

## SSLP311 - Fissure centrale oblique dans une plaque rectangulaire finie, à deux matériaux, soumise à traction uniforme

---

### Résumé :

Ce test est issu de la validation indépendante de la version 3 en mécanique de la rupture.

Il s'agit d'un test bidimensionnel en statique avec bi-matériau en présence d'une fissure d'interface interne oblique.

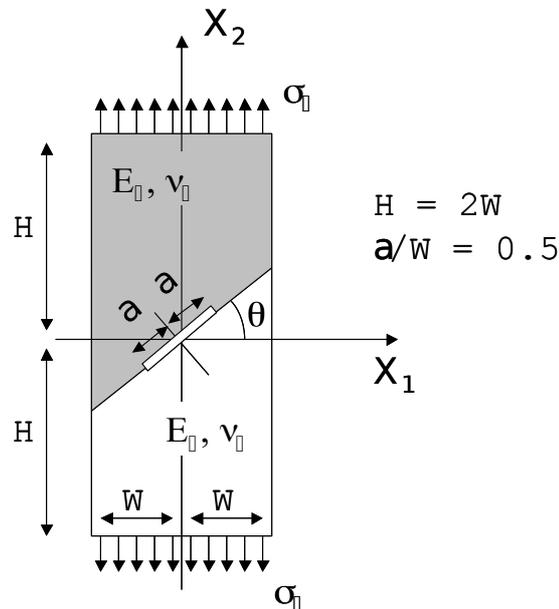
Le comportement de la structure (bi-matériau) est élastique linéaire isotrope.

Le cas test comprend quatre modélisations en contraintes planes dans lesquelles l'influence de l'inclinaison de la fissure  $\theta$  est étudiée (4 cas).

Le calcul des facteurs d'intensité des contraintes n'est pas disponible pour une fissure située à l'interface d'un bi-matériau ; la comparaison à la solution de référence se fait donc sur le taux de restitution de l'énergie uniquement, calculé avec l'opérateur `CALC_G`.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



On considère 4 valeurs de l'angle  $\theta$  :  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $60^\circ$ .  
 Les autres dimensions sont choisies telles que  $H = 2W = 4a$ .  
 La valeur de  $a$  vaut  $1.E-3 m$ .

### 1.2 Propriétés des matériaux

#### Matériau n° 1

Élastique, linéaire, isotrope, module d'Young  $E_1 = 2E + 12 Pa$  et coefficient de Poisson  $\nu_1 = 0,3$ .

#### Matériau n° 2

Élastique, linéaire, isotrope, module d'Young  $E_2 = 2E + 11 Pa$  et coefficient de Poisson  $\nu_2 = 0,3$ .

### 1.3 Conditions aux limites et chargement

- Les modes rigides sont bloqués par les conditions aux limites suivantes :

$$UX = UY = 0 \text{ au coin inférieur gauche du modèle.}$$

$$UY = 0 \text{ sur le bord inférieur.}$$

- Chargement : tension uniforme  $\sigma_{yy} = \sigma_0$  sur le bord supérieur.

La valeur de  $\sigma_0$  est  $100 MPa$ .

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Méthode des éléments de frontière, avec des éléments quadratiques [bib1].

Le calcul de  $K_I$  et  $K_{II}$  est effectué par une intégrale de contour (intégrale M [bib2]) dans laquelle interviennent les contraintes et déplacements calculés dans la pièce, ainsi que les contraintes et déplacements déduits de solutions asymptotiques définies analytiquement, dans lesquelles  $K_I$  et  $K_{II}$  sont alternativement nuls.

A titre de comparaison, le calcul des  $K$  est également effectué par la méthode d'extension virtuelle.

