

SSLV109 - Cylindre plein en pression non uniforme mode 1

Résumé :

Ce test valide tous les éléments de Fourier (triangles et quadrangles de degrés 1 et 2) en élasticité. Les fonctionnalités sont les suivantes :

- pression variable en espace,
- déplacements imposés,
- matrices de rigidité Fourier mode 1,
- contraintes aux nœuds Fourier mode 1,
- recombinaison de Fourier sur les déplacements et contraintes (modélisation A),
- matériau isotrope transverse (modélisation F).

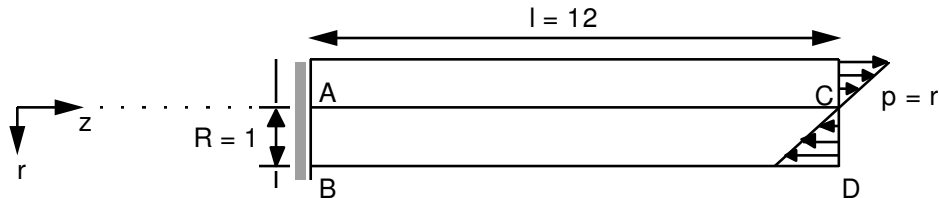
Le test a une solution analytique quadratique en déplacements.

L'intérêt du test réside dans :

- la comparaison entre solution calculée et solution analytique sur les différents éléments finis,
- la comparaison des résultats avec le Code PERMAS sur les éléments TRIA6 (modélisation A).

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Le domaine modélisé est $ACDB$ (plan $\theta=0$).

1.2 Propriétés de matériaux

$$E = 72 \text{ N/m}^2$$

$$\nu = 0.3$$

1.3 Conditions aux limites et chargements

$$u_r(A) = u_z(A) = u_\theta(A) = 0$$

$$u_z(AB) = 0$$

$$p = \bar{p} \frac{r}{R} \cos \theta$$

avec $\bar{p} = 1$. et $R = 1$ appliqué en $z = 12$.

1.4 Conditions initiales

Sans objet pour l'analyse statique.

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

$$\begin{aligned}u_r(r, z, \theta) &= u(r, z) \cos \theta & \text{avec } u(r, z) &= \frac{M}{2EI} z^2 + \frac{v \bar{p}}{2ER} r^2 \\u_z(r, z, \theta) &= v(r, z) \cos \theta & \text{avec } v(r, z) &= -\frac{\bar{p}}{2EI} r z \\u_\theta(r, z, \theta) &= w(r, z) (-\sin \theta) & \text{avec } w(r, z) &= \frac{M}{2EI} z^2 - \frac{v \bar{p}}{2ER} r^2\end{aligned}$$

Toutes les contraintes sont nulles sauf $\sigma_{zz}(r, z) = -\frac{\bar{p}}{R} r$.

Les données ont été choisies de telle façon que $u(x) = u(0, l) = 1$.

Les déplacements s'écrivent donc ici :

$$u(r, z) = \frac{z^2}{144} + \frac{r^2}{480} ; \quad v(r, z) = -\frac{r z}{72} ; \quad w(r, z) = \frac{z^2}{144} - \frac{r^2}{480}$$

et :

$$\sigma_{zz}(r, z) = -r$$

2.2 Résultats de référence

$$\begin{aligned}u, v, w, \sigma_{zz} & \text{ en } \begin{aligned} & r = 0., 0.5, 1. \\ & z = 0., 6., 12. \end{aligned} \\u_r, u_z, u_\theta & \text{ en } \begin{aligned} & r = 0. \\ & z = 6. \\ & \theta = 45^\circ \end{aligned}\end{aligned}$$

2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

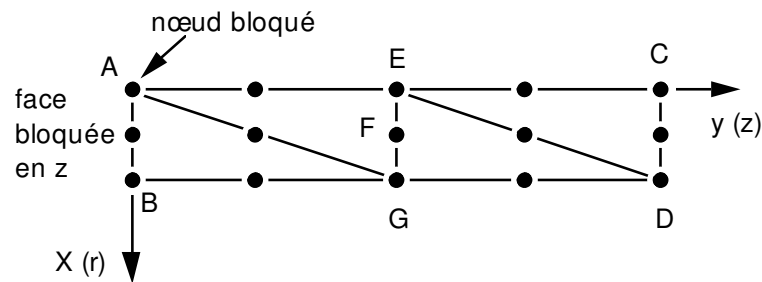
2.4 Références bibliographiques

- 1) PERMAS-HS. Axisymmetric Continua with arbitrary loads. Stuttgart 1985. INTES publication n°224 pp 42 - 49.

