

## SSLP320 - Propagation d'une fissure X-FEM débouchante sollicitée en Mode I

---

### Résumé

Ce test a pour but de valider le calcul des facteurs d'intensité de contrainte ( $K_I$  et  $K_{II}$ ) et le trajet de propagation de fissure avec X-FEM en 2D, dans le cadre de l'élasticité linéaire.

Ce test met en jeu une plaque rectangulaire avec une fissure débouchante, et soumise à un chargement de traction sur les bords inférieur et supérieur de la plaque.

Trois méthodes pour gérer la propagation d'une fissures X-FEM sont disponibles. Chacune d'entre elles fait l'objet d'une modélisation.

Trois modélisations sont considérées :

- modélisation A : méthode maillage,
- modélisation B : méthode simplexe,
- modélisation C : méthode upwind,
- modélisation D : méthode géométrique,

La pertinence des résultats est évaluée par comparaison des facteurs d'intensité des contraintes avec les valeurs analytiques.

On trouve un écart entre  $K_I$  et  $K_I$  théorique inférieur à 1,13 % pour la méthode maillage, 1,12 % pour la méthode simplexe, 1,13 % pour la méthode upwind, 1,1 % pour la méthode géométrique et 1,1 % pour la méthode upwind & FMM.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

La structure 2d est une plaque rectangulaire ( $LX=10\text{ m}$ ,  $LY=30\text{ m}$ ), comportant une fissure débouchante [Figure 1.1-a]. La longueur de la fissure initiale est  $a=5\text{ m}$ .

On appelle « ligne inférieure », la ligne en  $y=0$  et « ligne supérieure », la ligne en  $y=LY$ .

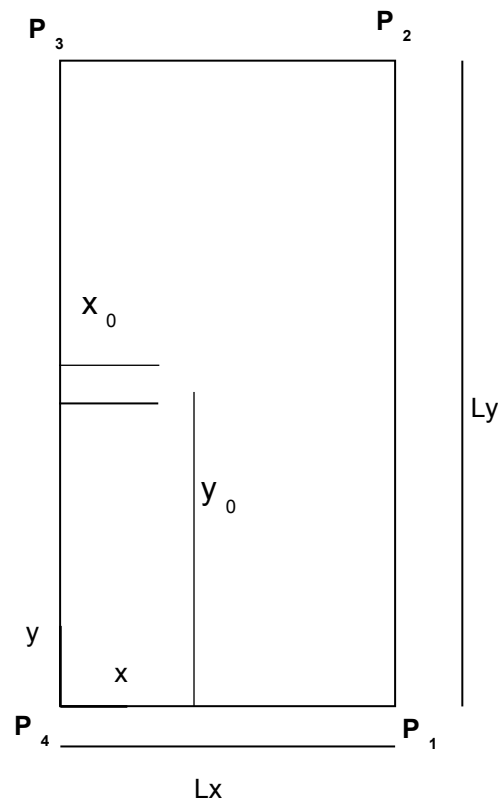


Figure 1.1-a : géométrie de la plaque fissurée

Les nœuds notés  $P1$  et  $P4$  sur la Figure 1.1-a servent à imposer les conditions aux limites, qui sont explicitées au paragraphe [§1.3].

### 1.2 Propriétés du matériau

Module d'Young :  $E=205\ 10^9\ Pa$   
Coefficient de Poisson :  $\nu=0$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Le chargement consiste à appliquer une force répartie sur les lignes inférieure et supérieure  $p=106\ Pa$  et dans le sens de la normale extérieure à la surface.

Afin de bloquer les modes rigides, on bloque les déplacements des nœuds  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  et  $P_4$  comme suit :

- $DY^{P4}=DY^{P1}=0$  ;

- $DX^{P4} = 0$ .

