

## SDLD325 - Réponse dynamique transitoire d'un système masse-ressort amorti à 2 degrés de liberté

---

### Résumé :

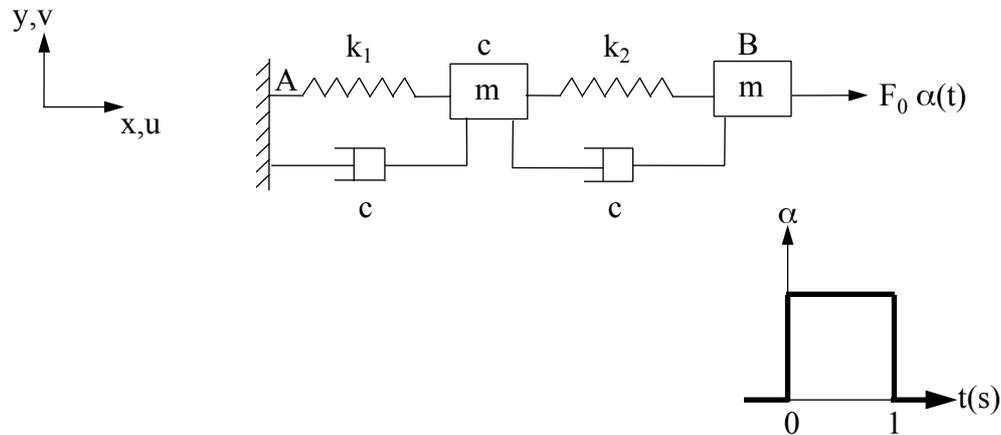
Ce problème consiste à analyser la réponse dynamique d'un système composé d'un ensemble de masses-ressorts-amortisseurs à 2 degrés de liberté dont les raideurs des ressorts sont très différentes sous excitation de type créneau en 1 degré de liberté.

Par l'intermédiaire de ce problème, on teste la sensibilité de schémas d'intégration sur l'espace physique ou l'espace modal vis-à-vis du rapport des rigidités.

Les résultats en déplacement et vitesse sont comparés à une moyenne de résultats provenant de codes industriels et d'une méthode d'intégration numérique de type Newmark amélioré.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



### 1.2 Propriétés de matériaux

Raideurs de liaison :  $k = 28.10^3 \text{ N.m}^{-1}$

2 cas :

- $k_1 = k/10$  ,  $k_2 = 10k$
- $k_1 = 10k$  ,  $k_2 = k/10$

Masse ponctuelle :  $m = 10 \text{ kg}$

Amortissement visqueux unidirectionnel :  $c = 50 \text{ kg.s}^{-1}$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Extrémité  $A$  encastrée.

Force appliquée à l'extrémité  $B$  :  $F(t) = F_0 \alpha(t)$  avec  $\begin{cases} \alpha(t) = 1 \text{ si } 0 \leq t \leq 1 \text{ s} \\ \alpha(t) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

et  $F_0 = 5 \text{ N}$ .

### 1.4 Conditions initiales

Le système est au repos à  $t=0$  :  $u(0) = 0$  et  $\frac{du}{dt}(0) = 0$

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La recherche de la réponse transitoire de ce problème à amortissement non proportionnel peut être menée par intégration numérique dans l'espace réel :

$$[M]\{\ddot{u}_n\} + [C]\{\dot{u}_n\} + [K]\{u_n\} = \{F\}$$

Pour cela, la réponse a été calculée avec deux codes industriels :

