

## Lois de comportement cohésives : CZM\_XXX\_XXX et pilotage du chargement

---

### Résumé :

Les lois de comportement cohésives :

- CZM\_EXP\_REG (Cohesive Zone Model EXPonentielle REGularisée)
- CZM\_LIN\_REG (Cohesive Zone Model LINéaire REGularisée)
- CZM\_OUV\_MIX (Cohesive Zone Model OUVerture basée sur une formulation MIXte)
- CZM\_EXP\_MIX (Cohesive Zone Model EXPonentielle basée sur une formulation MIXte)
- CZM\_TAC\_MIX (Cohesive Zone Model TALon-Curnier basée sur une formulation MIXte)
- CZM\_TRA\_MIX (Cohesive Zone Model TRApèze basée sur une formulation MIXte)
- CZM\_FAT\_MIX (Cohesive Zone Model FATigue basée sur une formulation MIXte)

permettent de modéliser l'ouverture d'une fissure en tenant compte d'une force de cohésion entre les lèvres de celle-ci. Une énergie de surface permet de prendre en compte le coût énergétique de l'ouverture de la fissure. Cette dernière est représentée par des éléments finis de joint pour les deux premières et d'interface pour les suivantes.

La loi de comportement CZM\_LAB\_MIX (Cohesive Zone Model Liaison Acier-Béton basée sur une formulation MIXte) permet par ailleurs de modéliser le glissement des armatures en acier par rapport au béton au sein d'une structure.

Nous présentons ici la forme de l'énergie et de la loi cohésive qui en dérive en fonction du saut de déplacement ainsi que les variables internes du modèle. L'existence d'instabilités lors de la propagation de fissures nécessite un pilotage par la prédiction élastique dont on présente les éléments spécifiques à ces lois.

## Table des Matières

1 Généralités sur les lois cohésives.....	3
2 Définition des lois cohésives CZM_xxx_REG.....	4
2.1 Energie de surface.....	4
2.1.1 Densité d'énergie de surface en régime linéaire.....	5
2.1.2 Densité d'énergie de surface en régime dissipatif.....	5
2.1.3 Densité d'énergie de surface de pénalisation.....	6
2.2 Vecteur contrainte.....	6
2.2.1 Vecteur contrainte en régime linéaire.....	7
2.2.2 Vecteur contrainte en régime dissipatif.....	7
2.2.3 Vecteur contrainte de pénalisation.....	8
2.3 Variables internes.....	8
3 Définition des lois cohésives CZM_xxx_MIX.....	9
3.1 Lois cohésives pour la rupture fragile CZM_OUV_MIX , CZM_TAC_MIX et CZM_EXP_MIX.....	10
3.1.1 Énergie de surface.....	10
3.1.2 Vecteur contrainte.....	11
3.2 Loi cohésive pour la rupture ductile CZM_TRA_MIX.....	14
3.2.1 Énergie de surface.....	14
3.2.2 Vecteur contrainte.....	16
3.3 Loi cohésive pour la fatigue CZM_FAT_MIX.....	20
3.3.1 Énergie de surface.....	20
3.3.2 Vecteur contrainte.....	20
3.4 Paramètres numériques PENA_LAGR et RIGI_GLIS.....	23
3.5 Variables internes.....	23
3.6 Loi cohésive pour une liaison acier-béton CZM_LAB_MIX.....	25
3.6.1 Énergie de surface.....	25
3.6.2 Vecteur contrainte.....	26
4 Pilotage du chargement par prédiction élastique.....	28
5 Mots clés.....	29
5.1 Lois CZM_xxx_REG.....	29
5.2 Lois CZM_xxx_MIX.....	29
6 Bibliographie.....	32
7 Description des versions du document.....	33

## 1 Généralités sur les lois cohésives

En rupture fragile, pour lever le problème de contraintes infinies en fond de fissure, on peut introduire des forces de cohésion qui imposent un critère d'amorçage en contrainte (voir (3)). Les forces s'exercent entre les particules de part et d'autre du plan de séparation de la fissure (voir figure 1). Historiquement, un des premiers à proposer ce type d'approche est Barenblatt (1 au début des années soixante. Basé sur cette idée, de nombreux modèles ont vu le jour dans la littérature sous l'appellation : « Modèles de zones cohésives » ou CZM en anglais. Pour une bibliographie on peut se reporter à (5).

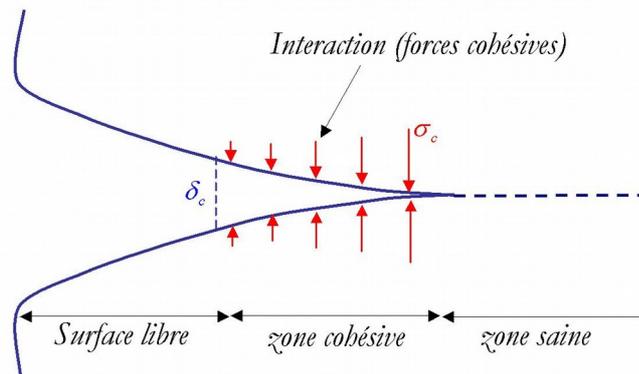


Figure 1 : Schéma d'une fissure.

On considère que l'ouverture de la fissure coûte une énergie proportionnelle à sa longueur. On l'appelle énergie de surface que l'on note  $\Psi$ . Le champ de déplacement à l'équilibre  $\mathbf{u}$  est obtenu en minimisant la somme de l'énergie élastique  $\Phi$  de l'énergie de surface, et du travail des efforts extérieurs  $W^{ext}$  :

$$\min_{\mathbf{u}} (\Phi + \Psi + W^{ext})$$

La surface de discontinuité est discrétisée en 2D ou 3D par des éléments finis de joint (voir documentation : R3.06.09) ou par des éléments finis d'interface (dans ce cas le problème se ramène à une recherche de point selle, voir R3.06.13). Le saut de déplacement dans l'élément  $\delta$  est une fonction linéaire des déplacements nodaux. La force<sup>1</sup> de cohésion qui s'exerce sur les lèvres de la fissure est notée  $\vec{\sigma}$ , elle est définie par la dérivée de la densité d'énergie de surface par rapport au saut de déplacement.

