu Code_Aster - Analytique
σ_{zz}	0
ϵ_{xx}	$3 \cdot 10^{-5}$
e^P	$1.333 \cdot 10^{-5}$

6.2.2 Commentaires

L'écart avec la solution analytique est très faible.

7 Synthèse des résultats

On représente dans les figures suivantes l'évolution des différentes grandeurs lors de l'essai de traction avec la loi de Rankine.

TRACTION TEST WITH RANKINE

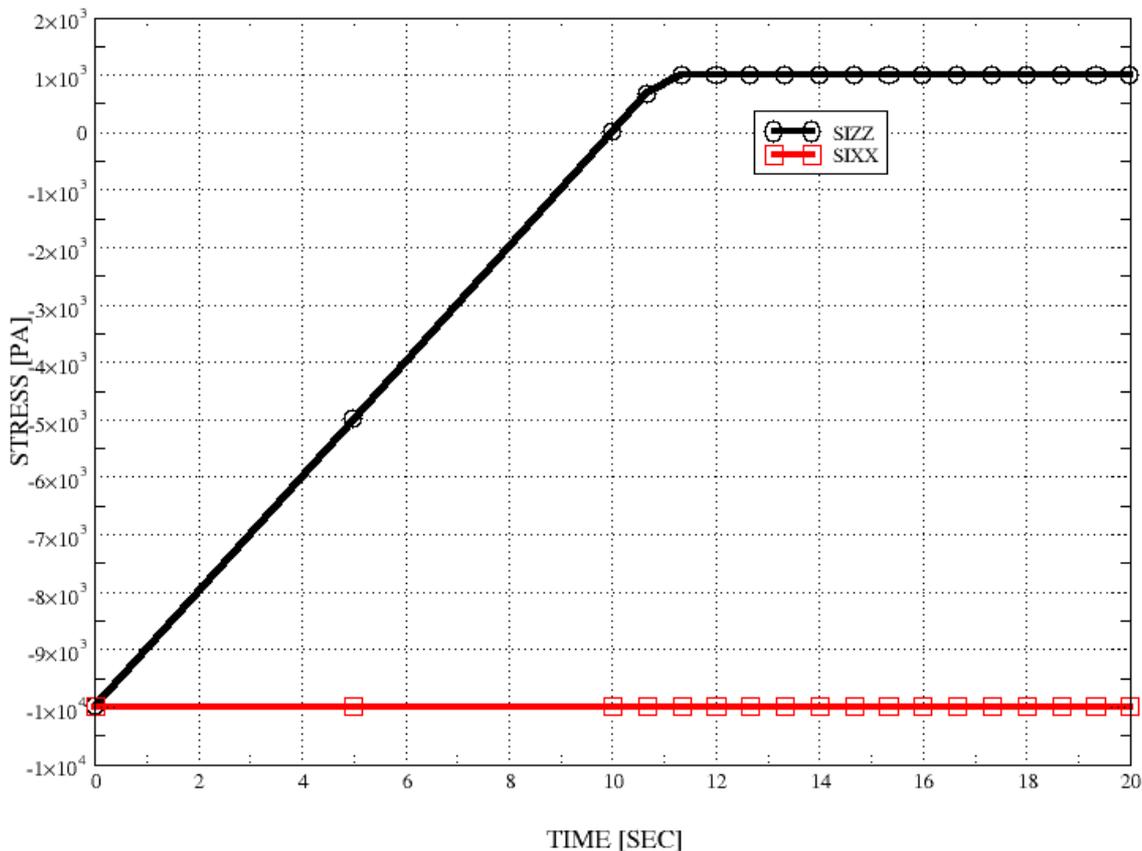


Figure 1 : Evolution des contraintes lors de l'essai de traction

TRACTION TEST WITH RANKINE

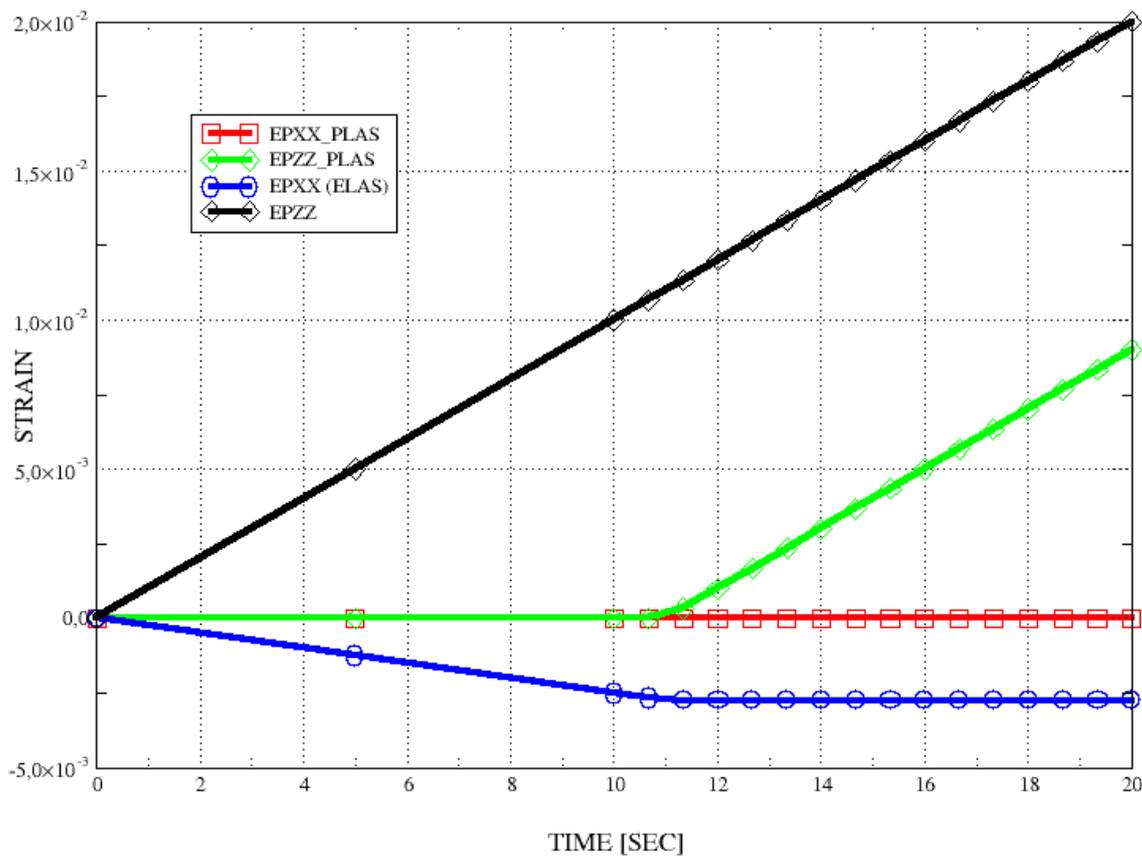


Figure 2 : Evolution des déformations lors de l'essai de traction

TRACTION TEST WITH RANKINE

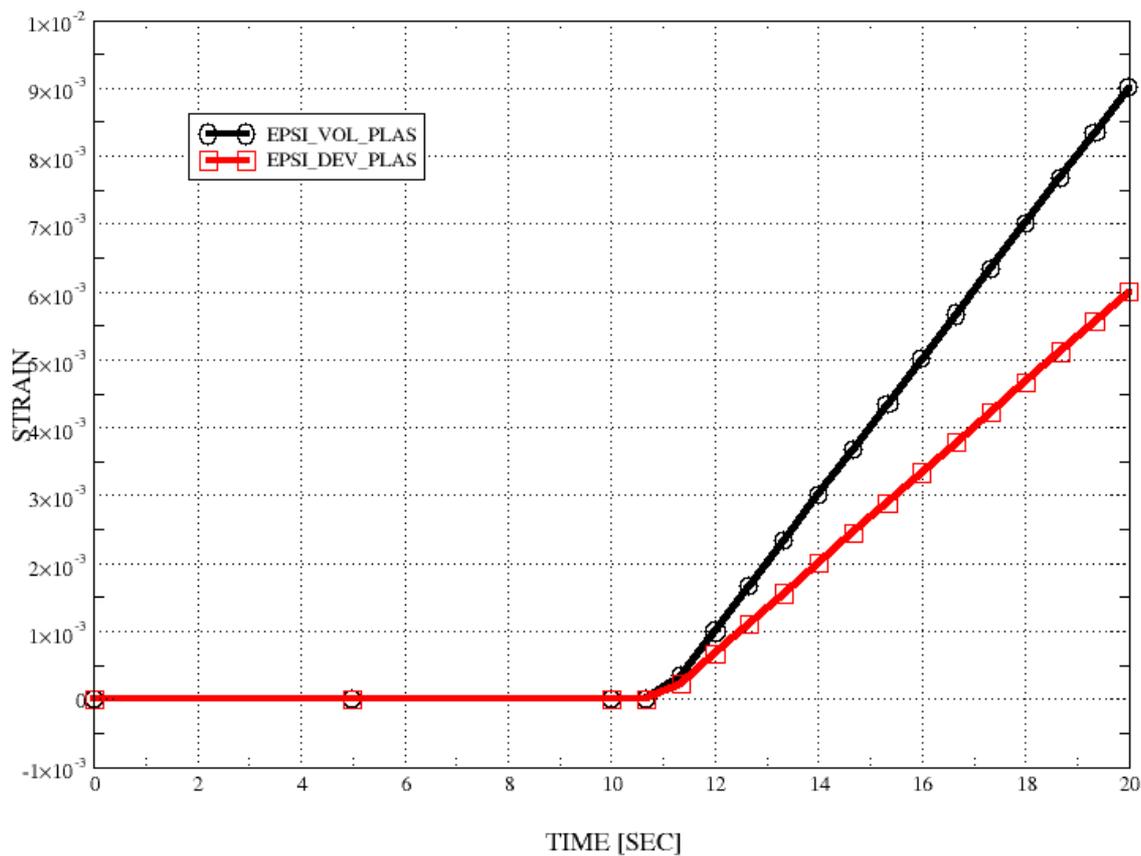


Figure 3 : Evolution des variables internes lors de l'essai de traction