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul

Les expressions analytiques des facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  sont des fonctions de la force répartie  $p$ , de la longueur de la fissure  $a$ , de la largeur de la plaque  $Lx$  :

$$K_I = p \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{Lx}\right)$$

$$K_{II} = 0$$

où la fonction  $f$  peut être déterminée de plusieurs manières différentes. Nous choisissons celle obtenue par [1], et qui est vraie pour  $\frac{a}{Lx} < 0,6$  :

$$f\left(\frac{a}{Lx}\right) = 1,12 - 0,231\left(\frac{a}{Lx}\right) + 10,55\left(\frac{a}{Lx}\right)^2 - 21,72\left(\frac{a}{Lx}\right)^3 + 30,39\left(\frac{a}{Lx}\right)^4$$

On fait avancer la fissure grâce à la loi de Paris :

$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m$  où  $a$  est la longueur de fissure,  $C$  et  $m$  sont des constantes du matériau,  $\Delta K$  est la différence entre deux FICs consécutifs et  $N$  est le nombre de cycles.

Avec les valeurs numériques du test :

Pas de propagation : 0,25 m

$Lx$  : 10 m

### 2.2 Grandeurs et résultats de référence

Référence		
$a(m)$	$K_I (Pa.m^{0,5})$	$K_{II} (Pa.m^{0,5})$
2,5	4,205998 10 <sup>6</sup>	0
2,75	4,63286 10 <sup>6</sup>	0
3	5,09492 10 <sup>6</sup>	0
3,25	5,59908 10 <sup>6</sup>	0
3,5	6,15349 10 <sup>6</sup>	0
3,75	6,76776 10 <sup>6</sup>	0
4	7,4531 10 <sup>6</sup>	0
4,25	8,2224 10 <sup>6</sup>	0
4,5	9,0905 10 <sup>6</sup>	0
4,75	1,0074 10 <sup>7</sup>	0
5	1,1192 10 <sup>7</sup>	0
5,25	1,2465 10 <sup>7</sup>	0
5,5	1,3916 10 <sup>7</sup>	0
5,75	1,55716 10 <sup>7</sup>	0
6	1,74586 10 <sup>7</sup>	0

Tableau 2.2-1 : valeurs de référence pour  $K_I$  et  $K_{II}$

## 2.3 Incertitudes sur la solution

Aucune, solution analytique.

## 2.4 Références bibliographiques

- [1] TADA H., PARIS P., IRWIN G. :The stress analysis of cracks, Handbook. Del Research Corporation, Hellertown, Pennsylvania, 1973.

## 3 Modélisation A

---

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Dans cette modélisation, la méthode maillage est testée pour la propagation de fissure. Les level-sets sont déterminées par projection orthogonale sur les segments composant la fissure.

### 3.2 Caractéristiques du maillage

La structure est modélisée par un maillage « sain » régulier composé de  $40 \times 101$  QUAD4, respectivement suivant les axes  $x, y$ . La fissure est représentée par une succession de SEG2, indépendamment du maillage de la structure..

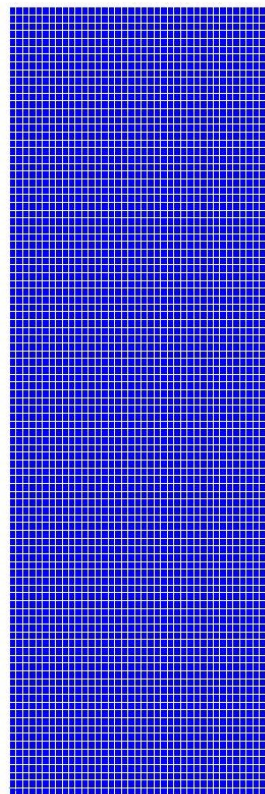


Figure 3.2-a : maillage de la plaque fissurée

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

Pour chaque pas de propagation ( $2,5 m$ ), on teste la valeur des facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  données par CALC\_G.

On teste également l'ordonnée du fond de fissure donnée par PROPA\_FISS.