On appelle loi cohésive une relation entre  $\vec{\sigma}$  et le saut de déplacement  $\delta$ .

Les paramètres matériaux du modèle sont :

- la ténacité ou densité d'énergie de surface critique notée  $G_c$  (mot clé GC) qui traduit le coût énergétique de la fissuration ;
- et la contrainte critique à la rupture notée  $\sigma_c$  (mot clé SIGC). Dans les lois cohésives CZM\_XXX\_REG que l'on présente dans la partie suivante, ces paramètres peuvent dépendre d'un champ de température.

Par ailleurs, les lois CZM\_XXX\_REG dépendent de deux paramètres numériques adimensionnels : PENA\_ADHERENCE et PENA\_CONTACT. Le premier pilote la régularisation de l'énergie de surface (ou pénalisation de l'adhérence), le second la pénalisation du contact.

Les lois CZM\_XXX\_MIX dépendent également de deux paramètres numériques PENA\_LAGR et RIGI\_GLIS. Le premier est un coefficient de pénalisation du lagrangien et le second détermine la

<sup>1</sup> force par unité de surface, homogène à une contrainte.

rigidité du glissement (uniquement pour la loi CZM\_OUV\_MIX). La loi dédiée à la rupture ductile CZM\_TRA\_MIX est en forme de trapèze. Pour définir cette forme on introduit deux paramètres adimensionnels supplémentaires. Ils sont positifs et strictement inférieur à 1, baptisés COEF\_EXTR comme extrinsèque<sup>2</sup> pour déterminer la pente à l'origine (au choix infinie ou pas) et COEF\_PLAS comme plastique pour déterminer la fin du plateau plastique.

Nous donnerons une définition détaillée des paramètres dans les parties suivantes.

## Remarque :

On adopte les notations suivantes :  $\mathbf{n}$  désigne la normale à la surface de fissuration et  $\mathbf{t}$  et  $\boldsymbol{\tau}$  les directions de glissement dans le plan de la fissure. Pour tout vecteur  $\mathbf{x}$  on note :

$$\mathbf{x} = x_n \mathbf{n} + x_t \mathbf{t} + x_\tau \boldsymbol{\tau} \quad ; \quad \langle \mathbf{x} \rangle_+ = \langle \mathbf{x}_n \rangle \mathbf{n} + x_t \mathbf{t} + x_\tau \boldsymbol{\tau} \quad ; \quad \text{avec } \langle \mathbf{x} \rangle_i = \sup(x_i, 0)$$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \quad ; \quad \|\mathbf{x}\|_+ = \sqrt{\langle \mathbf{x} \rangle_+ \cdot \langle \mathbf{x} \rangle_+}$$

## 2 Définition des lois cohésives CZM\_xxx\_REG

Dans cette partie on présente l'énergie de surface  $\Psi$  ainsi que le vecteur contrainte  $\vec{\sigma}$  qui en découle pour les lois cohésives CZM\_EXP\_REG et CZM\_LIN\_REG. L'irréversibilité de la fissuration est formulée de la même manière pour chacune d'elles. Par ailleurs, ces lois sont basées sur le modèle de joint qui nécessite la régularisation de l'énergie. Cette dernière est effectuée par pénalisation de l'adhérence.

### 2.1 Energie de surface

L'énergie de surface  $\Psi$ , définie sur une discontinuité  $\Gamma$ , dépend du saut de déplacement entre les lèvres de la fissure :  $\delta$  et de  $\kappa$  variable interne seuil qui gère l'irréversibilité de la fissuration. Cette dernière mémorise la plus grande norme du saut atteinte au cours de l'ouverture. Sa loi d'évolution entre deux incréments de chargement successifs - et + s'écrit :

$$\kappa^+ = \max(\kappa^-, \|\delta\|_+)$$

L'énergie de surface est définie de la manière suivante :

$$\Psi(\delta, \kappa) = H(\|\delta\|_+ - \kappa) \Psi_{dis}(\|\delta\|_+) + [1 - H(\|\delta\|_+ - \kappa)] \Psi_{lin}(\|\delta\|_+, \kappa) + I_{R^+}(\delta_n)$$

avec  $H$  fonction de Heaviside et  $I_{R^+}$  fonction indicatrice traduisant la condition de non interpénétration des lèvres de la fissure :

$$I_{R^+}(\delta_n) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \delta_n < 0 \\ 0 & \text{si } \delta_n \geq 0 \end{cases}$$

## Remarque :

Dans la norme du saut, on prend la partie positive du saut normal. Cela permet de s'assurer que, lors de la pénalisation du contact, un saut normal négatif ne peut pas contribuer à faire évoluer le seuil (i.e. dissiper de l'énergie).

Suivant la valeur du seuil, l'énergie de surface vaudra  $\Psi_{dis}$  ou  $\Psi_{lin}$ . Dans le premier cas on parlera de régime dissipatif (dissipation d'énergie au cours de la fissuration), dans le second cas de régime

<sup>2</sup> en rapport au nom donné dans la littérature aux lois czm dont la pente à l'origine n'est pas infinie

linéaire (décharge ou recharge linéaire sans dissipation d'énergie). On peut écrire les deux formes de l'énergie de la manière suivante :

$$\Psi_{dis}(\|\delta\|_+) = \int_{\Gamma} \psi_{dis}(\|\delta\|_+) d\Gamma \quad \text{et} \quad \Psi_{lin}(\|\delta\|_+, \kappa) = \int_{\Gamma} \psi_{lin}(\|\delta\|_+, \kappa) d\Gamma$$

avec  $\Psi_{dis}$  et  $\Psi_{lin}$  densités d'énergie de surface.

Présentons en détail les valeurs de ces densités pour chaque loi cohésive.

