

## SSLV146 – Cube plein renforcé par des armatures sous chargement triaxial

---

### Résumé

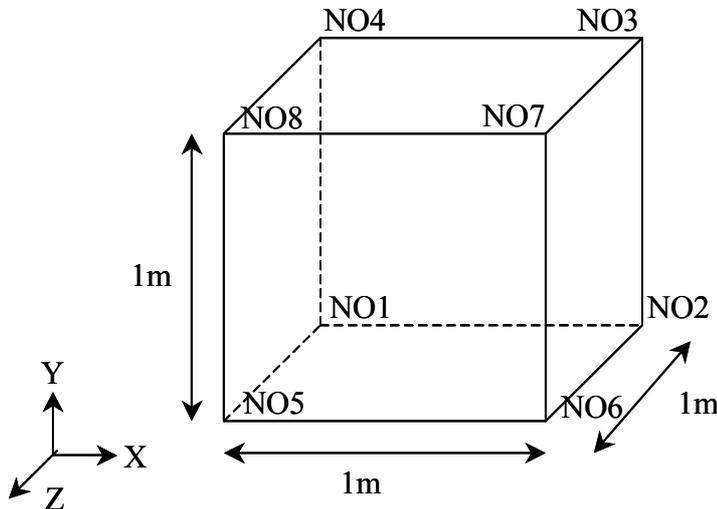
Ce test 3D entre dans le cadre de la validation de la formulation `GRILLE_MEMBRANE`. Il s'agit d'un cube plein de dimension unitaire. On place sur chaque face une nappe d'armatures d'acier de manière à balayer toutes les directions possibles. Le chargement consiste en des déplacements imposés sur tous les nœuds de la structure.

L'intérêt principal de ce test est de tester la modélisation `GRILLE_MEMBRANE` pour différentes orientations et pour différents éléments (linéaire et quadratique). Les résultats sont comparés à une solution analytique.

Les unités de toutes les valeurs numériques sont en SI.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



On définit six nappes d'armatures (une par côté du cube) :

- *GEOX* (2 nappes) : faces *NO1NO4NO8NO5* et *NO2NO6NO7NO3*
- *GEOY* (2 nappes) : faces *NO1NO2NO6NO5* et *NO4NO3NO7NO8*
- *GEOZ* (2 nappes) : faces *NO1NO2NO3NO4* et *NO5NO6NO7NO8*

### 1.2 Propriétés des matériaux

Pour le cube plein :

Modélisation	A	B	C	D
$E (Pa)$	2	2	2E14	2E14
$\nu$	0	0	0	0

Pour les nappes d'armatures (toute modélisation confondue)

$$E = 2E11 Pa, \nu = 0$$

- Nappe *GEOX* : section par mètre linéaire  $0.01 m^2/ml$ , excentrement 0, orientation (ANGL\_REP) (30;0)
- Nappe *GEOY* : section par mètre linéaire  $0.02 m^2/ml$ , excentrement 0, orientation (ANGL\_REP) (0;40)
- Nappe *GEOZ* : section par mètre linéaire  $0.03 m^2/ml$ , excentrement 0, orientation (ANGL\_REP) (15;70)

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$DX = 0 \text{ sur la face } NO2NO3NO7NO6$$

$$DY = 0 \text{ sur la face } NO1NO2NO6NO5$$

$$DZ = 0 \text{ sur la face } NO1NO2NO3NO4$$

Le chargement est appliqué en un incrément de la manière suivante (déplacements imposés) :

$DX = 1$  sur la face  $NO1NO4NO8NO5$   
 $DY = 2$  sur la face  $NO4NO3NO7NO8$   
 $DZ = 3$  sur la face  $NO5NO6NO7NO8$

## 2 Solution de référence

### 2.1 Solution formelle

On cherche à définir la déformation  $\varepsilon$  selon la direction principale d'une nappe d'armature située dans le plan  $(x_1; y_1)$ .

Compte tenu des conditions aux limites choisies, on peut écrire :

$$\varepsilon = u_{x_1} \cos^2(\theta) + u_{y_1} \sin^2(\theta)$$

avec  $(u_{x_1}, u_{y_1})$  les composantes du vecteur déplacement dans le plan  $(x_1; y_1)$  et  $\theta$  l'angle entre la direction principale de la nappe d'armature et  $x_1$ .