### 3.3.1 Résultats sur $K_I$ :

Identification	Code_Aster	Référence	différence
CALC_G			
KI_1	4,17448 10 <sup>6</sup>	4,205998 10 <sup>6</sup>	-0,749 %
KI_2	4,60197 10 <sup>6</sup>	4,63286 10 <sup>6</sup>	-0,667 %
KI_3	5,0668 10 <sup>6</sup>	5,09492 10 <sup>6</sup>	-0,552 %
KI_4	5,575 10 <sup>6</sup>	5,59908 10 <sup>6</sup>	-0,43 %
KI_5	6,1334 10 <sup>6</sup>	6,15349 10 <sup>6</sup>	-0,326 %
KI_6	6,7499 10 <sup>6</sup>	6,76776 10 <sup>6</sup>	-0,264 %
KI_7	7,4338 10 <sup>6</sup>	7,4531 10 <sup>6</sup>	-0,259 %
KI_8	8,19599 10 <sup>6</sup>	8,2224 10 <sup>6</sup>	-0,322 %
KI_9	9,0497 10 <sup>6</sup>	9,0905 10 <sup>6</sup>	-0,449 %
KI_10	1,0011 10 <sup>7</sup>	1,0074 10 <sup>7</sup>	-0,627 %
KI_11	1,1099 10 <sup>7</sup>	1,1192 10 <sup>7</sup>	-0,828 %
KI_12	1,2339 10 <sup>7</sup>	1,2465 10 <sup>7</sup>	-1,011 %
KI_13	1,37603 10 <sup>7</sup>	1,3916 10 <sup>7</sup>	-1,121 %
KI_14	1,54018 10 <sup>7</sup>	1,55716 10 <sup>7</sup>	-1,09 %
KI_15	1,7313 10 <sup>7</sup>	1,74586 10 <sup>7</sup>	-0,834 %

### 3.3.2 Résultats sur $K_{II}$ :

Pour ce test, on souhaite que  $K_{II}$  soit inférieur à  $10^{-4} K_I$ . Ainsi, on s'assure que  $K_{II}$  est assez proche de zéro, la valeur de référence.

Identification	Code_Aster	Référence
CALC_G		
KII_1	-2,7313 10 <sup>2</sup>	0
KII_2	-8,5062 10 <sup>1</sup>	0
KII_3	-2,6061 10 <sup>2</sup>	0
KII_4	1,5995 10 <sup>2</sup>	0
KII_5	-2,7309 10 <sup>2</sup>	0
KII_6	-2,3176 10 <sup>2</sup>	0
KII_7	-3,1276 10 <sup>2</sup>	0
KII_8	3,1327 10 <sup>2</sup>	0
KII_9	-3,8393 10 <sup>2</sup>	0
KII_10	-4,1916 10 <sup>2</sup>	0
KII_11	-4,986 10 <sup>2</sup>	0
KII_12	-5,6998 10 <sup>2</sup>	0
KII_13	-6,7642 10 <sup>2</sup>	0
KII_14	-7,9542 10 <sup>2</sup>	0
KII_15	-9,5344 10 <sup>2</sup>	0

### 3.3.3 Résultats sur l'ordonnée du fond de fissure :

On vérifie que les coordonnées en ordonnée des fonds de fissure successifs sont proche de la valeur initiale. Cette vérification donne les mêmes indications que le test sur  $K_{II}$ .

Identification	Code_Aster	Référence	Différence
CALC_G			
y_1	15	15	0 %
y_2	15	15	2,18 10 <sup>-4</sup> %
y_3	15	15	2,8 10 <sup>-4</sup> %
y_4	15	15	4,51 10 <sup>-4</sup> %
y_5	15	15	5,47 10 <sup>-4</sup> %
y_6	15	15	6,95 10 <sup>-4</sup> %
y_7	15	15	8,1 10 <sup>-4</sup> %
y_8	15	15	9,5 10 <sup>-4</sup> %
y_9	15,0002	15	0,001 %
y_10	15,0002	15	0,001 %
y_11	15,0002	15	0,001 %
y_12	15,0002	15	0,002 %
y_13	15,0002	15	0,002 %
y_14	15,0003	15	0,002 %
y_15	15,0003	15	0,002 %