## 2.1.1 Densité d'énergie de surface en régime linéaire

Dans le cas où une fissure existante évolue sans dissiper d'énergie (i.e.  $\|\delta\|_+ < \kappa$ ), l'élément est dans une phase linéaire (charge ou décharge), le seuil n'évolue pas. On choisit une densité d'énergie fonction quadratique de la norme du saut :

$$\Psi_{lin}(\|\delta\|_+, \kappa) = \frac{1}{2} P(\kappa) \|\delta\|_+^2 + C_0 \quad (1)$$

La fonction  $P$  dépend de la loi cohésive :

$$\text{CZM\_EXP\_REG} : P(\kappa) = \frac{\sigma_c}{\kappa} \exp\left(-\frac{\sigma_c}{G_c} \kappa\right) \quad (2)$$

$$\text{CZM\_LIN\_REG} : P(\kappa) = \begin{cases} \sigma_c \left( \frac{1}{\kappa} - \frac{\sigma_c}{2G_c} \right) & \text{si } \kappa \leq 2G_c / \sigma_c \\ 0 & \text{si } \kappa \geq 2G_c / \sigma_c \end{cases} \quad (3)$$

La fonction  $P$  permet d'assurer la continuité de la dérivée de  $\Psi$  en  $\kappa$  (i.e. la continuité du vecteur contrainte dans l'élément d'un régime à l'autre) et  $C_0$  constante permettant d'assurer la continuité de  $\Psi$  en  $\kappa$ .

## 2.1.2 Densité d'énergie de surface en régime dissipatif

En régime dissipatif, (cas où  $\|\delta\|_+ \geq \kappa$ ), on choisit une densité d'énergie de surface de la forme suivante :

$$\text{CZM\_EXP\_REG} : \psi_{dis}(\|\delta\|_+) = G_x \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\sigma_c}{G_c} \|\delta\|_+\right) \right] \quad (4)$$

$$\text{CZM\_LIN\_REG} : \psi_{dis}(\|\delta\|_+) = \begin{cases} \frac{-\sigma_c^2}{4G_c} \|\delta\|_+^2 + \sigma_c \|\delta\|_+ & \text{si } \|\delta\|_+ \leq 2G_c / \sigma_c \\ G_c & \text{si } \|\delta\|_+ \geq 2G_c / \sigma_c \end{cases} \quad (5)$$

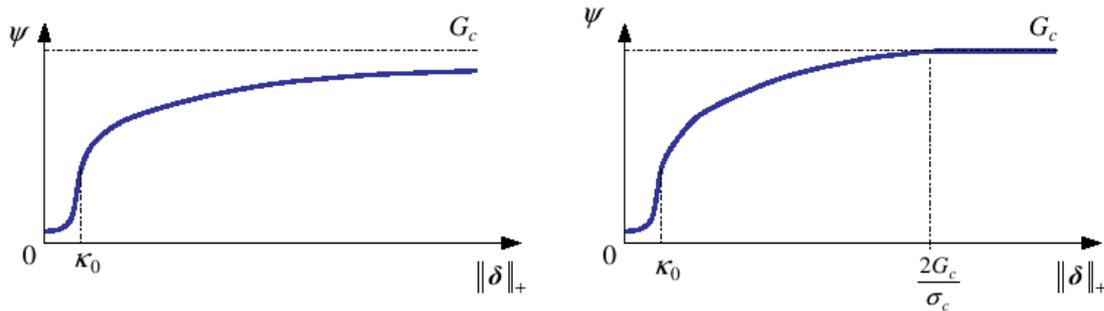


Figure 2 : Densité d'énergie de surface en fonction de la norme du saut de déplacement, loi CZM\_EXP\_REG à gauche et loi CZM\_LIN\_REG à droite.

La densité d'énergie de surface  $\psi_{dis}$  n'est pas dérivable par rapport à  $\delta$  en zéro. Pour contourner ce problème et conserver un traitement local des conditions d'ouverture, on effectue une *régularisation* de cette dernière au voisinage de zéro. On considère que la variable interne  $\kappa$  n'est pas nulle pour un élément sain, notons  $\kappa_0$  sa valeur initiale. L'énergie de surface à l'amorçage, au lieu de valoir  $\Psi(\delta, 0) = \Psi_{dis}(\|\delta\|_+)$  vaudra  $\Psi(\delta, \kappa_0) = \Psi_{lin}(\|\delta\|_+, \kappa_0)$  tant que la norme du saut sera inférieure à  $\kappa_0$ . On représente la densité d'énergie de surface sur la Figure 2. Celle-ci correspond à une fonction quadratique du saut au voisinage de zéro puis, au-delà de  $\kappa_0$  correspond à la densité d'énergie du régime dissipatif.

La régularisation introduit un paramètre supplémentaire dans le modèle. La valeur initiale du seuil notée  $\kappa_0$  est définie de la manière suivante :

$$\kappa_0 = \frac{G_c}{\sigma_c} \text{PENA\_ADHERENCE}$$

où PENA\_ADHERENCE est le paramètre du Code\_Aster entré par l'utilisateur.

### Remarque :

La régularisation de l'énergie en zéro permet de définir une contrainte dans l'élément de joint à l'amorçage. Physiquement cela revient à dire que dès que la contrainte va augmenter, un petit saut va apparaître. Le comportement adoucissant ne s'effectuera que lorsque la norme du saut dans l'élément dépassera  $\kappa_0$ , avant le joint se comporte comme un ressort.

## 2.1.3 Densité d'énergie de surface de pénalisation

L'indicatrice rend compte de la condition de non-interpénétration des lèvres de la fissure. Elle est approchée numériquement par une fonction de pénalisation  $\Psi_{pen}$  continue qui tend « rapidement » vers l'infini quand le saut normal devient négatif. Ainsi, la minimisation de l'énergie exclut les cas de figure où les bords du joint tendent à s'interpénétrer de façon importante. On choisit :

$$I_{R,+}(\delta \cdot \mathbf{n}) = \psi_{pen}(\delta \cdot \mathbf{n}) = \frac{1}{2} C \langle \delta \cdot \mathbf{n} \rangle_-^2 + C_0 \quad (6)$$

avec  $C$  constante définie au paragraphe 2.2.3 et  $C_0$  constante arbitraire qui n'intervient pas dans l'écriture de la loi cohésive (voir partie suivante).