Pour définir la direction principale de la nappe, on utilise les angles nautiques  $(\alpha; \beta)$  donnés par le mot clé ANGL\_REP. Ils définissent un vecteur  $v$  dont la projection  $x_p$  sur le plan tangent de la nappe fixe la direction principale.

$$v = \cos(\alpha) \cos(\beta) \overset{1}{x} + \sin(\alpha) \cos(\beta) \overset{1}{y} + \sin(\beta) \overset{1}{z}$$

avec  $(x, y, z)$  le repère initial. Pour notre application, le vecteur déplacement  $U$  s'écrit :

$$v = 1 \overset{1}{x} + 2 \overset{1}{y} + 3 \overset{1}{z}$$

Pour la nappe  $GEOX$  (plan  $(y; z)$ ) :

$$x_p = \sin(30) \overset{1}{y}$$

La direction principale de la nappe est  $\overset{1}{y}$  ( $\theta = 90^\circ$ ). La déformation s'écrit alors :

$$\varepsilon = u_y = 2$$

Pour la nappe  $GEOY$  (plan  $(x; z)$ ) :

$$x_p = \cos(40) \overset{1}{x} + \sin(40) \overset{1}{z}$$

La direction principale de la nappe fait donc un angle de  $40^\circ$  avec le plan de la nappe. La déformation s'écrit alors :

$$\varepsilon = u_x \cos^2(40) + u_z \sin^2(40) = 1.82635$$

Pour la nappe  $GEOZ$  (plan  $(x; y)$ ) :

$$x_p = \cos(15) \cdot \cos(70) \overset{1}{x} + \sin(15) \cos(70) \overset{1}{y}$$

La direction principale de la nappe fait donc un angle de  $15^\circ$  avec le plan de la nappe. La déformation s'écrit alors :

$$\varepsilon = u_x \cos^2(15) + u_y \sin^2(15) = 1.067$$

Ces trois valeurs seront les valeurs de référence analytiques pour la validation des calculs.

## 3 Modélisations

En fonction des modélisations, les objets sont maillés avec des éléments différents :

**Modélisation A :** cube : 1 élément HEXA8 à 8 nœuds  
faces : 1 élément QUAD4 à 4 nœuds

**Modélisation B :** cube : 6 éléments TETRA4 à 4 nœuds  
faces : 2 éléments TRIA3 à 3 nœuds

**Modélisation C :** même modélisation qu'en A avec des éléments quadratiques

**Modélisation D :** même modélisation qu'en B avec des éléments quadratiques

### 3.1 Grandeurs testées et résultats de la modélisation A

La modélisation A est constituée d'un élément CUB8 pour le cube et d'un élément QUA4 pour chaque face. Le comportement est élastique (commandes MECA\_STATIQUE puis STAT\_NON\_LINE (vérification)).

On teste les valeurs données par EPSI\_ELGA ; EPSI\_ELNO, SIEF\_ELGA, SIEF\_ELNO, SIGM\_ELNO en différents points dans les directions principales des nappes d'armature, obtenues respectivement avec les commandes MECA\_STATIQUE et STAT\_NON\_LINE.

Pour MECA\_STATIQUE :

Points d'intégration	EPSI_ELGA (dans la direction principale de la nappe d'armature)			SIEF_ELGA (dans la direction principale de la nappe d'armature)		
	Code_Aster	Référence	Ecart (%)	Code_Aster	Référence	Ecart
MA1 – Point 1 (nappe GEOZ)	1.067	1.067	0.001	2.13397E11	2.13397E11	0
MA2 – Point 1 (nappe GEOZ)	1.067	1.067	0.001	2.13397E11	2.13397E11	0
MA3 – Point 1 (nappe GEOY)	1.8264	1.8263	0	3.6527E11	3.6527E11	0
MA4 – Point 1 (nappe GEOY)	1.8264	1.8263	0	3.6527E11	3.6527E11	0
MA5 – Point 1 (nappe GEOX)	2	2	0	4E11	4E11	0
MA6 – Point 1 (nappe GEOX)	2	2	0	4E11	4E11	0

Noeud	EPSI_ELNO (dans la direction principale de la nappe d'armature)			SIGM_ELNO (dans la direction principale de la nappe d'armature)		
	Code_Aster	Référence	Ecart (%)	Code_Aster	Référence	Ecart
NO1 (nappe GEOZ)	1.067	1.067	0.001	2.13397E11	2.13397E11	0
NO1 (nappe GEOY)	1.8264	1.8263	0	3.6527E11	3.6527E11	0
NO1 (nappe GEOX)	2	2	0	4E11	4E11	0