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des noeuds : $A = N1$ $B = N3$ $C = N13$
 $D = N15$ $E = N7$ $F = N8$ $G = N9$



Conditions limites :

DDL_IMPO : (NOEUD : A DX = 0. DY = 0. DZ = 0.)
face AB (GROUP_NO : AB DY = 0.)

Pression sur la face CD : PRES_REP (GROUP_MA : Bout PRES : p)

p étant défini par AFFE_CHAR_MECA_F par $p(X) = -X$

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de noeuds : 15

Nombre de mailles et types : 4 TRIA6, 1SEG3 sur segment CD

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées

Nœud	Grandeur	Référence
<i>B</i>	<i>u</i>	$2.0833 \cdot 10^{-3}$
	<i>v</i>	0.
	<i>w</i>	$-2.0833 \cdot 10^{-3}$
	σ_{zz}	-1.
<i>E</i>	<i>u</i>	0.25
	<i>v</i>	0.
	<i>w</i>	0.25
	σ_{zz}	0.
<i>F</i>	<i>u</i>	0.250521
	<i>v</i>	-0.04166
	<i>w</i>	0.0249479
	σ_{zz}	-0.5
<i>G</i>	<i>u</i>	0.252083
	<i>v</i>	-0.083333
	<i>w</i>	0.247917
	σ_{zz}	-1.
<i>C</i>	<i>u</i>	1.
	<i>v</i>	0.
	<i>w</i>	1.
	σ_{zz}	0.
<i>D</i>	<i>u</i>	1.00208
	<i>v</i>	-0.16666
	<i>w</i>	0.99791
	σ_{zz}	-1.

4.2 Remarques

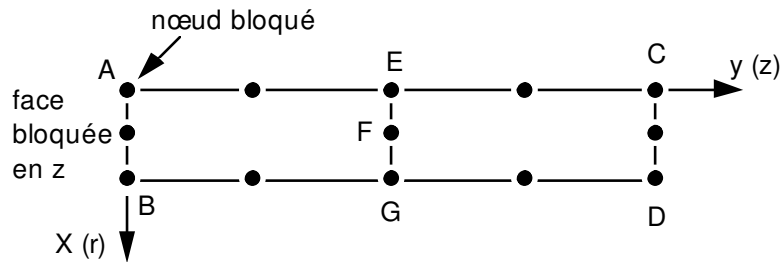
La solution analytique est trouvée avec une précision < 0.02 pour les déplacements et < 0.1 pour les contraintes.

Avec une formule d'intégration numérique à 6 points de GAUSS (au lieu de 3) pour calculer la raideur, on trouverait la relation à 10^{-10} près (comme PERMAS).

5 Modélisation B

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des nœuds : $A = N1$ $B = N3$ $C = N13$
 $D = N15$ $E = N7$ $F = N8$ $G = N9$



Conditions limites :

DDL_IMPO : (NOEUD : A DX = 0. DY = 0. DZ = 0.)
face AB (GROUP_NO : AB DY = 0.)

Pression sur la face CD : PRES_REP (GROUP_MA : Bout PRES : p)

p étant défini par AFFE_CHAR_MECA_F par $p(X) = -X$

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 15

Nombre de mailles et types : 2 QUAD8, 1 SEG3 sur segment CD

6 Résultats de la modélisation B

6.1 Valeurs testées

Nœud	Grandeur	Référence
<i>B</i>	<i>u</i>	$2.0833 \cdot 10^{-3}$
	<i>v</i>	0.
	<i>w</i>	$-2.0833 \cdot 10^{-3}$
	σ_{zz}	-1.
<i>E</i>	<i>u</i>	0.25
	<i>v</i>	0.
	<i>w</i>	0.25
	σ_{zz}	0.
<i>F</i>	<i>u</i>	0.250521
	<i>v</i>	-0.04166
	<i>w</i>	0.0249479
	σ_{zz}	-0.5
<i>G</i>	<i>u</i>	0.252083
	<i>v</i>	-0.08333
	<i>w</i>	0.247917
	σ_{zz}	-1.
<i>C</i>	<i>u</i>	1.
	<i>v</i>	0.
	<i>w</i>	1.
	σ_{zz}	0.
<i>D</i>	<i>u</i>	1.00208
	<i>v</i>	-0.16666
	<i>w</i>	0.99791
	σ_{zz}	-1.

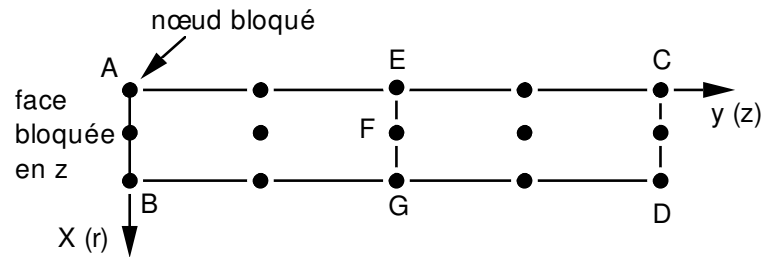
6.2 Remarques

La solution analytique est trouvée avec 10 ou 11 chiffres significatifs.