## 2.2 Vecteur contrainte

Le vecteur contrainte dans l'élément noté  $\vec{\sigma}$  est égal à la somme des dérivées de la densité d'énergie de surface et de la densité d'énergie de pénalisation par rapport au saut.

$$\vec{\sigma} = H(\|\delta\|_+ - \kappa) \vec{\sigma}_{dis} + [1 - H(\|\delta\|_+ - \kappa)] \vec{\sigma}_{lin} + \vec{\sigma}_{pen} \quad (7)$$

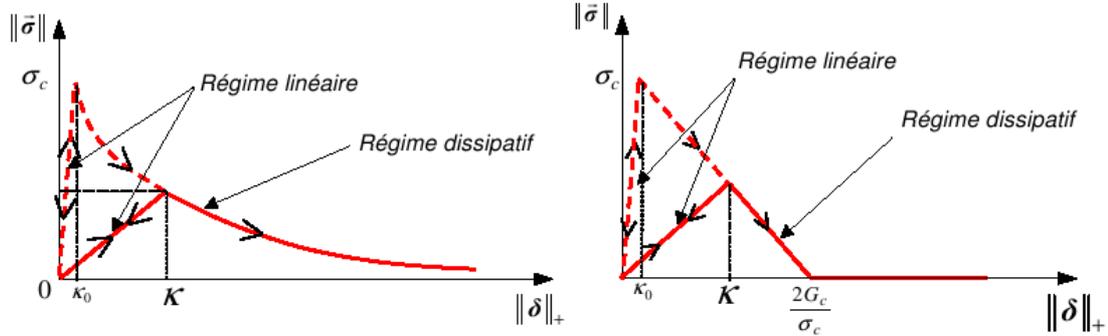


Figure 3 : Norme du vecteur contrainte en fonction de la norme du saut, loi CZM\_EXP\_REG à gauche, loi CZM\_LIN\_REG à droite.

On représente la norme du vecteur contrainte en fonction de la norme du saut sur la figure 3. Les flèches représentent le sens d'évolution possible de la contrainte suivant que le processus d'ouverture est réversible (régime linéaire) ou non (régime dissipatif). À l'amorçage, l'élément se comporte de façon linéaire avec une pente importante (régularisation), puis à un comportement adoucissant. La pente en zéro est gouvernée par la valeur initiale du seuil  $\kappa_0$ .

## 2.2.1 Vecteur contrainte en régime linéaire

Le vecteur contrainte en régime linéaire s'écrit (voir figure 3) :

$$\vec{\sigma}_{lin} = \frac{\partial \Psi_{lin}}{\partial \delta} = P(\kappa) \delta \quad (8)$$

et le module tangent :

$$\frac{\partial \vec{\sigma}_{lin}}{\partial \delta} = P(\kappa) \begin{pmatrix} H(\delta \cdot \mathbf{n}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

avec  $P$  défini par (2) ou (3) suivant la loi cohésive.

## 2.2.2 Vecteur contrainte en régime dissipatif

Le vecteur contrainte en régime dissipatif s'écrit (voir figure 3) :

$$\text{CZM\_EXP\_REG} : \vec{\sigma}_{dis} = \frac{\partial \Psi_{dis}}{\partial \delta} = \sigma_c \frac{\delta}{\|\delta\|_+} \exp\left(\frac{-\sigma_c}{G_c} \|\delta\|_+\right) \quad (10)$$

$$\text{CZM\_LIN\_REG} : \vec{\sigma}_{dis} = \frac{\partial \Psi_{dis}}{\partial \delta} = \begin{cases} \sigma_c \delta \left( \frac{1}{\|\delta\|_+} - \frac{\sigma_c}{2G_c} \right) & \text{si } \|\delta\|_+ \leq 2G_c/\sigma_c \\ 0 & \text{si } \|\delta\|_+ \geq 2G_c/\sigma_c \end{cases} \quad (11)$$

et le module tangent :

$$\text{CZM\_EXP\_REG} : \frac{\partial \vec{\sigma}_{dis}}{\partial \delta} = \sigma_c \left[ \frac{\mathbf{Id}}{\|\delta\|_+} - \frac{\delta}{\|\delta\|_+} \otimes \frac{\delta}{\|\delta\|_+} \left( \frac{\sigma_c}{G_c} + \frac{1}{\|\delta\|_+} \right) \right] \exp\left(\frac{-\sigma_c}{G_c} \|\delta\|_+\right) \quad (12)$$

$$\text{CZM\_LIN\_REG} : \frac{\partial \vec{\sigma}_{dis}}{\partial \delta} = \begin{cases} \frac{\sigma_c}{\|\delta\|_+} \left[ \left( 1 - \frac{\sigma_c}{2G_c} \|\delta\|_+ \right) \text{Id} - \frac{\delta}{\|\delta\|_+} \otimes \frac{\delta}{\|\delta\|_+} \right] & \text{si } \|\delta\|_+ \leq 2G_c/\sigma_c \\ 0 & \text{si } \|\delta\|_+ \geq 2G_c/\sigma_c \end{cases} \quad (13)$$

## 2.2.3 Vecteur contrainte de pénalisation

Le vecteur contrainte de pénalisation s'écrit :

$$\vec{\sigma}_{pen} = \frac{\partial \Psi_{pen}}{\partial \delta} = C \begin{pmatrix} \langle \delta \cdot \mathbf{n} \rangle_+ \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

et le module tangent :

$$\frac{\partial \vec{\sigma}_{pen}}{\partial \delta} = C \begin{pmatrix} H(-\delta \cdot \mathbf{n}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

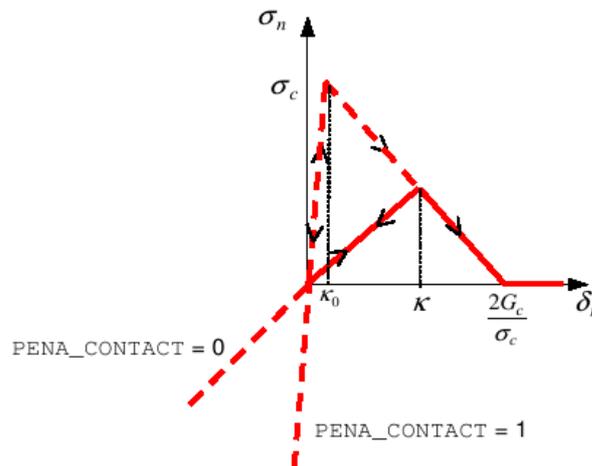


Figure 4 : Contrainte cohésive normale en fonction du saut normal (cas d'une ouverture en mode I pur)

