

## SSNV221 – Essai hydrostatique avec un comportement DRUCK\_PRAGER linéaire et parabolique

---

### Résumé :

Le cas test propose un chargement purement hydrostatique pour la loi Drucker-Prager associée [R7.01.16]. La formulation de cette loi plastique, souvent utilisée pour les sols, est faite à la fois sur la partie déviatorique et hydrostatique ; néanmoins, la surface critère présente une singularité pour un état de contrainte purement hydrostatique. Ce cas-test analytique sert à vérifier l'écroissage correct en cette singularité.

Le test est effectué sur un point matériel avec la commande `SIMU_POINT_MAT`. On travaille à déformations imposées.

On fait un test avec écroissage linéaire (modélisation A) et un autre avec écroissage parabolique (modélisation B).

## 1 Problème de référence

### 1.1 Propriétés du matériau

**Élastiques :**

$E = 3000 \text{ MPa}$  Module d'Young  
 $\nu = 0,25$  Coefficient de Poisson

**DRUCK\_PRAGER linéaire (modélisation A) :**

$\alpha = 0,20$  Coefficient de dépendance en pression  
 $p_{ultm} = 0,04$  Déformation plastique cumulée ultime  
 $\sigma_Y = 6 \text{ MPa}$  Contrainte plastique  
 $h = 100 \text{ MPa}$  Module d'écrouissage

**DRUCK\_PRAGER parabolique (modélisation B) :**

$\alpha = 0,20$  Coefficient de dépendance en pression  
 $p_{ultm} = 0,04$  Déformation plastique cumulée ultime  
 $\sigma_Y = 6 \text{ MPa}$  Contrainte plastique  
 $\sigma_Y^{ult} = 10 \text{ MPa}$  Contrainte plastique ultime

### 1.2 Chargements et conditions aux limites

On impose une déformation volumique  $\varepsilon_v = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ . Le chargement n'est pas monotone : on charge d'abord jusqu'à la déformation volumique  $\varepsilon_{v1}$ , en dépassant le seuil de plastification, puis on décharge à un niveau de déformation nul ; ensuite on charge encore à la déformation  $\varepsilon_{v2}$  en dépassant ainsi la déformation plastique cumulée ultime  $p_{ultm}$ , au delà de laquelle on retrouve une plasticité parfaite ; on décharge encore à contrainte nulle (déformation égale à la déformation plastique  $\varepsilon_{v2}^p$ ) et on recharge en plastifiant ultérieurement jusqu'à la déformation  $\varepsilon_{v3}$ . Le temps de chargement (voir Tableau 1.2-1) est fictif car les lois plastiques sont indépendantes du temps.

$t$	$\varepsilon_v$
0	0
10	$\varepsilon_{v1} = 0,018$
14	0
26	$\varepsilon_{v2} = 0,045$
30	$\varepsilon_{v2}^p = 0,03667$
40	$\varepsilon_{v3} = 0,06$

Tableau 1.2-1: déformation volumique imposée.

### 1.3 Conditions initiales

Toutes les composantes des contraintes et déformations sont nulles au début du chargement.

## 2 Solution de référence

La modélisation vérifie le comportement de la loi à écrouissage linéaire.

### 2.1 Méthode de calcul

Les équations qui nous intéressent pour le calcul analytique sont ( $I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$  : trace du tenseur des contraintes,  $\varepsilon_v^p$  : déformation plastique volumique) :

- loi constitutive plastique sur la partie volumique :

$$I_1 = 3K(\varepsilon_v - \varepsilon_v^p) \quad (\text{éq 2.1-1})$$

- surface critère, en posant nulle la contrainte de Von Mises ( $\sigma_{eq} = 0$ ) :

$$F(\boldsymbol{\sigma}, p) = \alpha I_1 - R(p) \quad (\text{éq 2.1-2})$$

- relation entre la déformation plastique volumique et la déformation plastique cumulée (variable interne de la loi plastique) :

$$\dot{\varepsilon}_v^p = 3\alpha \dot{p} \quad \text{donc en intégrant : } \varepsilon_v^p = 3\alpha p \quad (\text{éq 2.1-3})$$

- expression de l'écrouissage
  - linéaire :

$$\begin{aligned} R(p) &= \sigma_Y + h p & \text{si } p \leq p_{ult} \\ R(p) &= \sigma_Y + h p_{ult} = \sigma_Y^{ult} & \text{si } p > p_{ult} \end{aligned} \quad (\text{éq 2.1-4})$$

- parabolique :

$$\begin{aligned} R(p) &= \sigma_Y \left( 1 - \left( 1 - \sqrt{\frac{\sigma_Y^{ult}}{\sigma_Y}} \frac{p}{p_{ult}} \right)^2 \right) & \text{si } p \leq p_{ult} \\ R(p) &= \sigma_Y^{ult} & \text{si } p > p_{ult} \end{aligned} \quad (\text{éq 2.1-5})$$

On observe que, comme dans le cas linéaire,  $R(p) = \sigma_Y$  si  $p = 0$  et on a plasticité parfaite si  $p > p_{ult}$ .

