SSLL403 - Flambement d'une poutre sous l'effet de son poids propre

Résumé :

Ce test permet de valider en élasticité linéaire le chargement dû aux forces de pesanteur pour une modélisation de type poutre droite d'Euler (`POU_D_E`). Il permet également la mise en œuvre et la validation du calcul de la matrice de rigidité géométrique.

La solution de référence est analytique et les résultats jugés satisfaisants.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

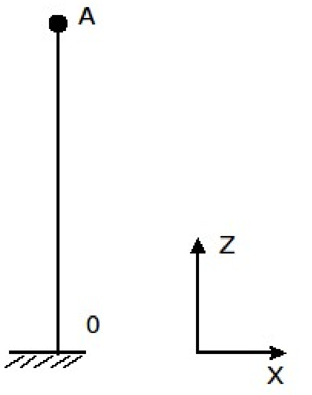

Figure 1.1-a : Poutre verticale.

Section rectangulaire : $H_y = 0.01\,m$, $H_z = 0.01\,m$
Longueur : $L = 1\,m$

1.2 Propriétés des matériaux

Module d'Young : $E = 2.10^{11}\,Pa$
Coefficient de Poisson : $\nu = 0{,}3$
Masse volumique : $\rho = 7800\,kg/m^3$

1.3 Conditions aux limites et chargement

Condition aux limites :
Extrémité encastrée (0) : $DX = DY = DZ = DRX = DRY = DRZ = 0$.

Chargement :
Force de pesanteur : p poids par unité de longueur avec $g = (0, 0, -9.81)$ (donné en repère global).

2 Solutions de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour les solutions de référence

En repère local, x suivant l'axe OA de la poutre, le moment fléchissant, à l'abscisse x, a pour expression :

$$M_{F_y}(x)=p\int_x^L [v(\xi)-v(x)]\,d\xi \, .$$

La flèche $v(x)$ satisfait donc l'équation :

$$E\ I_z=\frac{d^2 v}{dx^2}=p\int_x^L [v(\xi)-v(x)]\,d\xi=-p\left[\int_x^L v(\xi)\,d\xi+(L-x)\,v(x)\right]$$

En dérivant les deux membres, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{d^3 v}{dx^3}+\frac{p}{E\ I_z}(L-x)\frac{dv}{dx}=0$$

La fonction $v'(x)=\dfrac{dv}{dx}$ satisfait l'équation différentielle linéaire et homogène du second ordre :

$$\frac{d^{2v'}}{dx^2}+\frac{p}{E\ I_z}(L-x)\,v'=0 \, ,$$

qui peut être résolue à l'aide des fonctions de Bessel. On trouve alors la valeur du poids linéique critique égale à :

$$p_c=7{,}837\frac{E\ I_z}{L^3} \, .$$

La solution analytique donne numériquement :

$$p_c=7{,}837\ \ 2\ \ 10^{11}\cdot\frac{10^{-8}}{12}=1{,}3061667\ \ 10^3 \, .$$

2.2 Résultats de référence

La valeur critique du multiplicateur λ : $\lambda_c=\dfrac{P_c}{\rho S g}$

2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

2.4 Références bibliographiques

[1] Rapport n° 2314/A de l'Institut Aérotechnique « Proposition et réalisation de nouveaux cas tests manquant à la validation des poutres *Aster* »

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé de 10 éléments poutre droite d’Euler.

3.2 Caractéristiques du maillage

Il est constitué de 10 éléments `POU_D_E`.

3.3 Grandeurs testées et résultats

Valeur propre du système ($K+\lambda K_G$) $X=0$:

	Référence	Erreur
λ	170.701	0.01

3.4 Remarque

Puisque $p_c=\lambda\rho S g$, ($\rho S g$ représente la pré-contrainte linéique), nous avons comme chargement critique : $p_c=1300{,}84\,N.m^{-1}$.

4 Synthèse des résultats

Les résultats sont très proches de la solution analytique (écart : 1% pour 10 éléments). Cet écart est fonction de la finesse de discrétisation étant données les hypothèses utilisées pour la rigidité géométrique (cf. [R3.08.01]). Ceci valide donc ce type de chargement pour le flambement d'Euler.