

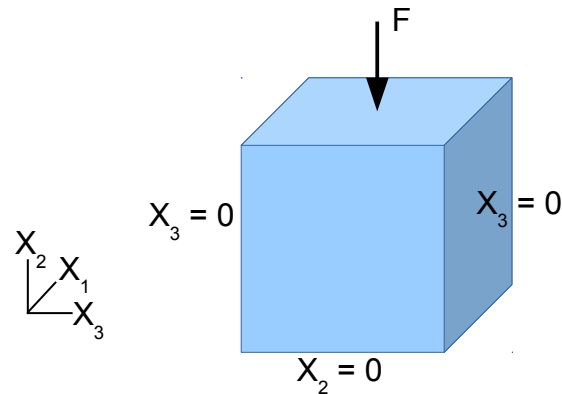
SSNV187 - Validation de la loi ELAS_HYPER sur un cube

Résumé :

Ce test permet de valider le comportement hyper-élastique de type Signorini (matériau ELAS_HYPER). On s'appuie sur un test élémentaire en déformations planes et en 3D, par rapport à une référence analytique.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



On considère un cube de côté 1m qui repose sur un plan ($x_2=0$ sur la face inférieure), soumis à une pression F sur la face supérieure et en situation de déformation plane suivant x_3 ($x_3=0$ sur les faces droite et gauche). Le cube ne peut donc que s'étirer suivant l'axe x_1 .

1.2 Propriétés des matériaux

On teste sur trois matériaux différents, correspondant à trois modèles courants en hyper-élasticité.

Comportement ELAS_HYPER	Mooney-Rivlin	Néo-Hookéen	Signorini
C10	0.709	1.2345	0.1234
C01	2.3456	0	1.2345
C20	0	0	0.456
NU	0.499	0.499	0.499

1.3 Conditions aux limites et chargements

- Face inférieure : $DY=0$
- Face supérieure : $F=0.876$ Pa
- Face gauche et droite : $DZ=0$ en 3D, rien en D_PLAN

Le chargement est croissant de $F=0$ à $F=0.876$ Pa, en 20 incréments.

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

On se repose sur le résultat de [bib1]. L'état de déformations planes permet d'écrire le champ de déplacement uniforme dans le cube très facilement :

$$\begin{cases} u_1 = a_1 \cdot x_1 \\ u_2 = w \cdot x_2 \\ u_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

avec w le déplacement vertical (négatif) de la face supérieure et a_1 une constante arbitraire. La condition d'incompressibilité permet d'écrire :

$$a_1 = \frac{-w}{1+w} \quad (2)$$

Et on trouve la relation entre la force appliquée F et le déplacement w de la face supérieure :

$$F = 2S \cdot \frac{w \cdot (2+w) \cdot (1+(1+w)^2)}{(1+w)^3} \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial J_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial J_2} \right) \quad (3)$$

S est la surface, Ψ est le potentiel de déformation et J_1 , J_2 sont les invariants du tenseur de Green-Lagrange. Le potentiel de déformation utilisé par ELAS_HYPER est le suivant :

$$\Psi = C_{10} \cdot (J_1 - 3) + C_{01} \cdot (J_2 - 3) + C_{20} \cdot (J_1 - 3)^2 + \Psi_{vol} \quad (4)$$

Ψ_{vol} est le potentiel correspondant à l'incompressibilité. Il dépend des invariants J_1 et J_2 et de C_{10} , C_{01} et C_{20} qui sont les caractéristiques matériaux. Comme de plus $S=1$ on obtient :

$$F = 2 \cdot \frac{w \cdot (2+w) \cdot (1+(1+w)^2)}{(1+w)^3} \cdot \left[C_{10} + C_{01} + 2 \cdot C_{20} \cdot \frac{w^2 \cdot (2+w)^2}{(1+w)^2} \right] \quad (5)$$

La résolution de cette équation non linéaire en w se fait simplement par dichotomie pour les $w < 0$.