La valeur de la pente de pénalisation  $C$  est donnée par la relation :

$$C = P(\kappa) + \text{PENA\_CONTACT} (P(\kappa_0) + P(\kappa)) \quad (16)$$

avec  $P$  défini par (2) ou (3) suivant la loi cohésive. Le paramètre numérique `PENA_CONTACT`, entré par l'utilisateur, permet de jouer sur la pente de la pénalisation du contact (voir figure 4). Ce dernier vaut par défaut 1, cela correspond au cas où la pente du contact est identique à celle de l'adhérence initiale. Si on choisit une valeur supérieure à 1, on augmente la pénalisation. Si on choisit 0, la pénalisation est identique à la pente de la décharge élastique courante.

## 2.3 Variables internes

Les lois `CZM_EXP_REG` et `CZM_LIN_REG` possèdent chacune neuf variables internes. Du point de vue de la loi de comportement, seule la première est *stricto sensu* une variable interne. Les autres fournissent des indications sur l'état du joint à un instant donné.

### Variables internes identiques pour les deux lois :

$V1 = \kappa$  : seuil en saut (plus grande norme atteinte).

$V2$  : indicateur de dissipation = 0 si régime linéaire, = 1 si régime dissipatif.

$V5 = V4 \times G_c$  : valeur de l'énergie dissipée (voir figure 5).

$V7 = \delta_n$  : saut normal,  $V8 = \delta_t$  saut tangentiel,  $V9 = \delta_\tau$  saut tangentiel (nul en 2D).

### Variables internes pour CZM\_EXP\_REG :

$V3$  : indicateur d'endommagement = 0 si matériau sain ( $\kappa = \kappa_0$ ) = 1, si matériau endommagé ( $\kappa > \kappa_0$ ),

$V4 = 1 - \left( 1 + \frac{\sigma_c}{2G_c} \kappa \right) \exp\left( \frac{-\sigma_c}{G_c} \kappa \right)$  : pourcentage d'énergie dissipée.

$V6 = \frac{1}{2} \|\delta\|_+^2 \frac{\sigma_c}{\kappa} \exp\left( \frac{-\sigma_c}{G_c} \kappa \right)$  : valeur de l'énergie résiduelle courante.

### Variables internes pour CZM\_LIN\_REG :

$v_3$  : indicateur d'endommagement = 0 si matériau sain ( $\kappa = \kappa_0$ ) = 1, si matériau endommagé ( $\kappa_0 < \kappa < 2G_c/\sigma_c$ ), = 2 si matériau rompu ( $\kappa \geq 2G_c/\sigma_c$ ).

$v_4 = \kappa \frac{\sigma_c}{2G_c}$  : pourcentage d'énergie dissipée.

$V6 = \frac{1}{2} \|\delta\|_+^2 \sigma_c \left( \frac{1}{\kappa} - \frac{\sigma_c}{2G_c} \right)$  : valeur de l'énergie résiduelle courante (voir figure 5).

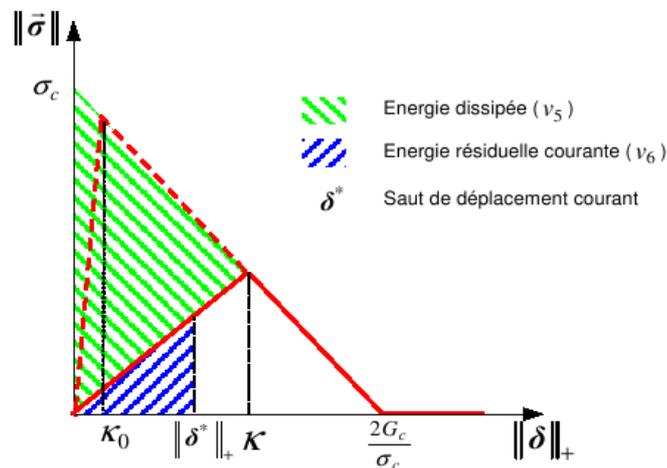


Figure 5 : Représentation des énergies pour la loi CZM\_LIN\_REG.

### Remarque :

On a vu que pour les besoins de la régularisation de l'énergie, le seuil initial  $\kappa_0$  (seuil pour un élément sain) n'est pas nul. Cela implique donc que l'énergie dissipée (variable interne  $V5$ ) n'est pas nulle pour un élément sain. Cela n'a pas de réalité physique, cette variable interne n'a de signification qu'une fois le seuil initial franchi :  $\kappa > \kappa_0$ .

## 3 Définition des lois cohésives CZM\_XXX\_MIX

Ces lois sont destinées :

- à la rupture fragile ou quasi-fragile (chargement monotone) pour `CZM_OUV_MIX`, `CZM_TAC_MIX`, et `CZM_EXP_MIX`. La forme exponentielle de la loi `CZM_EXP_MIX` est bien adaptée pour représenter la rupture des bétons.
- à la rupture ductile pour `CZM_TRA_MIX`,
- à la fatigue (chargement cyclique) pour `CZM_FAT_MIX`,
- à la dégradation d'une interface acier-béton pour `CZM_LAB_MIX`.

Dans cette partie on présente l'énergie de surface  $\Psi$  ainsi que le vecteur contrainte  $\vec{\sigma}$  pour chacune d'entre elles, puis les paramètres numériques et les variables internes. L'irréversibilité de la fissuration est formulée de la même manière pour les quatre premières lois et `CZM_LAB_MIX` (de type Talon-Curnier avec décharge verticale (6)) Pour `CZM_FAT_MIX`, elle est basée sur le cumul d'ouverture au cours des cycles.