7 Modélisation C

7.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des nœuds : $A = N1$ $B = N3$ $C = N13$
 $D = N15$ $E = N7$ $F = N8$ $G = N9$



Conditions limites :

```
DDL_IMPO :      ( NOEUD : A              DX = 0.  DY = 0.  DZ = 0.)
face AB         ( GROUP_NO : AB          DY = 0.)
```

Pression sur la face CD : PRES_REP (GROUP_MA = Bout, PRES = p)

p étant défini par AFFE_CHAR_MECA_F par $p(x) = -x$

7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 15

Nombre de mailles et types : 2 QUAD9, 1 SEG3 sur segment CD

8 Résultats de la modélisation C

8.1 Valeurs testées

Nœud	Grandeur	Référence
<i>B</i>	<i>u</i>	$2.0833 \cdot 10^{-3}$
	<i>v</i>	0.
	<i>w</i>	$-2.0833 \cdot 10^{-3}$
	σ_{zz}	-1.
<i>E</i>	<i>u</i>	0.25
	<i>v</i>	0.
	<i>w</i>	0.25
	σ_{zz}	0.
<i>F</i>	<i>u</i>	0.250521
	<i>v</i>	-0.04166
	<i>w</i>	0.0249479
	σ_{zz}	-0.5
<i>G</i>	<i>u</i>	0.252083
	<i>v</i>	-0.08333
	<i>w</i>	0.247917
	σ_{zz}	-1.
<i>C</i>	<i>u</i>	1.
	<i>v</i>	0.
	<i>w</i>	1.
	σ_{zz}	0.
<i>D</i>	<i>u</i>	1.00208
	<i>v</i>	-0.16666
	<i>w</i>	0.99791
	σ_{zz}	-1.

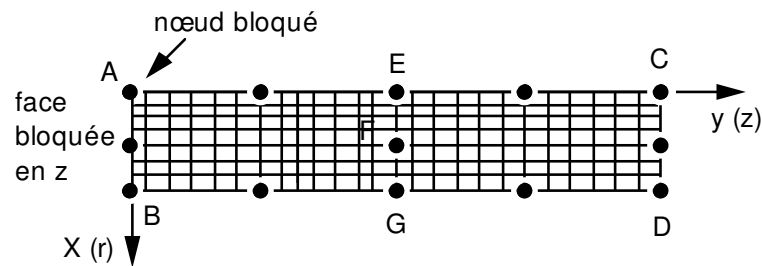
8.2 Remarques

La solution analytique est trouvée avec 10 ou 11 chiffres significatifs.

9 Modélisation D

9.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des nœuds : $A=N1$ $B=N1129$ $C=N1369$
 $D=N2169$ $E=N141$ $F=N705$ $G=N1269$



Conditions limites :

```
DDL_IMPO :      ( NOEUD : A                      DX = 0.  DY = 0.  DZ = 0.)
face AB         ( GROUP_NO : AB                    DY = 0.)
```

Pression sur la face CD : PRES_REP (GROUP_MA : Bout PRES : p)

p étant défini par AFFE_CHAR_MECA_F par $p(x) = -x$

9.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2169

Nombre de mailles et types : 1920 QUAD4, 8 SEG2 sur segment CD

10 Résultats de la modélisation D

10.1 Valeurs testées

Nœud	Grandeur	Référence
<i>B</i>	<i>u</i>	$2.0833 \cdot 10^{-3}$
	<i>v</i>	0.
	<i>w</i>	$-2.0833 \cdot 10^{-3}$
	σ_{zz}	-1.
<i>E</i>	<i>u</i>	0.25
	<i>v</i>	0.
	<i>w</i>	0.25
	σ_{zz}	0.
<i>F</i>	<i>u</i>	0.250521
	<i>v</i>	-0.04166
	<i>w</i>	0.0249479
	σ_{zz}	-0.5
<i>G</i>	<i>u</i>	0.252083
	<i>v</i>	-0.083333
	<i>w</i>	0.247917
	σ_{zz}	-1.
<i>C</i>	<i>u</i>	1.
	<i>v</i>	0.
	<i>w</i>	1.
	σ_{zz}	0.
<i>D</i>	<i>u</i>	1.00208
	<i>v</i>	-0.16666
	<i>w</i>	0.99791
	σ_{zz}	-1.