Pour STAT\_NON\_LINE

Points d'intégration	EPSI_ELGA (dans la direction principale de la nappe d'armature)			SIEF_ELGA (dans la direction principale de la nappe d'armature)		
	Code_Aster	Référence	Ecart (%)	Code_Aster	Référence	Ecart
MA1 – Point 1 (nappe GEOZ)	1.067	1.067	0.001	2.13397E11	2.13397E11	0
MA2 – Point 1 (nappe GEOZ)	1.067	1.067	0.001	2.13397E11	2.13397E11	0
MA3 – Point 1 (nappe GEOY)	1.8264	1.8263	0.003	3.6527E11	3.6527E11	0
MA4 – Point 1 (nappe GEOY)	1.8264	1.8263	0.003	3.6527E11	3.6527E11	0
MA5 – Point 1 (nappe GEOX)	2	2	0	4E11	4E11	0
MA6 – Point 1 (nappe GEOX)	2	2	0	4E11	4E11	0

Noeud	EPSI_ELNO (dans la direction principale de la nappe d'armature)			SIEF_ELNO (dans la direction principale de la nappe d'armature)		
	Code_Aster	Référence	Ecart (%)	Code_Aster	Référence	Ecart
MA1 - NO1 (nappe GEOZ)	1.067	1.067	0.001	2.13397E11	2.13397E11	0
MA2 - NO1 (nappe GEOY)	1.8264	1.8263	0.003	3.6527E11	3.6527E11	0
MA3 - NO1 (nappe GEOX)	2	2	0	4E11	4E11	0

La valeur de l'énergie potentielle totale est aussi testée à partir du calcul STAT\_NON\_LINE. La solution analytique est calculée à partir de toutes les déformations uniaxiales dans les grilles, à partir de l'équation :

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \int_{element} \varepsilon . A . \varepsilon dv$$

où  $A$  désigne le tenseur d'élasticité.

Les résultats obtenus sont les suivants :

	Code_Aster	Référence analytique	Ecart
Energie potentielle totale ( J )	2.8173E10	2.8173E10	0

## 3.2 Grandeurs testées et résultats de la modélisation B

La modélisation B est constituée de six éléments TETRA4 pour le cube et de deux éléments TRIA3 pour chaque face.

Le comportement est élastique en utilisant la commande MECA\_STATIQUE puis la commande STAT\_NON\_LINE (vérification).

On teste les valeurs données par EPSI\_ELGA ; EPSI\_ELNO, SIEF\_ELGA, SIEF\_ELNO ; SIEF\_ELGA ; SIGM\_ELNO en différents points dans les directions principales des nappes d'armature, obtenues respectivement avec les commandes MECA\_STATIQUE et STAT\_NON\_LINE.

Pour MECA\_STATIQUE :

Points d'intégration	EPSI_ELGA (dans la direction principale de la nappe d'armature)			SIEF_ELGA (dans la direction principale de la nappe d'armature)		
	Code_Aster	Référence	Ecart (%)	Code_Aster	Référence	Ecart
MA1 – Point 1 (nappe GEOZ)	1.067	1.067	0.001	2.13397E11	2.13397E11	0
MA2 – Point 1 (nappe GEOZ)	1.067	1.067	0.001	2.13397E11	2.13397E11	0
MA3 – Point 1 (nappe GEOZ)	1.8263	1.8263	0	3.6527E11	3.6527E11	0
MA4 – Point 1 (nappe GEOZ)	1.8263	1.8263	0	3.6527E11	3.6527E11	0
MA5 – Point 1 (nappe GEOX)	2	2	0	4E11	4E11	0
MA6 – Point 1 (nappe GEOX)	2	2	0	4E11	4E11	0
MA11 – Point 1 (nappe GEOZ)	1.067	1.067	0.001	2.13397E11	2.13397E11	0
MA21 – Point 1 (nappe GEOZ)	1.067	1.067	0.001	2.13397E11	2.13397E11	0
MA31 – Point 1 (nappe GEOY)	1.8263	1.8263	0	3.6527E11	3.6527E11	0
MA41 – Point 1 (nappe GEOY)	1.8263	1.8263	0	3.6527E11	3.6527E11	0
MA51 – Point 1 (nappe GEOX)	2	2	0	4E11	4E11	0
MA61 – Point 1 (nappe GEOX)	2	2	0	4E11	4E11	0