La formulation mixte lagrangien augmenté permet de s'affranchir de la régularisation de l'énergie de surface. Ceci permet de modéliser l'adhérence parfaite de l'interface dans un état sain. Pour plus d'informations sur le modèle d'interface (`*_INTERFACE` et `*_INTERFACE_S`), le lecteur peut se reporter à la documentation R3.06.13.

## 3.1 Lois cohésives pour la rupture fragile `CZM_OUV_MIX`, `CZM_TAC_MIX` et `CZM_EXP_MIX`

### 3.1.1 Énergie de surface

L'énergie de surface  $\Psi$ , définie sur une discontinuité  $\Gamma$ , dépend du saut de déplacement entre les lèvres de la fissure :  $\delta$  et de  $\kappa$  variable interne seuil qui gère l'irréversibilité de la fissuration. Cette dernière mémorise la plus grande norme du saut atteinte au cours de l'ouverture. Sa loi d'évolution entre deux incréments de chargement successifs - et + s'écrit :

$$\kappa^+ = \max(\kappa^-, \|\delta\|)$$

L'énergie de surface est définie de la manière suivante :

$$\Psi(\delta, \kappa) = \int_{\Gamma} \Pi(\delta, \kappa) d\Gamma \quad (17)$$

avec la densité d'énergie de surface :

$$\Pi(\delta, \kappa) = \psi(\max(\|\delta\|, \kappa)) + I_{\mathbb{R}^+}(\delta_n)$$

où  $I_{\mathbb{R}^+}$  fonction indicatrice traduisant la condition de non interpénétration des lèvres de la fissure :

$$I_{\mathbb{R}^+}(\delta_n) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \delta_n < 0 \\ 0 & \text{si } \delta_n \geq 0 \end{cases}$$

et  $\psi$  densité d'énergie cohésive définie de la manière suivante :

$$\text{CZM\_TAC\_MIX} : \psi(\|\delta\|) = \begin{cases} \frac{-\sigma_c^2}{4G_c} \|\delta\| + \sigma_c \|\delta\| & \text{si } \|\delta\| \leq 2G_c/\sigma_c \\ G_c & \text{si } \|\delta\| \geq 2G_c/\sigma_c \end{cases} \quad (18)$$

$$\text{CZM\_OUV\_MIX} : \psi(\delta_n) = \begin{cases} \frac{-\sigma_c^2}{4G_c} \delta_n^2 + \sigma_c \delta_n & \text{si } \delta_n \leq 2G_c/\sigma_c \\ G_c & \text{si } \delta_n \geq 2G_c/\sigma_c \end{cases} \quad (19)$$

$$\psi(\delta_T) = \frac{1}{2} C \delta_T^2 \quad T = t \text{ ou } \tau$$

$$\text{CZM\_EXP\_MIX} : \psi(\delta_n) = \begin{cases} -G_c \exp(-\delta_n \frac{\sigma_c}{G_c}) & \text{si } \delta_n \leq 3.2G_c/\sigma_c \\ G_c & \text{si } \delta_n \geq 3.2G_c/\sigma_c \end{cases}$$

$$\psi(\delta_T) = \frac{1}{2} C \delta_T^2 \quad T = t \text{ ou } \tau$$

### Remarques :

- $C$  dépend d'un paramètre numérique choisi par l'utilisateur (voir partie 3.4)
- Pour la loi `CZM_OUV_MIX` la dissipation n'est pilotée que par l'ouverture normale, l'évolution du seuil est donc stricto sensu défini de la manière suivante :  
 $\kappa^+ = \max(\kappa^-, \delta_n)$
- La longueur de la zone cohésive étant plus longue pour la loi `CZM_EXP_MIX` que pour les autres lois CZM d'interface, une augmentation du nombre de maille ou du coefficient de pénalisation est nécessaire pour obtenir une solution.

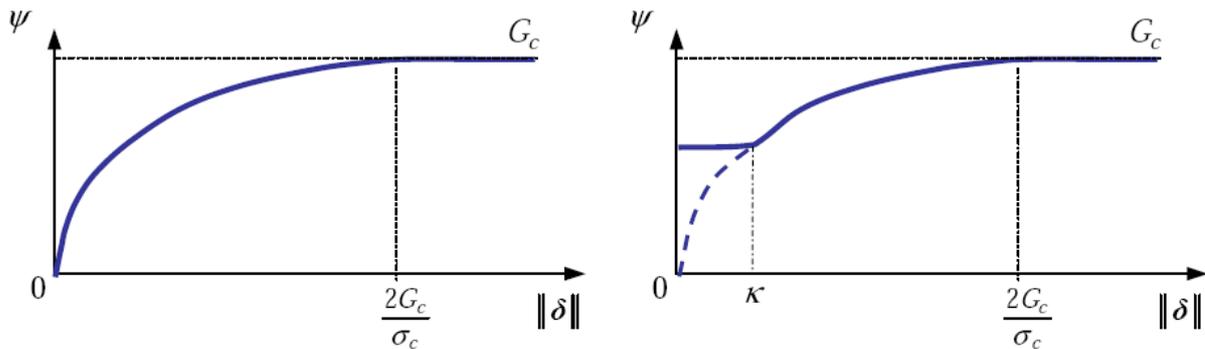


Figure 6 : Densité d'énergie de surface en fonction de la norme du saut de déplacement, lois `CZM_TAC_MIX`.

La loi `CZM_OUV_MIX` a un comportement adoucissant en ouverture et « élastique » en mode de glissement tandis que `CZM_TAC_MIX` (figure 6) couple l'adoucissement dans les trois modes de rupture. La première ne modélise la dissipation d'énergie qu'en mode I. Elle est destinée au cas particulier d'une modélisation en mode d'ouverture pur pour laquelle on souhaite imposer une condition de symétrie sur les lèvres des éléments finis cohésifs qui la porte (éléments d'interface). La seconde est valable dans les autres cas de figure.

