SDLL146 -Validation des éléments « barres » en dynamique

Résumé :

L'objectif de ce test est de valider le calcul de la matrice de masse des éléments BARRE . On vérifie que cette matrice est bien tri-directionnelle contrairement à la matrice de rigidité (uni-directionnelle parallèlement à l'orientation de l'élément). Pour cela on fait les calculs suivants :

- Calcul des forces internes et des réactions d'appui d'un élément encastré soumis à un champ de pesanteur selon 3 directions (parallèles à X , Y et Z) .
- Projection de la matrice de masse sur une base composée de trois modes (parallèles à X , Y et Z).
- Calcul de l'énergie cinétique pour trois modes de vitesse (parallèles à X, Y et Z).

Remarque : tous les calculs sont faits avec la matrice de masse complète et avec la matrice de masse diagonale excepté pour le calcul de l'énergie cinétique qui est réalisé avec la matrice de masse complète.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

On considère une maille SEG2 de coté $1\,m$, orientée parallèlement à l'axe X .

1.2 Propriétés du matériau

Le matériau est élastique isotrope dont les propriétés sont :

$E=37\,000\,MPa$

$\nu=0.2$

$\rho=100\,kg/m^3$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Le nœud en O est encastré. En B , DY et DZ sont bloqués. Le chargement imposé est réalisé avec `CALC_CHAR_SEISME` et orienté selon X , puis Y et Z , il correspond à un champ de pesanteur selon X , puis Y et Z .

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

2.1.1 Rappels

La modélisation BARRE ne transmet ni effort tranchant ni moment fléchissant. De ce fait, si on note E le module d'Young de l'élément, A l'aire de sa section et L sa longueur, la matrice de rigidité élémentaire K^{elem} d'une barre est la suivante (avec les composantes dans l'ordre $(DX_1\,DY_1\,DZ_1\,DX_2\,DY_2\,DZ_2)$) :

$$K^{elem}=\begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le profil de la matrice de masse M^{elem} est différent de la matrice de rigidité car la masse doit être prise en compte dans toutes les directions de l'espace. Ainsi, si on note ρ la masse volumique de l'élément, la matrice de masse élémentaire, avec $m=\rho\,A\,L$, est la suivante :

$$M^{elem}=\begin{pmatrix} m/3 & 0 & 0 & m/6 & 0 & 0 \\ 0 & m/3 & 0 & 0 & m/6 & 0 \\ 0 & 0 & m/3 & 0 & 0 & m/6 \\ m/6 & 0 & 0 & m/3 & 0 & 0 \\ 0 & m/6 & 0 & 0 & m/3 & 0 \\ 0 & 0 & m/6 & 0 & 0 & m/3 \end{pmatrix}$$

2.1.2 Calcul des forces internes et des réactions d'appui

Soit m la masse de l'élément et U le déplacement, alors si on choisit un champ de pesanteur selon X , les forces externes en chaque nœud sont les suivantes : $(-m/2{,}0\,{,}0)$. Pour un comportement élastique de rigidité K , le seul déplacement non imposé U_{B_X} est égal à $\frac{F_{B_X}^{ext}}{K}=\frac{-m}{2\mathrm{K}}$.

Si on note K^{elem} la matrice de rigidité élémentaire, on a la relation $F^{int}=K^{elem}U$. On obtient les résultats suivants pour les forces internes : $F_{O_X}^{int}=\frac{m}{2}$, $F_{O_Y}^{int}=0$, $F_{O_Z}^{int}=0$, $F_{B_X}^{int}=\frac{-m}{2}$, $F_{B_Y}^{int}=0$ et $F_{B_Z}^{int}=0$.

En notant R^{ap} les réactions d'appui, on a la relation $R^{ap}=F^{int}-F^{ext}$. On a donc facilement : $R_{O_X}^{ap}=m$ et toutes les autres composantes nulles.

Remarque : pour les directions de chargement Y et Z , il n'y a pas de déplacement donc les forces internes sont nulles et les réactions d'appui sont égales aux forces externes.

2.1.3 Projection de la matrice de masse sur une base modale

Ce calcul a pour but de vérifier que pour un mode de déplacement unitaire ϕ selon une direction donnée, on a l'égalité :

$$\phi^T M \phi = m$$

2.1.4 Calcul de l'énergie cinétique

Ce calcul a pour but de vérifier que pour un mode de vitesse unitaire ϕ selon une direction donnée, on a l'égalité :

$$\frac{1}{2}\phi^T M \phi = \frac{mv}{2} \text{ avec } v=1$$

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation BARRE.

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage contient 1 élément de type SEG2.