### 2.2 Résultats de référence

Les résultats de la solution de référence sont présentés dans le tableau ci-dessous, pour les différentes valeurs de l'angle et pour les deux extrémités de la fissure, avec

$$F_j = \frac{K_j}{\sigma_0 \sqrt{\pi a}} \quad (j = I, II).$$

Méthode		Côté gauche				Côté droit			
		$\theta=15^\circ$	$\theta=30^\circ$	$\theta=45^\circ$	$\theta=60^\circ$	$\theta=15^\circ$	$\theta=30^\circ$	$\theta=45^\circ$	$\theta=60^\circ$
intégrale	$F_I$	1,0115	0,7868	0,5211	0,2770	1,1266	0,9910	0,7646	0,4919
	$F_{II}$	0,4434	0,6244	0,6723	0,5804	0,0862	0,2961	0,4056	0,4057
extension virtuelle	$F_I$	1,0110	0,7864	0,5210	0,2769	1,1260	0,9904	0,7643	0,4919
	$F_{II}$	0,4429	0,6240	0,6720	0,5801	0,0865	0,2960	0,4055	0,4056

La relation entre le taux global de restitution de l'énergie  $G$  et les  $K_j$  s'écrit comme suit [bib3] :

$$G = \beta (K_I^2 + K_{II}^2)$$

avec :

$$\beta = \frac{1}{16 C h^2 (\alpha \pi)} \left( \frac{1 + \kappa_1}{\mu_1} + \frac{1 + \kappa_2}{\mu_2} \right) \text{ et } \kappa_i = \frac{3 - \nu_i}{1 + \nu_i}$$

$$\mu_i = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)}$$

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \ln \left[ \left( \frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \left( \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right)^{-1} \right]$$

### 2.3 Incertitude sur la solution

Estimée à moins de 0,1%. On note que l'écart entre la méthode des intégrales de contour et la méthode d'extension virtuelle est généralement inférieur à 0,05 %.

### 2.4 Références bibliographiques

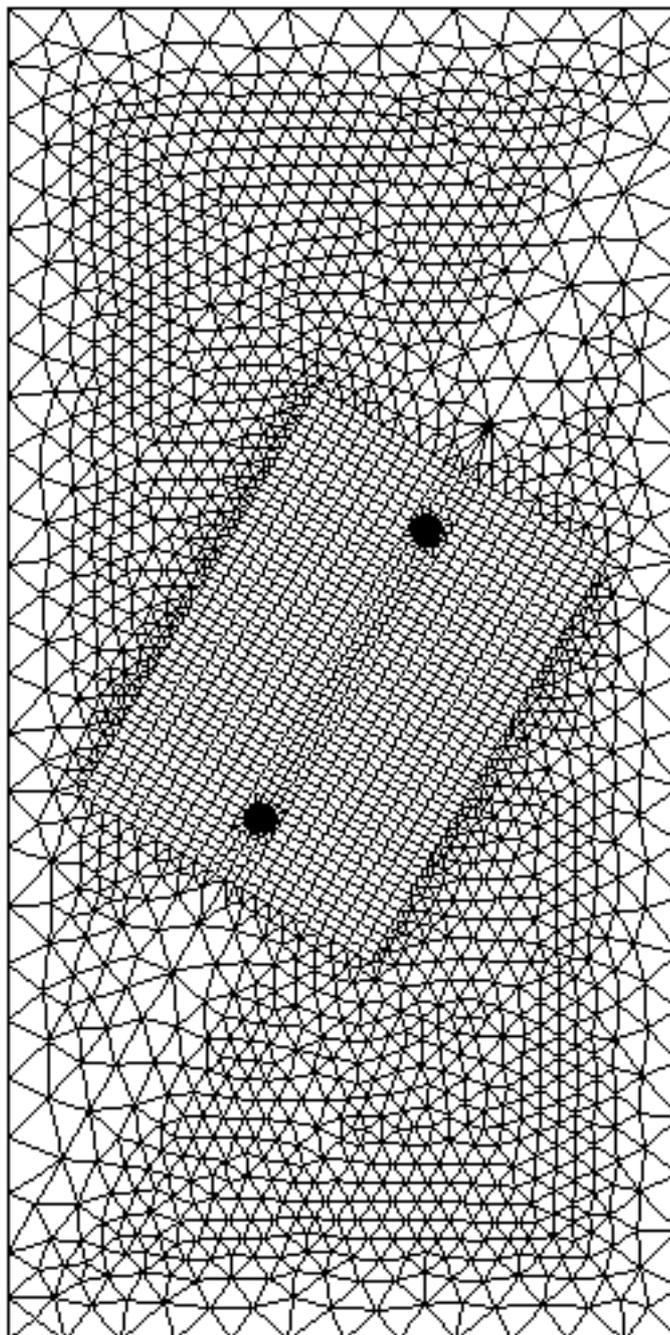
- 1) Stress intensity factor analysis of interface crack using boundary element method. Application of contour-integral method. N. MIYAZAKI, T. IKEDA, T.SODA et T. MUNAKATA. Engng.Fract.Mechs., 45, n°5, 599-610, 1993.
- 2) An analysis of interface cracks between dissimilar isotropic materials using conservation integrals in elasticity. J. F. YAU et T. C. CHANG. Engng.Fract.Mechs., 20, 423-432, 1984.