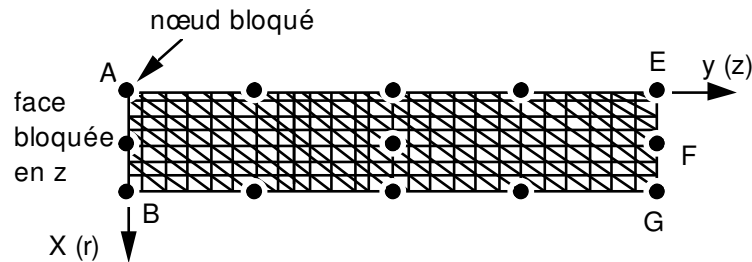
10.2 Remarques

Pour obtenir une précision de l'ordre de 1 % sur les contraintes, il est nécessaire de modéliser la structure très finement (8 éléments radialement et 240 axialement).

11 Modélisation E

11.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des nœuds : $A = N1$ $B = N2421$
 $E = N121$ $F = N1331$ $G = N2541$



Conditions limites :

DDL_IMPO : (NOEUD : A $DX = 0.$ $DY = 0.$ $DZ = 0.$)
face AB (GROUP_NO : AB $DY = 0.$)

Pression sur la face EG : PRES_REP (GROUP_MA : Bout PRES : p)

p étant défini par AFFE_CHAR_MECA_F par $p(x) = -x$

11.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2541

Nombre de mailles et types : 4800 TRIA3, 20 SEG2 sur segment EG

11.3 Remarques

Pour diminuer le nombre de nœuds, on a modélisé la structure pour $y \leq 6$.
La précision sur les résultats est néanmoins moindre que pour les éléments QUAD4.

12 Résultats de la modélisation E

12.1 Valeurs testées

Nœud	Grandeur	Référence
<i>B</i>	<i>u</i>	$2.0833 \cdot 10^{-3}$
	<i>v</i>	0.
	<i>w</i>	$-2.0833 \cdot 10^{-3}$
	σ_{zz}	-1.
<i>E</i>	<i>u</i>	0.25
	<i>v</i>	0.
	<i>w</i>	0.25
	σ_{zz}	0.
<i>F</i>	<i>u</i>	0.250521
	<i>v</i>	-0.04166
	<i>w</i>	0.249479
	σ_{zz}	-0.5
<i>G</i>	<i>u</i>	0.252083
	<i>v</i>	-0.083333
	<i>w</i>	0.247917
	σ_{zz}	-1.

12.2 Remarques

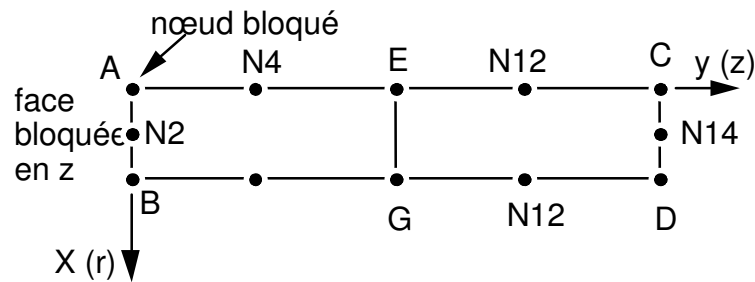
La précision sur les déplacements est inférieure à 3%, celle sur les contraintes inférieure à 2 %.

Sur cet exemple, les TRIA3 convergent nettement moins rapidement que les QUAD4 vers la solution exacte.

13 Modélisation F

13.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des nœuds : $A = N1$ $B = N3$ $C = N13$
 $D = N15$ $E = N7$ $G = N9$



Conditions limites :

DDL_IMPO : (NOEUD : A DX = 0. DY = 0. DZ = 0.)
face AB (GROUP_NO : AB DY = 0.)

Pression sur la face CD : PRES_REP (GROUP_MA : Bout PRES : p)

p étant défini par AFFE_CHAR_MECA_F par $p(X) = -X$

13.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 15

Nombre de mailles et types : 2 QUAD8, 1SEG3 sur segment CD

14 Résultats de la modélisation F

14.1 Valeurs testées

Nœud	Grandeur	Référence
N2	u	2.6041666
	w	-2.6041666
A	σ_{zz}	0.
B	σ_{zz}	-1.
N4	u	0.0625
	w	0.0625
E	u	0.25
	w	0.25
	σ_{zz}	0.
G	v	-0.083333
	σ_{zz}	-1.
N10	u	0.5625
	w	0.5625
N12	v	-0.125
C	u	1.
	w	1.
	σ_{zz}	0.
N14	v	-0.083333
D	v	-0.166666
	σ_{zz}	-1.

15 Synthèse des résultats

Les éléments d'ordre 2 donnent la solution analytique.

Les éléments d'ordre 1 convergent lentement vers la solution et nécessitent des maillages très fins.
Les temps calculs restent toutefois raisonnables.