

## TPLV100 - Cylindre soumis à des conditions aux limites non axisymétriques

---

### Résumé :

Il s'agit d'un test en thermique stationnaire avec modélisation de Fourier.

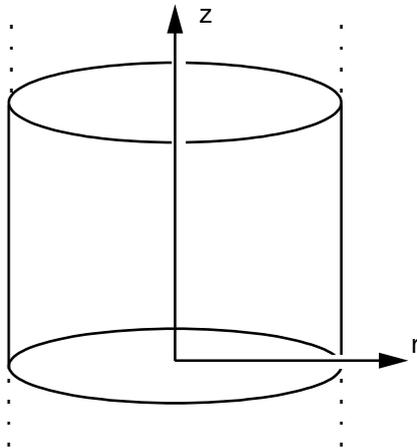
Ce test valide tous les éléments de Fourier en thermique (5 modélisations différentes) avec différents types de conditions aux limites : température imposée, échange, flux imposé, source de chaleur.

L'intérêt du test, outre la validation de la thermique Fourier, réside dans les points suivants :

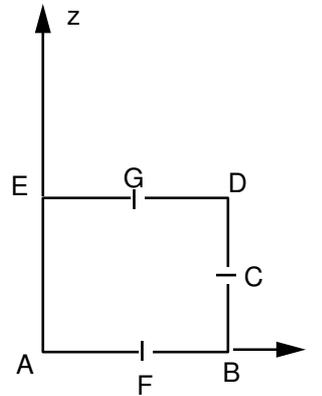
- comparaison des résultats avec une solution analytique sur différentes harmoniques de Fourier (1, 2 et 3),
- homogénéité des éléments entre eux.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



Rayon du cylindre  $R = 1 \text{ m}$ .



### 1.2 Propriétés de matériaux

$$\lambda = 1 \text{ W/m}^\circ\text{C}$$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

[EA] : température imposée	$T = T_0 = 0.^\circ\text{C}$
[BC] : flux imposé	$\phi = \phi_0 = 2. \text{ W/m}^2\text{ }^\circ\text{C}$
[CD] : échange	$h = 2. \text{ W/m}^2\text{ }^\circ\text{C}$
	$T_{ext} = 2.^\circ\text{C}$

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

$$T(r, z, \theta) = R^2 \cos l \theta$$

avec  $l$  numéro de l'harmonique de Fourier

$$-\Delta T = (l^2 - 4) \cos l \theta = S$$

$$\vec{\phi} = -(\lambda \nabla T) = \begin{cases} -2r \cos l \theta \\ 0 \\ + (lr \sin l \theta) \end{cases}$$

$$\text{sur } [AB] \text{ et } [ED] : \quad \phi_0 = \vec{\phi} \cdot \vec{n} = 0.$$

$$\text{sur } [BC] : \quad \phi_0 = 2R = 2.$$

$$\text{sur } [CD] : \quad \vec{\phi} \cdot \vec{n} = 2R = \frac{2}{R} (2R^2 - R^2) = h(T_{ext} - T)$$

$$\text{d'où } h = \frac{2}{R} = 2.$$

$$T_{ext} = 2R^2 = 2.$$

Seul le terme source varie suivant l'harmonique ( $S^l(r, z) = l^2 - 4$ )

Dans les modélisations suivantes, on résoudra le problème sur les harmoniques 1, 2 et 3.

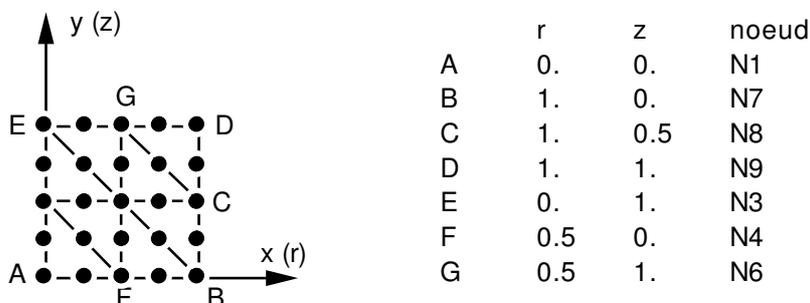
### 2.2 Résultats de référence

Températures et flux aux points  $B, C, D, F, G$ .