- 3) The strength of adhesive joints using the theory of cracks. B. M. MALYSHEV et R. L. SALGANIK. Int.J.Fract.Mech., 1, 114-128, 1965.

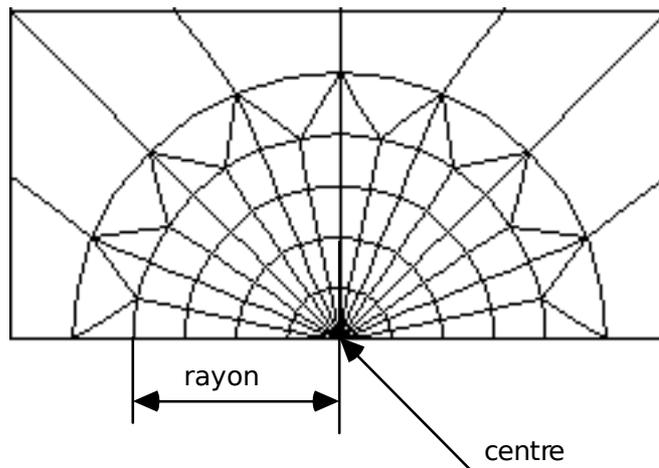
## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Les différentes modélisations sont identiques à part l'inclinaison de la fissure.



Maillage complet pour un angle  $\beta = 60^\circ$



**Zoom sur la pointe de fissure**

Le rayon vaut  $7.5E-5 m$ .

Il y a quatre couronnes définies par la commande `CALC_G` :

couronne 1 : $R_{inf} = 0$ .	$R_{sup} = 1.875E-5m$
couronne 2 : $R_{inf} = 1.875E-5m$	$R_{sup} = 3.750E-5m$
couronne 3 : $R_{inf} = 3.750E-5m$	$R_{sup} = 5.625E-5m$
couronne 4 : $R_{inf} = 5.625E-5m$	$R_{sup} = 7.500E-5m$

La direction de propagation est définie par :  $\cos \theta, \sin \theta$

## 3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 10676 nœuds et 4584 éléments, dont 1392 éléments QUA8 et 3168 éléments TRI6.

## 3.3 Fonctionnalités testées

Le calcul de  $K_I$  et  $K_{II}$  n'est pas valide pour un bimatérial : l'option `CALC_K_G` ne peut être utilisé et seul le calcul du taux de restitution de l'énergie est possible.

## 3.4 Grandeurs testées et résultats

### 3.4.1 Valeurs testées

Identification	Référence	Aster	% différence
Extrémité gauche, $\theta = 15^\circ$			
$G$ , couronne 1	9,67362E+1	9,2428E+1	4,45
$G$ , couronne 2	9,67362E+1	9,6392E+1	0,356
$G$ , couronne 3	9,67362E+1	9,6417E+1	0,330
$G$ , couronne 4	9,67362E+1	9,6421E+1	0,326
$K_I$	5,6694E+6	-	-
$K_{II}$	2,4852E+6	-	-
Extrémité droite, $\theta = 15^\circ$			

$G$ , couronne 1	1,0125E+2	9,6763E+1	4,33
$G$ , couronne 2	1,0125E+2	1,0093E+2	0,315
$G$ , couronne 3	1,0125E+2	1,0095E+2	0,295
$G$ , couronne 4	1,0125E+2	1,0095E+2	0,291
$K_I$	6,3145E+6	-	-
$K_{II}$	4,8309E+5	-	-