- PERMAS : Schéma d'intégration de Newmark ( $\alpha = 0,25$  et  $\delta = 0,5$ )  $\Delta t = 10^{-4s}$  ;
- ABAQUS : Schéma d'intégration de Hilbert-Hugues-Taylor [bib1] ( $\alpha = -0,05$ )  $\Delta t = 10^{-4s}$  ;

et la méthode d'intégration de  $\beta$ -Newmark améliorée [bib2] :

$$\left[ \frac{[M]}{\Delta t^2} + \frac{[C]}{2\Delta t} + \frac{[K]}{3} \right] \{u_{n+2}\} = \left[ \frac{\{F_{n+2}\} + \{F_{n+1}\} + \{F_n\}}{3} \right] + \left[ \frac{2[M]}{\Delta t^2} - \frac{[K]}{3} \right] \{u_{n+1}\} + \left[ \frac{[M]}{\Delta t^2} + \frac{[C]}{2\Delta t} - \frac{[K]}{3} \right] \{u_n\}$$

où  $n$ ,  $n+1$ ,  $n+2$  désignent respectivement les calculs effectués aux temps  $t_n$ ,  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  et  $t_{n+2} = t_n + 2\Delta t$  où  $\Delta t$  est l'incrément de temps retenu.

Pour démarrer, on prend :

- $u_0$  et  $u_{-1} = u_0 - \Delta t \dot{u}_0$
- $F_{-1} = 2F_0 - F_1$

Le pas de temps adopté est  $\Delta t = 10^{-5s}$ .

### 2.2 Résultats de référence

Déplacement et vitesse du point extrémité  $B$ .

### 2.3 Incertitude sur la solution

Moyenne de solutions numériques.

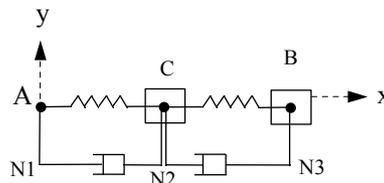
### 2.4 Références bibliographiques

- 1) H.M. HILBERT, T.J.R HUGUES and R.L. TAYLOR « Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics » Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.5, 1977, pp. 283-292
- 2) N.M. NEWMARK « A method of computation for structural dynamics » Proceeding ASCE J.Eng.Mech. DIV E-3, July 1959, pp. 67-94

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Eléments discrets de rigidité, amortissement et masse.



Caractéristiques des éléments :

DISCRET :	masse nodale	M_T_D_N
	rigidité linéaire	K_T_D_L ( $k_{N1N2} = k/10$ , $k_{N2N3} = 10k$ )
	amortissement linéaire	A_T_D_L

Conditions aux limites : au nœud  $N1$  **DDL\_IMPO**  $DX = DY = DZ = 0$  .

Noms des nœuds :  $A = N1$  ,  $C = N2$  ,  $B = N3$  .

Méthodes de calcul :

- Intégration sur l'espace physique avec Newmark ( $\alpha = 0,25$  ,  $\delta = 0,5$  )  
Pas de temps  $\Delta t = 10^{-3} s$
- Intégration sur la base modale complète avec Euler  
Pas de temps  $\Delta t = 10^{-3} s$  puis recombinaison modale
- Intégration sur la base modale complète avec  $\Delta t$  adaptatif d'ordre 2  
Pas de temps initial  $\Delta t = 10^{-3} s$  puis recombinaison modale
- Intégration sur la base modale complète avec  $\Delta t$  adaptatif par la méthode de type Runge-Kutta d'ordre (32). La tolérance d'erreur relative est de  $10^{-5}$  .
- Intégration sur la base modale complète avec  $\Delta t$  adaptatif par la méthode de type Runge-Kutta d'ordre (54). La tolérance d'erreur relative est de  $10^{-6}$  .

Durée d'observation : 3 s.