Noeud	EPSI_ELNO (dans la direction principale de la nappe d'armature)			SIGM_ELNO (dans la direction principale de la nappe d'armature)		
	Code_Aster	Référence	Ecart (%)	Code_Aster	Référence	Ecart
MA1 - NO1 (nappe GEOZ)	1.067	1.067	0.001	2.13397E11	2.13397E11	0
MA2 - NO1 (nappe GEOY)	1.8263	1.8263	0	3.6527E11	3.6527E11	0
MA3 - NO1 (nappe GEOX)	2	2	0	4E11	4E11	0
MA11 - NO1	1.067	1.067	0.001	2.13397E11	2.13397E11	0

(nappe GEOZ)						
MA21 - NO1 (nappe GEOY)	1.8263	1.8263	0	3.6527E11	3.6527E11	0
MA31 - NO1 (nappe GEOX)	2	2	0	4E11	4E11	0

Pour STAT\_NON\_LINE

Points d'intégration	EPSI_ELGA (dans la direction principale de la nappe d'armature)			SIEF_ELGA (dans la direction principale de la nappe d'armature)		
	Code_Aster	Référence	Ecart (%)	Code_Aster	Référence	Ecart
MA1 – Point 1 (nappe GEOZ)	1.067	1.067	0.001	2.13397E11	2.13397E11	0
MA2 – Point 1 (nappe GEOZ)	1.067	1.067	0.001	2.13397E11	2.13397E11	0
MA3 – Point 1 (nappe GEOY)	1.8263	1.8263	0	3.6527E11	3.6527E11	0
MA4 – Point 1 (nappe GEOY)	1.8263	1.8263	0	3.6527E11	3.6527E11	0
MA5 – Point 1 (nappe GEOX)	2	2	0	4E11	4E11	0
MA6 – Point 1 (nappe GEOX)	2	2	0	4E11	4E11	0
MA11 – Point 1 (nappe GEOZ)	1.067	1.067	0.001	2.13397E11	2.13397E11	0
MA21 – Point 1 (nappe GEOZ)	1.067	1.067	0.001	2.13397E11	2.13397E11	0
MA31 – Point 1 (nappe GEOY)	1.8263	1.8263	0	3.6527E11	3.6527E11	0
MA41 – Point 1 (nappe GEOY)	1.8263	1.8263	0	3.6527E11	3.6527E11	0
MA51 – Point 1 (nappe GEOX)	2	2	0	4E11	4E11	0
MA61 – Point 1 (nappe GEOX)	2	2	0	4E11	4E11	0

Noeud	EPSI_ELNO (dans la direction principale de la nappe d'armature)			SIEF_ELNO (dans la direction principale de la nappe d'armature)		
	Code_Aster	Référence	Ecart (%)	Code_Aster	Référence	Ecart
MA1 - NO1 (nappe GEOZ)	1.067	1.067	0.001	2.13397E11	2.13397E11	0
MA2 - NO1 (nappe GEOY)	1.8263	1.8263	0	3.6527E11	3.6527E11	0
MA3 - NO1 (nappe GEOX)	2	2	0	4E11	4E11	0
MA11 - NO1 (nappe GEOZ)	1.067	1.067	0.001	2.13397E11	2.13397E11	0
MA21 - NO1 (nappe GEOY)	1.8263	1.8263	0	3.6527E11	3.6527E11	0
MA31 - NO1 (nappe GEOX)	2	2	0	4E11	4E11	0

## 4 Résultats de la modélisation C

---

La modélisation C est identique à la modélisation A en utilisant des éléments quadratiques (commande `CREA_MALLAGE`, option `LINE_QUAD`).

On retrouve les mêmes résultats que pour la modélisation A (erreur par rapport à la solution de référence inférieure à 0.002 %).

## 5 Résultats de la modélisation D

---

La modélisation D est identique à la modélisation B en utilisant des éléments quadratiques.

On retrouve les mêmes résultats que pour la modélisation D (erreur par rapport à la solution de référence inférieure à 0.002 %).

## 6 Synthèse des résultats et remarques générales

---

Les résultats obtenus pour ces modélisations sont identiques aux solutions de référence. Ils valident la modélisation `GRILLE_MEMBRANE` pour quatre types d'éléments différents dans le cas d'un calcul mécanique linéaire (`MECA_STATIQUE` et `STAT_NON_LINE`).