### 3.4 Résultats complémentaires

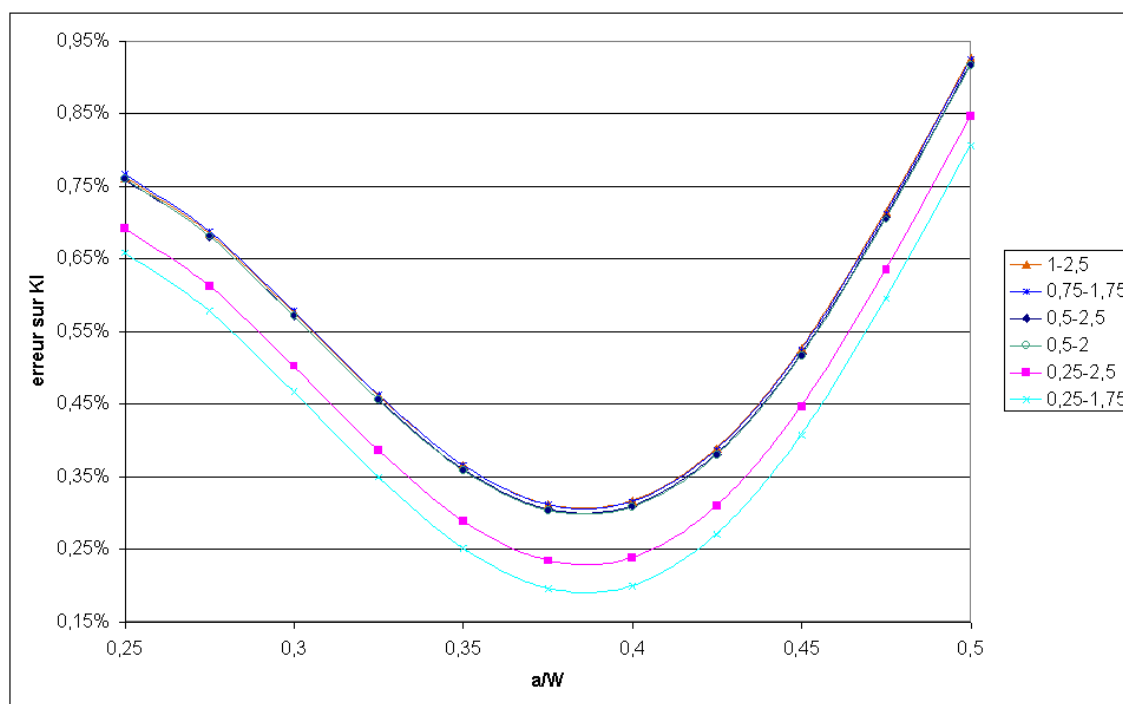


Figure 3.4-a : Influence du choix des couronnes RI et RS sur l'erreur sur KI



Nous pouvons voir ici que la configuration la plus adaptée pour le choix de  $RI$  et  $RS$  (couronnes inférieure et supérieure du champ  $\theta$ ) est :  $RI = 2 * L_0$  et  $RS = 7 * L_0$  où  $L_0$  est la plus petite arête du maillage.

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Dans cette modélisation, la méthode simplexe est testée pour la propagation de fissure. Les level-sets sont déterminées par résolution des équations de réactualisation.

### 4.2 Caractéristiques du maillage

On utilise ici le même maillage que dans la modélisation A.

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

Pour chaque pas de propagation, on teste la valeur des facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  données par CALC\_G.