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

#### AXIS-FOURIER (TRIA6)



Les axes de description du maillage sont  $x(r)$  et  $y(z)$ .

Mode - Fourier : 1  $T(A)=0$ .

$$S = -3. \quad \text{sur tout le domaine}$$

$$[BC] : \quad \phi = 2.$$

$$[CD] : \quad h = 2. \quad T_{ext} = 2.$$

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 25.

Nombre de mailles et types : 8 TRIA6

### 3.3 Remarques

Le numéro du mode de Fourier n'affectant pas le chargement, le mot clé `MODE_FOURIER` n'est pas nécessaire dans la commande `CALC_VECT_ELEM`.

L'utilisation de la commande `CREA_CHAMP / ASSE` n'est pas une recombinaison de Fourier mais une simple validation de ce mot clé.

### 3.4 Valeurs testées

	Identification	Référence
$\theta = 0$	$T(B)$	1.
	$T(F)$	0.25
	$\phi_r(B)$	-2
	$\phi_r(F)$	-1.
	$\phi_\theta(B)$	1.
	$\phi_\theta(F)$	0.5
	$\phi_z(B)$	0.
	$\phi_z(F)$	0.
$\theta = 45$	$T(B)$	0.7071
	$T(F)$	0.177
	$\phi_r(B)$	-1.414
	$\phi_r(F)$	-0.7071

	$\Phi_\theta(B)$	-0.707
	$\Phi_\theta(F)$	-0.3535
	$\Phi_z(B)$	0.
	$\Phi_z(F)$	0.
$\theta = 135$	$T(B)$	-0.707
	$T(F)$	-0.177
	$\Phi_r(B)$	1.414
	$\Phi_r(F)$	0.707
	$\Phi_\theta(B)$	-0.707
	$\Phi_\theta(F)$	-0.3535
	$\Phi_z(B)$	0.
	$\Phi_z(F)$	0.

## 3.5 Remarques

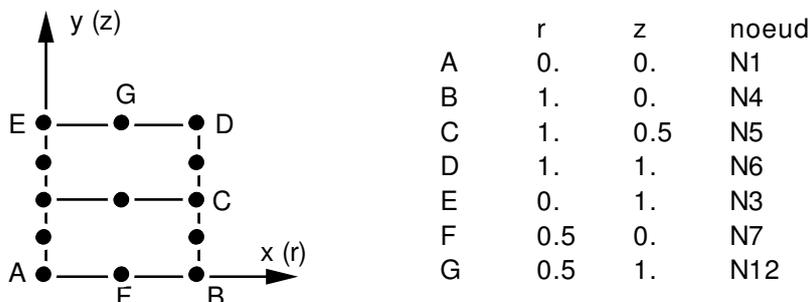
Les valeurs des flux aux nœuds sont moyennées sur les éléments contenant ce nœud.

On remarque que la solution exacte n'est pas trouvée. Ceci est du au fait que l'intégration numérique de la matrice de rigidité thermique est approchée (formule à 3 points de GAUSS). Si on utilisait une formule à 6 points, on trouverait la solution exactement.

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

AXIS\_FOURIER (QUAD8)



Les axes de description du maillage sont  $x(r)$  et  $y(z)$ .

Mode - Fourier : 2  $T(A)=0$ .

Pas de terme source car  $S^l(r, z)=0$ . pour  $l = 2$

$$\begin{aligned} [BC] : & \quad \phi = 2. \\ [CD] : & \quad h = 2. \quad T_{ext} = 2. \end{aligned}$$

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 13.

Nombre de mailles et types : 2 QUAD8

### 4.3 Remarques

Le numéro du mode de Fourier n'affectant pas le chargement, le mot clé `MODE_FOURIER` n'est pas nécessaire dans la commande `CALC_VECT_ELEM`.

### 4.4 Valeurs testées

Identification	Référence
$T(B)$	1.
$T(C)$	1.
$T(D)$	1.
$T(F)$	0.25
$T(G)$	0.25
$\phi_r(B)$	-2.
$\phi_r(C)$	-2.
$\phi_r(D)$	-2.
$\phi_r(F)$	-1.
$\phi_r(G)$	-1.
$\phi_\theta(B)$	2.