#### 2.1.1 Déformation à la limite élastique initiale

Cette déformation est obtenue pour  $\varepsilon_v^p = p = 0$ .

Si on pose  $F(\boldsymbol{\sigma}, p) = 0$  (évolution plastique) on a :

$$\begin{aligned} I_1^{el} &= \frac{R(p)}{\alpha} = \frac{\sigma_Y}{\alpha} \\ \varepsilon_v^{el} &= \frac{I_1^{el}}{3K} \end{aligned}$$

#### 2.1.2 Déformation ultime

On appelle déformation ultime  $\varepsilon_v^{ult}$  celle obtenue pour  $p = p_{ult}$ .

On trouve facilement la trace de contraintes  $I_1^{ult}$  et la déformation plastique  $\varepsilon_v^{pult}$  correspondantes :

$$I_1^{ult} = \frac{R(p)}{\alpha} = \frac{\sigma_Y^{ult}}{\alpha}$$

$$\varepsilon_v^{pult} = 3 \alpha p_{ult}$$

$$\varepsilon_v^{ult} = \frac{I_1^{ult}}{3K} + \varepsilon_v^{pult}$$

## 2.1.3 Déformation entre la limite élastique et la déformation ultime

On calcule d'abord la déformation plastique cumulée.

- En combinant les équations (2.1-1), (2.1-2), (2.1-3) et (2.1-4) avec  $F(\sigma, p) = 0$  pour l'**écrouissage linéaire** on a :

$$p = \frac{3 K A \varepsilon_{v1} - \sigma_Y}{9 K \alpha^2 + h} \quad (\text{éq 2.1-6})$$

- En combinant les équations (2.1-1), (2.1-2), (2.1-3) et (2.1-5) avec  $F(\sigma, p) = 0$  pour l'**écrouissage parabolique** on arrive à l'équation de degré 2 :

$$A_1 \bar{p}^2 + B_1 \bar{p} + C_1 = 0$$

$$A_1 = \sigma_Y (1 - \gamma)^2$$

$$B_1 = 9 K \alpha^2 p_{ult} - 2 \sigma_Y (1 - \gamma)$$

$$C_1 = \sigma_Y - 3 K \alpha \varepsilon_{v1}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{\sigma_Y^{ult}}{\sigma_Y}}$$

$$\bar{p} = \frac{p}{p_{ult}} \quad (\text{eq 2.1-7})$$

On utilise alors les équations (2.1-3) (2.1-1) pour trouver la déformation plastique  $\varepsilon_v^p$  et la trace des contraintes  $I_1$ .

Si on fait décharger le matériau de façon élastique jusqu'à contrainte nulle, on retrouve une déformation résiduelle égale à la déformation plastique ; il faut par contre charger le matériau en compression pour obtenir un déformation totale nulle. Cette deuxième branche est aussi élastique, car le matériau de Drucker-Prager ne peut pas plastifier en état de compression hydrostatique. Dans ce dernier cas, la trace des contraintes, négative, est :

$$I_1^c = -3 K \varepsilon_v^p \quad (\text{éq 2.1-8})$$

## 2.1.4 Déformation supérieure à la déformation ultime

On trouve facilement toutes les quantités d'intérêt, car la trace de contraintes est connue a priori et égale à  $I_1^{ult}$ .

$$\varepsilon_v^p = \varepsilon_v - \frac{I_1^{ult}}{3K}$$

$$p = \frac{\varepsilon_v^p}{3\alpha}$$

## 2.2 Grandeurs et résultats de référence

Le module de compressibilité  $K$  est :

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = 2000 \text{ MPa}$$

### 2.2.1 Déformation à la limite élastique

Pour les deux modélisations on trouve facilement :

$$I_1^{el} = 30 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_v^{el} = 0,005$$

### 2.2.2 Déformation ultime

Pour les deux modélisations on trouve :

$$I_1^{ult} = 50 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_v^{pult} = 0,024$$

$$\varepsilon_v^{ult} \approx 0,03233$$

### 2.2.3 Déformation égale à 0,018 et décharge à déformation nulle

Cette valeur de déformation  $\varepsilon_{v1} = 0,018$  est supérieure à la limite élastique  $\varepsilon_v^{el}$  et inférieure à  $\varepsilon_v^{ult}$ .  
On calcule d'abord la déformation plastique cumulée avec les équations (2.1-7) et (2.1-8), puis la déformation plastique et la trace des contraintes :