3 Références bibliographiques

- [1] G. A. HOLZAPFEL: Nonlinear solid mechanics, 2001, Wiley.

4 Modélisation A

4.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation en 2D avec déformations planes D_PLAN , en utilisant des mailles linéaires.

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments linéaires : 228 $TRIA3$
Nombre de nœuds : 135

4.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-3,40091E-2	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{yy}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{yy}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{yy}	1,0	Non-régression

5 Modélisation B

5.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation en 2D avec déformations planes `D_PLAN`, en utilisant des mailles quadratiques.

5.2 Caractéristiques du maillage.

Nombre d'éléments linéaires : 228 `TRIA6`
Nombre de nœuds : 497

5.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-3,40091E-2	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

6 Modélisation C

6.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation 3D.

6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments : 1918 tétraèdres et 455 nœuds.

6.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-3,40091E-2	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,30%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

7 Modélisation D

7.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation 3D_SI (éléments TETRA10 sous-intégrés).

7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments : 1918 tétraèdres et 3055 nœuds.

7.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-3,40091E-2	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,30%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

8 Modélisation E

8.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation en 2D avec déformations planes `D_PLAN`, en utilisant des mailles linéaires. On utilise la loi de comportement Signorini de MFront avec le modèle `SIMO_MIEHE`.

8.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments linéaires : 228 `TRIA3`
Nombre de nœuds : 135

8.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-3,40091E-2	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{yy}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{yy}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{yy}	1,0	Non-régression

9 Modélisation F

9.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation en 2D avec déformations planes `D_PLAN`, en utilisant des mailles quadratiques. On utilise la loi de comportement Signorini de MFront avec le modèle `SIMO_MIEHE`.

9.2 Caractéristiques du maillage.

Nombre d'éléments linéaires : 228 `TRIA6`
Nombre de nœuds : 497

9.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-3,40091E-2	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

10 Modélisation G

10.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation 3D. On utilise la loi de comportement Signorini de MFront avec le modèle SIMO_MIEHE.

10.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments : 1918 tétraèdres et 455 nœuds.

10.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-3,40091E-2	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,3%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,2%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

11 Modélisation H

11.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation 3D_SI (éléments TETRA10 sous-intégrés). On utilise la loi de comportement Signorini de MFront avec le modèle SIMO_MIEHE.

11.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments : 1918 tétraèdres et 3055 nœuds.

11.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-3,40091E-2	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,30%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

12 Modélisation I

12.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation en 2D avec déformations planes `D_PLAN`, en utilisant des mailles linéaires. On utilise la loi de comportement Signorini de MFront avec le modèle `GROT_GDEP`.

12.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments linéaires : 228 `TRIA3`
Nombre de nœuds : 135

12.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-3,40091E-2	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{yy}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{yy}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{yy}	1,0	Non-régression

13 Modélisation J

13.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation en 2D avec déformations planes `D_PLAN`, en utilisant des mailles quadratiques. On utilise la loi de comportement Signorini de MFront avec le modèle `GROT_GDEP`.

13.2 Caractéristiques du maillage.

Nombre d'éléments linéaires : 228 `TRIA6`
Nombre de nœuds : 497

13.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-3,40091E-2	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

14 Modélisation K

14.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation 3D. On utilise la loi de comportement Signorini de MFront avec le modèle GROT_GDEP.

14.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments : 1918 tétraèdres et 455 nœuds.

14.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-3,40091E-2	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,3%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,2%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

15 Modélisation L

15.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation 3D_SI (éléments TETRA10 sous-intégrés). On utilise la loi de comportement Signorini de MFront avec le modèle GROT_GDEP.

15.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments : 1918 tétraèdres et 3055 nœuds.

15.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-3,40091E-2	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,30%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

16 Synthèse des résultats

Les résultats obtenus sont en bon accord avec la solution de référence. Les calculs sont plus précis en 3D quand on est en quadratique.