#### 4.3.1 Résultats sur $K_I$ :

Identification	Code_Aster	Référence	différence
CALC_G			
KI_1	4,1749 10 <sup>6</sup>	4,205998 10 <sup>6</sup>	0,73 %
KI_2	4,6025 10 <sup>6</sup>	4,63286 10 <sup>6</sup>	0,65 %
KI_3	5,0675 10 <sup>6</sup>	5,09492 10 <sup>6</sup>	0,54 %
KI_4	5,5758 10 <sup>6</sup>	5,59908 10 <sup>6</sup>	0,41 %
KI_5	6,1344 10 <sup>6</sup>	6,15349 10 <sup>6</sup>	0,31 %
KI_6	6,7511 10 <sup>6</sup>	6,76776 10 <sup>6</sup>	0,24 %
KI_7	7,4352 10 <sup>6</sup>	7,4531 10 <sup>6</sup>	0,24 %
KI_8	8,1976 10 <sup>6</sup>	8,2224 10 <sup>6</sup>	0,30 %
KI_9	9,0516 10 <sup>6</sup>	9,0905 10 <sup>6</sup>	0,42 %
KI_10	1,0013 10 <sup>6</sup>	1,0074 10 <sup>7</sup>	0,60 %
KI_11	1,1101 10 <sup>6</sup>	1,1192 10 <sup>7</sup>	0,80 %
KI_12	1,2341 10 <sup>6</sup>	1,2465 10 <sup>7</sup>	0,98 %
KI_13	1,37608 10 <sup>6</sup>	1,3916 10 <sup>7</sup>	1,09 %
KI_14	1,5405 10 <sup>6</sup>	1,55716 10 <sup>7</sup>	1,06 %
KI_15	1,7317 10 <sup>6</sup>	1,74586 10 <sup>7</sup>	0,80 %

## 4.3.2 Résultats sur $K_{II}$ :

Identification	Code_Aster	Référence
CALC_G		
KII_1	-294.543283239	0
KII_2	140.53299141	0
KII_3	-92.1854404834	0
KII_4	31.5966858116	0
KII_5	-22.0812184567	0
KII_6	1.80888843609	0
KII_7	-14.6528361549	0
KII_8	-12.9336699382	0
KII_9	-21.8747247036	0
KII_10	-27.5009059699	0
KII_11	-36.8193114189	0
KII_12	-47.1435134216	0
KII_13	-60.5512354886	0
KII_14	-77.2532857738	0
KII_15	-98.7961435219	0

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Dans cette modélisation, la méthode upwind fast marching UPWIND est testée pour la propagation de fissure.

Les level-sets sont déterminées par résolution des équations de réactualisation par schéma aux différences finies.

### 5.2 Caractéristiques de la modélisation

On utilise ici le même maillage que dans la modélisation A (§2.1).

### 5.3 Grandeurs testées et résultats

Pour chaque pas de propagation, on teste la valeur des facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  données par CALC\_G.

#### 5.3.1 Résultats sur KI :

Identification	Code_Aster	Référence	différence
CALC_G			
KI_1	4,174911 10 <sup>6</sup>	4,205998 10 <sup>6</sup>	0,739 %
KI_2	4,602545 10 <sup>6</sup>	4,632857 10 <sup>6</sup>	0,654 %
KI_3	5,067525 10 <sup>6</sup>	5,094923 10 <sup>6</sup>	0,538 %
KI_4	5,575881 10 <sup>6</sup>	5,599079 10 <sup>6</sup>	0,414 %
KI_5	6,134452 10 <sup>6</sup>	6,153487 10 <sup>6</sup>	0,309 %
KI_6	6,751139 10 <sup>6</sup>	6,767759 10 <sup>6</sup>	0,24 %
KI_7	7,435204 10 <sup>6</sup>	7,453097 10 <sup>6</sup>	0,24 %
KI_8	8,197634 10 <sup>6</sup>	8,222429 10 <sup>6</sup>	0,302 %
KI_9	9,051616 10 <sup>6</sup>	9,090524 10 <sup>6</sup>	0,428 %
KI_10	1,0013134 10 <sup>7</sup>	1,0074102 10 <sup>7</sup>	0,605 %
KI_11	1,1101774 10 <sup>7</sup>	1,1191940 10 <sup>7</sup>	0,805 %
KI_12	1,2341792 10 <sup>7</sup>	1,2464967 10 <sup>7</sup>	0,99 %
KI_13	1,3763566 10 <sup>7</sup>	1,3916354 10 <sup>7</sup>	1,098 %
KI_14	1,5405615 10 <sup>7</sup>	1,5571606 10 <sup>7</sup>	1,065 %
KI_15	1,7317423 10 <sup>7</sup>	1,7458645 10 <sup>7</sup>	0,809 %