### 3.4.2 Remarques

Pour obtenir le  $G$  sur le fond de fissure, on calcule le taux de restitution d'énergie à l'aide de la relation entre  $G$  et les  $K_j$  [bib3] :

$$\kappa_1 = \kappa_2 = 2.076923$$

$$\mu_1 = 7.6923 E + 11$$

$$\mu_2 = 7.6923 E + 10$$

$$\alpha = -9.37742 E - 2$$

$$\beta = 2.524488 E - 12$$

$$G = \beta (K_I^2 + K_{II}^2)$$

## 4 Modélisation B

### 4.1 Valeurs testées

Identification	Référence	Aster	% différence
Extrémité gauche, $\theta = 30^\circ$			
$G$ , couronne 1	8,0017E+1	7,6431E+1	4,48
$G$ , couronne 2	8,0017E+1	7,9707E+1	0,387
$G$ , couronne 3	8,0017E+1	7,9730E+1	0,358
$G$ , couronne 4	8,0017E+1	7,9734E+1	0,353
$K_I$	4,4100E+6	-	-
$K_{II}$	3,499E+6	-	-
Extrémité droite, $\theta = 30^\circ$			
$G$ , couronne 1	8,48417E+1	8,1080E+1	4,433
$G$ , couronne 2	8,48417E+1	8,4583E+1	0,305
$G$ , couronne 3	8,48417E+1	8,4602E+1	0,282
$G$ , couronne 4	8,48417E+1	8,4602E+1	0,282
$K_I$	5,5545E+6	-	-
$K_{II}$	1,6596E+6	-	-

## 5 Modélisation C

### 5.1 Valeurs testées

Identification	Référence	Aster	% différence
Extrémité gauche, $\theta = 45^\circ$			
$G$ , couronne 1	5,73826E+1	5,48161E+1	4,473
$G$ , couronne 2	5,73826E+1	5,71687E+1	0,373
$G$ , couronne 3	5,73826E+1	5,71865E+1	0,342
$G$ , couronne 4	5,73826E+1	5,7189E+1	0,337
$K_I$	2,92076E+6	-	-
$K_{II}$	3,7682E+6	-	-
Extrémité droite, $\theta = 45^\circ$			
$G$ , couronne 1	5,94122E+1	5,7039E+1	3,994
$G$ , couronne 2	5,94122E+1	5,9505E+1	0,157
$G$ , couronne 3	5,94122E+1	5,9516E+1	0,175
$G$ , couronne 4	5,94122E+1	5,9518E+1	0,179
$K_I$	4,28557E+6	-	-
$K_{II}$	2,27338E+6	-	-

## 6 Modélisation D

### 6.1 Valeurs testées

Identification	Référence	Aster	% différence
Extrémité gauche, $\theta=60^\circ$			
$G$ , couronne 1	3,28015E+1	3,10680E+1	5,285
$G$ , couronne 2	3,28015E+1	3,24037E+1	1,213
$G$ , couronne 3	3,28015E+1	3,24140E+1	1,181
$G$ , couronne 4	3,28015E+1	3,24156E+1	1,177
$K_I$	1,55258E+6	-	-
$K_{II}$	3,2531E+6	-	-
Extrémité droite, $\theta=60^\circ$			
$G$ , couronne 1	3,22436E+1	3,11825E+1	3,291
$G$ , couronne 2	3,22436E+1	3,25321E+1	0,895
$G$ , couronne 3	3,22436E+1	3,25383E+1	0,914
$G$ , couronne 4	3,22436E+1	3,25398E+1	0,919
$K_I$	2,75709E+6	-	-
$K_{II}$	2,27394E+6	-	-

## 7 Synthèse des résultats

Le calcul de  $K_I$  et  $K_{II}$  n'est pas disponible pour une fissure située à l'interface d'un bimatériau, et la comparaison se fait donc directement sur le taux de restitution de l'énergie  $G$ .

Le calcul de  $G$  n'est pas précis sur la première couronne dans tous les cas d'inclinaison de la fissure, ce qui confirme qu'il faut éviter de prendre un rayon  $R_{inf}$  nul. En ce qui concerne les autres couronnes, les écarts sont de l'ordre de 0,4%. Pour le cas d'inclinaison  $\theta=60^\circ$  l'écart dépasse 1%. Dans l'ensemble, les résultats sont satisfaisants pour  $G$ .