- écrouissage linéaire :

$$p_1 = \frac{3K A \varepsilon_{v1} - \sigma_Y}{9K \alpha^2 + h} \approx 0,019$$

$$\varepsilon_{v1}^p = 3\alpha p_1 = 0,0114$$

$$I_1^1 = 3K(\varepsilon_{v1} - \varepsilon_{v1}^p) \approx 39,51 \text{ MPa}$$

- écrouissage parabolique :

$$p_1 \approx 0,0192$$

$$\varepsilon_{v1}^p = 3\alpha p_1 \approx 0,0115$$

$$I_1^1 = 3K(\varepsilon_{v1} - \varepsilon_{v1}^p) \approx 38,956 \text{ MPa}$$

La trace des contraintes à déformation nulle est :

- écrouissage linéaire :

$$I_1^{1c} = -3K \varepsilon_{v1}^p \approx -68,49 \text{ MPa}$$

- écrouissage parabolique :

$$I_1^{1c} = -3K \varepsilon_{v1}^p \approx -69,044 \text{ MPa}$$

En effet, la différence entre le cas parabolique et linéaire est très faible.

### 2.2.4 Chargement jusqu'à déformation égale à 0,045 et 0,06

On recharge le matériau jusqu'aux valeurs de déformation  $\varepsilon_{v2}=0,045$  et  $\varepsilon_{v3}=0,06$ , supérieures à  $\varepsilon_v^{ult}$ .

Les résultats sont les mêmes pour les deux modélisations.

Pour  $\varepsilon_{v2}=0,045$  :

$$\varepsilon_{v2}^p = \varepsilon_{v2} - \frac{I_1^{ult}}{3K} \approx 0,03667$$

$$p_2 = \frac{\varepsilon_{v2}^p}{3\alpha} \approx 0,0611$$

Suite à la décharge élastique (jusqu'à contrainte nulle), on retrouve  $\varepsilon_v = \varepsilon_{v2}^p$ ,  $p = p_2$ .

Pour  $\varepsilon_{v3}=0,06$  :

$$\varepsilon_{v3}^p = \varepsilon_{v3} - \frac{I_1^{ult}}{3K} \approx 0,051667$$

$$p_3 = \frac{\varepsilon_{v3}^p}{3\alpha} \approx 0,0861$$

## 2.2.5 Courbes contrainte-déformation

Dans les Figures (2.2.5-a) et (2.2.5-b) on représente la courbe  $(\varepsilon_v, I_1)$  pour l'érouissage linéaire et parabolique. En rouge sont les points testés par le cas-test.

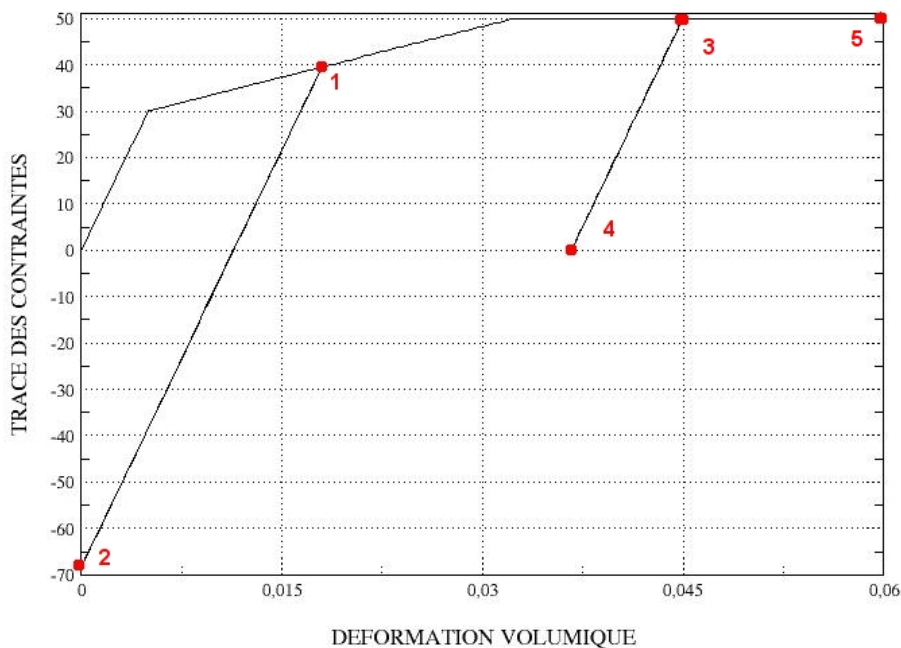


Figure 2.2.5-a: courbes contrainte-déformation pour érouissage linéaire.