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 3

Nombre de mailles et type : 2 mailles SEG2

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

- Déplacement ( $m$ ) du point  $B$

Temps ( s )	Référence
0,27	3,0927 E-3
0,53	8,7953 E-4
0,80	2,4669 E-3
1,25	-1,0980 E-3
1,51	7,8754 E-4
1,78	-5,6508 E-4
2,05	4,0502 E-4
2,31	-2,9012 E-4
2,58	2,0831 E-4
2,85	-1,4943 E-4

- Vitesse (  $m.s^{-1}$  ) du point  $B$

Temps ( s )	Référence
0,11	1,8347 E-2
0,39	-1,3140 E-2
0,66	9,3509 E-3
0,93	-6,7080 E-3
1,11	-1,5863 E-2
1,37	1,1157 E-2
1,64	-7,9838 E-3
1,90	5,7108 E-3
2,17	-4,0998 E-3
2,44	2,9405 E-3
2,71	-2,1073 E-3
2,97	1,5105 E-3

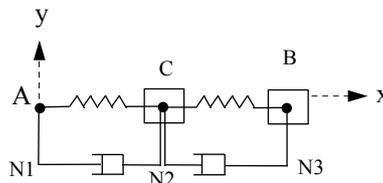
## 3.4 Remarques

Les résultats sont testés au niveau des pics respectifs de déplacement et de vitesse où les valeurs sont les plus significatives.

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Eléments discrets de rigidité, amortissement et masse.



Caractéristiques des éléments :

DISCRET : masse nodale  $M\_T\_D\_N$   
rigidité linéaire  $K\_T\_D\_L$  ( $k_{N1N2}=10k$ ,  $k_{N2N3}=k/10$ )  
amortissement linéaire  $A\_T\_D\_L$

Conditions aux limites : au noeud  $N1$  DDL\_IMPO  $DX=DY=DZ=0$ .

Noms des noeuds :  $A=N1$ ,  $C=N2$ ,  $B=N3$ .

Méthodes de calcul :

- Intégration sur l'espace physique avec Newmark ( $\alpha=0,25$ ,  $\delta=0,5$ )  
Pas de temps  $\Delta t=10^{-3} s$
- Intégration sur la base modale complète avec Euler  
Pas de temps  $\Delta t=10^{-3} s$  puis recombinaison modale
- Intégration sur la base modale complète avec  $\Delta t$  adaptatif d'ordre 2  
Pas de temps initial  $\Delta t=10^{-3} s$  puis recombinaison modale
- Intégration sur la base modale complète avec  $\Delta t$  adaptatif par la méthode de type Runge-Kutta d'ordre (32). La tolérance d'erreur relative est de  $10^{-5}$ .
- Intégration sur la base modale complète avec  $\Delta t$  adaptatif par la méthode de type Runge-Kutta d'ordre (54). La tolérance d'erreur relative est de  $10^{-6}$ .

Durée d'observation :  $2,5 s$ .

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 3

Nombre de mailles et type : 2 mailles SEG2

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

- Déplacement ( $m$ ) du point  $B$

Temps      Référence

( s )	
0,19	2,9334 E-3
0,38	1,0959 E-3
0,57	2,2468 E-3
0,76	1,5260 E-3
0,95	1,9773 E-3
1,19	-1,2107 E-3
1,38	7,5880 E-4
1,57	-4,7553 E-4
1,76	2,9796 E-4
1,95	-1,8668 E-4
2,14	1,1694 E-4
2,33	-7,3246 E-5

- Vitesse (  $m.s^{-1}$  ) du point  $B$

Temps	Référence
( s )	
0,09	2,4261 E-2
0,28	-1,5210 E-2
0,47	9,5332 E-3
0,66	-5,9745 E-3
0,85	3,7438 E-3
1,08	-2,6037 E-2
1,27	1,6302 E-2
1,46	-1,0204 E-2
1,66	6,3887 E-3
1,85	-4,0059 E-3
2,04	2,5114 E-3
2,23	-1,5743 E-3
2,42	9,8676 E-4

## 4.4 Remarques

Les résultats sont testés au niveau des pics respectifs de déplacement et de vitesse où les valeurs sont les plus significatives.

## 5 Synthèse des résultats

---

Pour les deux modélisations, les résultats sont précis avec une erreur inférieure à 1 %.

L'intégration sur base modale avec un schéma à pas adaptatif d'ordre 2 donne les meilleurs résultats pour un temps de calcul restreint.