3.3 Grandeurs testées et résultats

3.3.1 Réactions d'appui et forces internes aux deux nœuds de la maille.

Matrice complète pesanteur selon X :

Grandeur	Lieu	Composante	Type de référence	Valeur de référence (N)	Tolérance (%)
REAC_NODA	Nœud N001	DX	'ANALYTIQUE'	-100	1.0E-4
REAC_NODA	Nœud N002	DX	'ANALYTIQUE'	0	1.0E-4
FORC_NODA	Nœud N001	DX	'ANALYTIQUE'	-50	1.0E-4
FORC_NODA	Nœud N002	DX	'ANALYTIQUE'	-50	1.0E-4

Matrice complète pesanteur selon Y :

Grandeur	Lieu	Composante	Type de référence	Valeur de référence (N)	Tolérance (%)
REAC_NODA	Nœud N001	DY	'ANALYTIQUE'	-50	1.0E-4
REAC_NODA	Nœud N002	DY	'ANALYTIQUE'	-50	1.0E-4
FORC_NODA	Nœud N001	DY	'ANALYTIQUE'	0	1.0E-4
FORC_NODA	Nœud N002	DY	'ANALYTIQUE'	0	1.0E-4

Matrice complète pesanteur selon Z :

Grandeur	Lieu	Composante	Type de référence	Valeur de référence (N)	Tolérance (%)
REAC_NODA	Nœud N001	DZ	'ANALYTIQUE'	-50	1.0E-4
REAC_NODA	Nœud N002	DZ	'ANALYTIQUE'	-50	1.0E-4
FORC_NODA	Nœud N001	DZ	'ANALYTIQUE'	0	1.0E-4
FORC_NODA	Nœud N002	DZ	'ANALYTIQUE'	0	1.0E-4

Matrice diagonale pesanteur selon X :

Grandeur	Lieu	Composante	Type de référence	Valeur de référence (N)	Tolérance (%)
REAC_NODA	Nœud N001	DX	'ANALYTIQUE'	-100	1.0E-4
REAC_NODA	Nœud N002	DX	'ANALYTIQUE'	0	1.0E-4
FORC_NODA	Nœud N001	DX	'ANALYTIQUE'	-50	1.0E-4
FORC_NODA	Nœud N002	DX	'ANALYTIQUE'	-50	1.0E-4

Matrice diagonale pesanteur selon Y :

Grandeur	Lieu	Composante	Type de référence	Valeur de référence (N)	Tolérance (%)
REAC_NODA	Nœud N001	DY	'ANALYTIQUE'	-50	1.0E-4
REAC_NODA	Nœud N002	DY	'ANALYTIQUE'	-50	1.0E-4
FORC_NODA	Nœud N001	DY	'ANALYTIQUE'	0	1.0E-4
FORC_NODA	Nœud N002	DY	'ANALYTIQUE'	0	1.0E-4

Matrice diagonale pesanteur selon Z :

Grandeur	Lieu	Composante	Type de référence	Valeur de référence (N)	Tolérance (%)
REAC_NODA	Nœud N001	DZ	'ANALYTIQUE'	-50	1.0E-4
REAC_NODA	Nœud N002	DZ	'ANALYTIQUE'	-50	1.0E-4
FORC_NODA	Nœud N001	DZ	'ANALYTIQUE'	0	1.0E-4
FORC_NODA	Nœud N002	DZ	'ANALYTIQUE'	0	1.0E-4

3.3.2 Projection de la matrice de masse sur la base modale

Matrice complète

TABLE	Type de référence	Valeur de référence (kg)	Tolérance (%)
TABX	'ANALYTIQUE'	100.0	1.0E-4
TABY	'ANALYTIQUE'	100.0	1.0E-4
TABZ	'ANALYTIQUE'	100.0	1.0E-4

Matrice diagonale

TABLE	Type de référence	Valeur de référence (kg)	Tolérance (%)
TABX	'ANALYTIQUE'	100.0	1.0E-4
TABY	'ANALYTIQUE'	100.0	1.0E-4
TABZ	'ANALYTIQUE'	100.0	1.0E-4

3.3.3 Énergie cinétique

Matrice complète

TABLE	NOM_PARA	Type de référence	Valeur de référence (J)	Tolérance (%)
TABX	TOTALE	'ANALYTIQUE'	50.0	1.0E-4
TABY	TOTALE	'ANALYTIQUE'	50.0	1.0E-4
TABZ	TOTALE	'ANALYTIQUE'	50.0	1.0E-4

4 Synthèse des résultats

Les tests effectués dans cette documentation montrent que la masse de l'élément BARRE est appliquée dans les trois directions de l'espace.