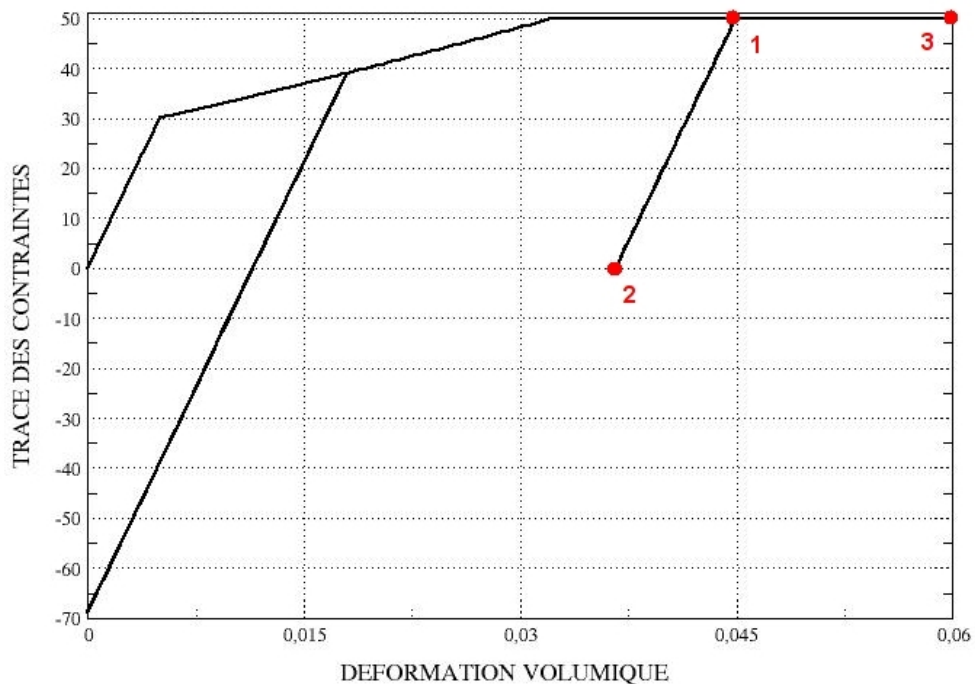


Figure 2.2.5-b: courbes contrainte-déformation pour écrouissage parabolique.

## 2.3 Incertitudes sur la solution

La solution est analytique.

## 2.4 Références bibliographiques

- [1] Document [R3.01.16], Intégration du comportement mécanique élasto-plastique de Drucker-Prager DRUCK\_PRAGER et post-traitements. Manuel de référence Code\_Aster.

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le test est effectué sur un point matériel avec la commande SIMU\_POINT\_MAT . On travaille à déformations imposées.  
L'écroutissage est linéaire.

### 3.2 Grandeurs et résultats de référence

Point sur la Figure 2.2.5-a	Quantité vérifiée	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (relatif)
1	Trace des contraintes	$I_1^1 = 39,51 \text{ MPa}$	ANALYTIQUE	$10^{-6} \%$
2	Trace des contraintes	$I_1^{1c} = -68,49 \text{ MPa}$	ANALYTIQUE	$10^{-6} \%$
3 ou 4	Partie sphérique de la déformation plastique	$\varepsilon_{v2}^p = 0,03667$	ANALYTIQUE	$10^{-6} \%$
3 ou 5	Trace de contraintes	$I_1^{ult} = 50 \text{ MPa}$	ANALYTIQUE	$10^{-6} \%$
5	Partie sphérique de la déformation plastique	$\varepsilon_{v3}^p = 0,051667$	ANALYTIQUE	$10^{-6} \%$



## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Le test est effectué sur un point matériel avec la commande `SIMU_POINT_MAT` . On travaille à déformations imposées.  
L'écroûissage est parabolique.

### 4.2 Grandeurs et résultats de référence

Point sur la Figure 2.2.5-b	Quantité vérifiée	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (relatif)
1 ou 2	Partie sphérique de la déformation plastique	$\varepsilon_{v2}^p = 0,03667$	ANALYTIQUE	$10^{-6}$ %
1 ou 3	Trace de contraintes	$I_1^{ult} = 50 \text{ MPa}$	ANALYTIQUE	$10^{-6}$ %
3	Partie sphérique de la déformation plastique	$\varepsilon_{v3}^p = 0,051667$	ANALYTIQUE	$10^{-6}$ %

## 5 Synthèse des résultats

---

Les résultats du cas-test sont satisfaisants, Code\_Aster reproduit les résultats analytiques avec une précision élevée.