### 3.1.2 Vecteur contrainte

L'énergie de surface définie précédemment n'est pas dérivable dans les cas suivants :  $\delta = \mathbf{0}$  (adhésion parfaite avant amorçage),  $\delta_n = 0$  (contact) et  $\|\delta\| = \kappa$  (décharge verticale de type Talon-Curnier). Le vecteur contrainte noté  $\vec{\sigma}$  est alors défini comme appartenant au sous différentiel (généralisation de la notion de dérivée) de la densité d'énergie de surface.

$$\vec{\sigma} \in \partial \Pi(\delta) \quad (20)$$

Cet ensemble coïncide avec la dérivée aux points où celle-ci est dérivable et à un ensemble de dérivées directionnelles possibles dans le cas contraire. Pour plus de détails on se reportera à la doc R7.02.13 des éléments d'interface. Donnons ici les valeurs prises par cet ensemble dans les différents cas de figure pour la loi CZM\_TAC\_MIX :

- Adhésion parfaite avant amorçage ( $\kappa = 0$  et  $\delta = \mathbf{0}$ ) :  
 $\partial \Pi(\delta) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 ; \|\mathbf{x}\|_+ \leq \sigma_c \}$
- Charge / Décharge retour à zéro ( $\|\delta\| < \kappa$ ) et condition de contact :  
 $\partial \Pi(\delta) = \{ x_n \mathbf{n} ; x_n \leq 0 \text{ et } \delta_n \geq 0 \text{ et } x_n \delta_n = 0 \}$
- Charge / Décharge verticale ( $\|\delta\| = \kappa > 0$ ) et condition de contact :  
 $\partial \Pi(\delta) = \{ x_n \mathbf{n} + \lambda \delta ; 0 \leq \lambda \leq \frac{\Psi'(\kappa)}{\kappa} \text{ et } x_n \leq 0 \text{ et } \delta_n \geq 0 \text{ et } x_n \delta_n = 0 \}$
- Endommagement, rupture ( $\|\delta\| > \kappa$ ) et condition de contact :  
 $\partial \Pi(\delta) = \{ x_n \mathbf{n} + \frac{\Psi'(\|\delta\|)}{\|\delta\|} \delta ; x_n \leq 0 \text{ et } \delta_n \geq 0 \text{ et } x_n \delta_n = 0 \}$

Pour la loi CZM\_OUV\_MIX et la loi CZM\_EXP\_MIX, les modes sont découplés, on peut expliciter les sous différentiels (ensembles de scalaires) sous la forme suivante :

### Mode I :

- Adhésion avant amorçage ( $\kappa = 0$  et  $\delta_n = 0$ ) :

$$\partial \Pi(\delta_n) = \{ x_n \in \mathbb{R} ; x_n \leq \sigma_c \}$$

• Charge / Décharge retour à zéro ( $\delta_n < \kappa$ ) et condition de contact :

$$\partial \Pi(\delta_n) = \{ x_n ; x_n \leq 0 \text{ et } \delta_n \geq 0 \text{ et } x_n \delta_n = 0 \}$$

• Charge / Décharge verticale ( $\delta_n = \kappa > 0$ ) :

$$\partial \Pi(\delta_n) = \{ \lambda \delta_n ; 0 \leq \lambda \leq \frac{\Psi'(\kappa)}{\kappa} \}$$

• Endommagement et rupture ( $\delta_n > \kappa$ ) :

$$\partial \Pi(\delta_n) = \{ \Psi'(\delta_n) \}$$

### Mode II ou III :

• Comportement élastique :

$$\partial \Pi(\delta_T) = \{ \Psi'(\delta_T) \}, T = t \text{ ou } \tau$$

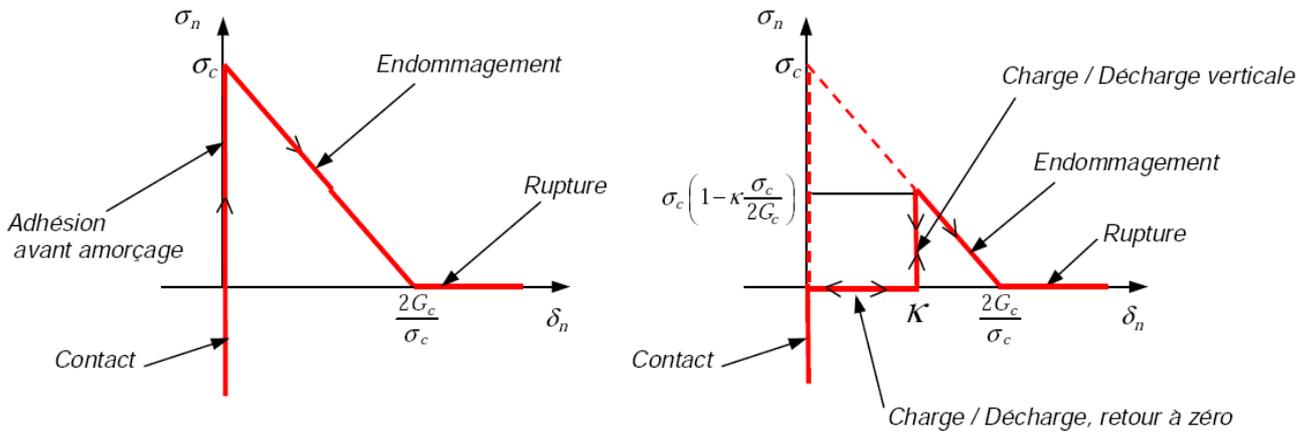
On détaille ici les deux lois en adoptant une écriture plus usuelle.

#### 1. Loi CZM\_OUV\_MIX :

$$\sigma_n \begin{cases} = \begin{cases} \sigma_c \left( 1 - \delta_n \frac{\sigma_c}{2G_c} \right) & \text{si } \kappa < \delta_n \leq 2G_c / \sigma_c \text{ (endommagement)} \\ 0 & \text{si } \delta_n > 2G_c / \sigma_c \text{ (rupture) ou } 0 < \delta_n < \kappa \text{ (retour à zéro)} \end{cases} \\ \in ]-\infty, \sigma_c] & \text{si } \delta_n = 0 \text{ et } \kappa = 0 \text{ (adhésion et contact)} \\ \in ]-\infty, 0] & \text{si } \delta_n = 0 \text{ et } \kappa > 0 \text{ (contact)} \\ \in ]0, \sigma_c \left( 1 - \kappa \frac{\sigma_c}{2G_c} \right)] & \text{si } \delta_n = \kappa \text{ (charge / décharge verticale)} \end{cases}$$

$\sigma_T = C \delta_T$  où  $T = t$  ou  $\tau$  (comportement élastique) (voir 3.4 pour la définition de  $C$ )

Une représentation graphique est donnée figure 7.