$\phi_{\theta}(C)$	2.
$\phi_{\theta}(D)$	2.
$\phi_{\theta}(F)$	1.
$\phi_{\theta}(G)$	1.
$\phi_z(B)$	0.
$\phi_z(C)$	0.
$\phi_z(D)$	0.
$\phi_z(F)$	0.
$\phi_z(G)$	0.

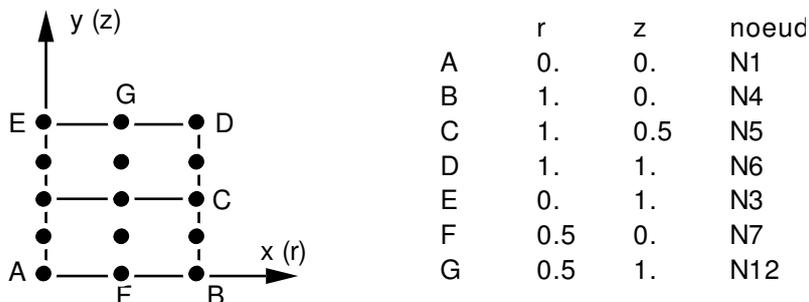
## 4.5 Remarques

La solution analytique est trouvée exactement.

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

AXIS\_FOURIER (QUAD9)



Les axes de description du maillage sont  $x(r)$  et  $y(z)$ .

Mode - Fourier : 3  $T(A)=0$ .

$S=5$ . sur tout le domaine  
 $[BC]$  :  $\phi=2$ .  
 $[CD]$  :  $h=2$ .  $T_{ext}=2$ .

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 15.  
Nombre de mailles et types : 2 QUAD9

### 5.3 Remarques

Le numéro du mode de Fourier n'affectant pas le chargement, le mot clé `MODE_FOURIER` n'est pas nécessaire dans la commande `CALC_VECT_ELEM`.

### 5.4 Valeurs testées

Identification	Référence
$T(B)$	1.
$T(C)$	1.
$T(D)$	1.
$T(F)$	0.25
$T(G)$	0.25
$\phi_r(B)$	-2.
$\phi_r(C)$	-2.
$\phi_r(D)$	-2.
$\phi_r(F)$	-1.
$\phi_r(G)$	-1.
$\phi_\theta(B)$	3.
$\phi_\theta(C)$	3.

$\phi_{\theta}(D)$	3.
$\phi_{\theta}(F)$	1.5
$\phi_{\theta}(G)$	1.5
$\phi_z(B)$	0.
$\phi_z(C)$	0.
$\phi_z(D)$	0.
$\phi_z(F)$	0.
$\phi_z(G)$	0.

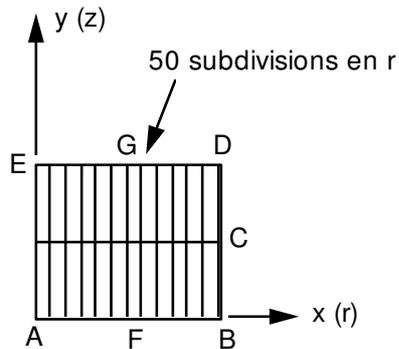
## 5.5 Remarques

La solution analytique est trouvée exactement.

## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation

AXIS\_FOURIER (QUAD4)



	r	z	nœud
A	0.	0.	N1
B	1.	0.	N151
C	1.	0.5	N152
D	1.	1.	N153
E	0.	1.	N3
F	0.5	0.	N76
G	0.5	1.	N78

Les axes de description du maillage sont  $x(r)$  et  $y(z)$ .