## 5.3.2 Résultats sur KII :

Identification	Code_Aster	Référence
CALC_G		
KII_1	-294.54	0
KII_2	-310.00	0
KII_3	-330.90	0
KII_4	-357.05	0
KII_5	-389.44	0
KII_6	-428.98	0
KII_7	-476.90	0
KII_8	-534.75	0
KII_9	-604.47	0
KII_10	-688,57	0
KII_11	-790,30	0
KII_12	-913.84	0
KII_13	-1064.72	0
KII_14	-1250.30	0
KII_15	-1480.53	0

## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation

Dans cette modélisation, la méthode géométrique est testée pour la propagation de fissure.

### 6.2 Caractéristiques de la modélisation

On utilise ici le même maillage que dans la modélisation A.

### 6.3 Grandeurs testées et résultats

Pour chaque pas de propagation, on teste la valeur des facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  données par CALC\_G.

#### 6.3.1 Résultats sur KI :

Identification	Code_Aster	Référence	différence
CALC_G			
KI_1	4,205998 10 <sup>6</sup>	4,205998 10 <sup>6</sup>	0,739 %
KI_2	4,602538 10 <sup>6</sup>	4,632857 10 <sup>6</sup>	0,654 %
KI_3	5,067526 10 <sup>6</sup>	5,094923 10 <sup>6</sup>	0,538 %
KI_4	5,575879 10 <sup>6</sup>	5,599079 10 <sup>6</sup>	0,414 %
KI_5	6,134453 10 <sup>6</sup>	6,153487 10 <sup>6</sup>	0,309 %
KI_6	6,751140 10 <sup>6</sup>	6,767759 10 <sup>6</sup>	0,246 %
KI_7	7,435205 10 <sup>6</sup>	7,453097 10 <sup>6</sup>	0,240%
KI_8	8,197636 10 <sup>6</sup>	8,222429 10 <sup>6</sup>	0,302 %
KI_9	9,051618 10 <sup>6</sup>	9,090524 10 <sup>6</sup>	0,428 %
KI_10	1,0013136 10 <sup>7</sup>	1,0074102 10 <sup>7</sup>	0,61%
KI_11	1,1101777 10 <sup>7</sup>	1,1191940 10 <sup>7</sup>	0,805%
KI_12	1,2341796 10 <sup>7</sup>	1,2464967 10 <sup>7</sup>	0,99 %
KI_13	1,3763571 10 <sup>7</sup>	1,3916354 10 <sup>7</sup>	1,098%
KI_14	1,5405621 10 <sup>7</sup>	1,5571606 10 <sup>7</sup>	1,065 %
KI_15	1,7317438 10 <sup>7</sup>	1,7458645 10 <sup>7</sup>	0,808 %

## 6.3.2 Résultats sur KII :

Identification	Code_Aster	Référence
CALC_G		
KII_1	-294.543283255	0
KII_2	140.53345257	0
KII_3	-92.1815420989	0
KII_4	31.588424802	0
KII_5	-22.0719386916	0
KII_6	1.80251453051	0
KII_7	-14.6478888153	0
KII_8	-12.9364628022	0
KII_9	-21.8732802716	0
KII_10	-27.5019633622	0
KII_11	-36.819305336	0
KII_12	-47.1442361154	0
KII_13	-60.5518993996	0
KII_14	-77.2544634291	0
KII_15	-98.7975849383	0

## 7 Synthèses des résultats

---

On peut comparer le temps de calcul pour le même nombre de pas de propagation (15) des trois méthodes.

<b>Maillage</b>	<b>Méthode</b>	<b>Temps ( s )</b>
40×101	Maillage	21.7
	Simplexe	18.8
	Upwind	23.7
	géométrique	21.2

Les résultats permettent de valider sur un cas simple le calcul des facteurs d'intensité de contraintes en mode *I* pour les éléments X-FEM pour les quatre méthodes maillage, simplexe, upwind et géométrique.