Mode - Fourier : 2  $T(A)=0.$

$S=0.$  sur tout le domaine

$[BC] :$   $\phi=2.$

$[CD] :$   $h=2. T_{ext}=2.$

### 6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 153

Nombre de mailles et types : 100 QUAD4

### 6.3 Remarques

Le numéro du mode de Fourier n'affectant pas le chargement, le mot clé `MODE_FOURIER` n'est pas nécessaire dans la commande `CALC_VECT_ELEM.`

### 6.4 Valeurs testées

Identification	Référence
$T(B)$	1.
$T(C)$	1.
$T(D)$	1.
$T(F)$	0.25
$T(G)$	0.25
$\phi_r(B)$	-2.
$\phi_r(C)$	-2.
$\phi_r(D)$	-2.
$\phi_r(F)$	-1.
$\phi_r(G)$	-1.
$\phi_\theta(B)$	2.

$\phi_\theta(C)$	2.
$\phi_\theta(D)$	2.
$\phi_\theta(F)$	1.
$\phi_\theta(G)$	1.
$\phi_z(B)$	0.
$\phi_z(C)$	0.
$\phi_z(D)$	0.
$\phi_z(F)$	0.
$\phi_z(G)$	0.

## 6.5 Remarques

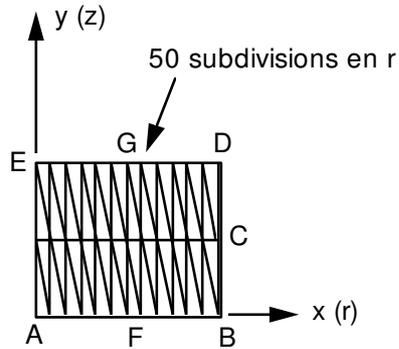
La mauvaise précision enregistrée sur  $\phi_r(B)$ ,  $\phi_r(C)$ ,  $\phi_r(D)$  s'explique par le fait que  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des nœuds du bord, donc les flux ne sont pas moyennés sur des éléments adjacents dans la direction du gradient de température (direction  $r$ ).

Ce phénomène ne se retrouve pas sur  $\phi_\theta$ , car  $\phi_\theta$  est pondéré par  $1/r$ .

## 7 Modélisation E

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation

AXIS\_FOURIER (TRIA3)



	r	z	nœud
A	0.	0.	N1
B	1.	0.	N151
C	1.	0.5	N152
D	1.	1.	N153
E	0.	1.	N3
F	0.5	0.	N76
G	0.5	1.	N78

Les axes de description du maillage sont  $x(r)$  et  $y(z)$ .

Mode - Fourier : 2  $T(A)=0$ .

$S=0$ . sur tout le domaine

$[BC]$  :  $\phi=2$ .

$[CD]$  :  $h=2$ .  $T_{ext}=2$ .

### 7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 153

Nombre de mailles et types : 200 TRIA3

### 7.3 Remarques

Le numéro du mode de Fourier n'affectant pas le chargement, le mot clé MODE\_FOURIER n'est pas nécessaire dans la commande CALC\_VECT\_ELEM.

### 7.4 Valeurs testées

Identification	Référence
$T(B)$	1.
$T(C)$	1.
$T(D)$	1.
$T(F)$	0.25
$T(G)$	0.25
$\phi_r(B)$	-2.
$\phi_r(C)$	-2.
$\phi_r(D)$	-2.
$\phi_r(F)$	-1.
$\phi_r(G)$	-1.
$\phi_\theta(B)$	2.

$\phi_\theta(C)$	2.
$\phi_\theta(D)$	2.
$\phi_\theta(F)$	1.
$\phi_\theta(G)$	1.
$\phi_z(B)$	0.
$\phi_z(C)$	0.
$\phi_z(D)$	0.
$\phi_z(F)$	0.
$\phi_z(G)$	0.

## 7.5 Remarques

La mauvaise précision enregistrée sur  $\phi_r(B)$ ,  $\phi_r(C)$ ,  $\phi_r(D)$  s'explique par le fait que  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des nœuds du bord, donc les flux ne sont pas moyennés sur des éléments adjacents dans la direction du gradient de température (direction  $r$ ).

Ce phénomène ne se retrouve pas sur  $\phi_\theta$ , car  $\phi_\theta$  est pondéré par  $1/r$ .

## 8 Synthèse des résultats

---

Ce problème est correctement résolu :

- quel que soit le numéro d'harmonique de Fourier,
- par les différents types d'éléments (degré 1 ou 2).