**Figure 7 : Composante normale du vecteur contrainte en fonction du saut normal pour la loi CZM\_OUV\_MIX (seuil  $\kappa$  nul à gauche et positif à droite).**

## 2. Loi CZM\_EXP\_MIX

$$\sigma_n \begin{cases} = \begin{cases} \sigma_c \exp\left(-\delta_n \frac{\sigma_c}{G_c}\right) & \text{si } \kappa < \delta_n \leq 3.2G_c / \sigma_c \text{ (endommagement)} \\ 0 & \text{si } \delta_n > 3.2G_c / \sigma_c \text{ (rupture) ou } 0 < \delta_n < \kappa \text{ (retour à zéro)} \end{cases} \\ \in ]-\infty, \sigma_c] & \text{si } \delta_n = 0 \text{ et } \kappa = 0 \text{ (adhésion et contact)} \\ \in ]-\infty, 0] & \text{si } \delta_n = 0 \text{ et } \kappa > 0 \text{ (contact)} \\ \in ]0, \sigma_c \exp\left(-\kappa \frac{\sigma_c}{G_c}\right)] & \text{si } \delta_n = \kappa \text{ (charge / décharge verticale)} \end{cases}$$

$\sigma_T = C \delta_T$  où  $T = t$  ou  $\tau$  (comportement élastique) (voir 3.4 pour la définition de  $C$ )

Une représentation graphique est donnée figure 8.

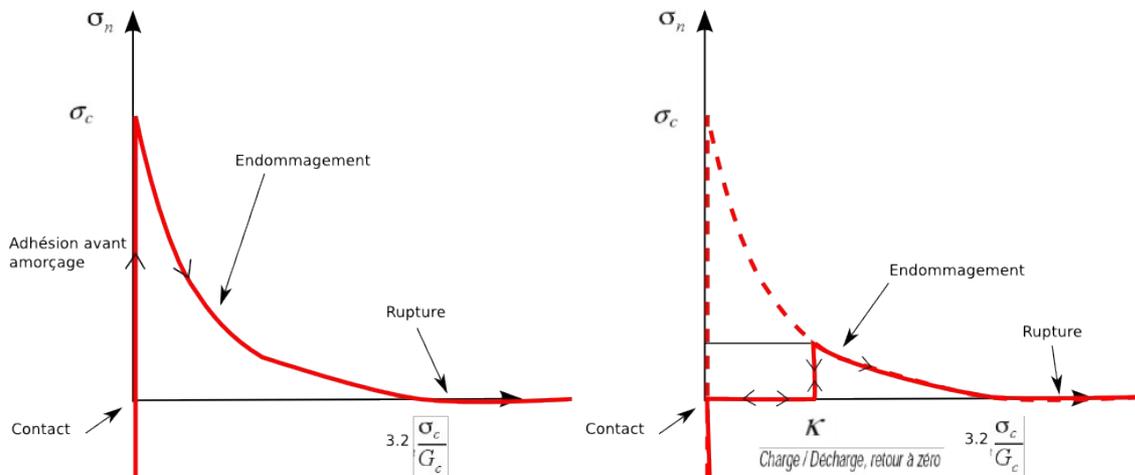


Figure 8 : Composante normale du vecteur contrainte en fonction du saut normal pour la loi CZM\_EXP\_MIX (seuil  $\kappa$  nul à gauche et positif à droite).

Dans les cas de figure où l'énergie est dérivable, le module tangent est facile à déterminer. Donnons la valeur de ce dernier pour les phases d'endommagement et de rupture :

$$CZM\_TAC\_MIX : \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \delta} = \begin{cases} \frac{\sigma_c}{\|\delta\|} \left[ \left( 1 - \frac{\sigma_c}{2G_c} \|\delta\| \right) \mathbf{Id} - \frac{\delta}{\|\delta\|} \otimes \frac{\delta}{\|\delta\|} \right] & \text{si } \|\delta\|_+ \leq 2G_c/\sigma_c \\ 0 & \text{si } \|\delta\| \geq 2G_c/\sigma_c \end{cases}$$

$$CZM\_OUV\_MIX : \frac{\partial \sigma_n}{\partial \delta_n} = \begin{cases} -\sigma_c^2/2G_c & \text{si } \delta_n \leq 2G_c/\sigma_c \\ 0 & \text{si } \delta_n \geq 2G_c/\sigma_c \end{cases}$$

$$CZM\_EXP\_MIX : \frac{\partial \sigma_n}{\partial \delta_n} = \begin{cases} -\sigma_c^2/G_c \exp(-\delta_n \frac{\sigma_c}{G_c}) & \text{si } \delta_n \leq 3.2G_c/\sigma_c \\ 0 & \text{si } \delta_n \geq 3.2G_c/\sigma_c \end{cases}$$

## 3.2 Loi cohésive pour la rupture ductile CZM\_TRA\_MIX

### 3.2.1 Énergie de surface

L'énergie de surface  $\Psi$ , définie sur une discontinuité  $\Gamma$ , dépend du saut de déplacement entre les lèvres de la fissure :  $\delta$  et de  $\kappa$  variable interne seuil qui gère l'irréversibilité de la fissuration. Cette dernière mémorise la plus grande valeur du saut normal atteinte au cours du chargement. Nous donneront plus en détail son évolution dans la partie suivante. L'énergie de surface est définie de la manière suivante :

$$\Psi(\delta, \kappa) = \int_{\Gamma} \Pi(\delta, \kappa) d\Gamma \quad (21)$$

avec la densité d'énergie de surface :

$$\Pi(\delta, \kappa) = \psi(\max(\delta_n, \kappa)) + I_{\mathbb{R}^+}(\delta_n)$$

où  $I_{\mathbb{R}^+}$  fonction indicatrice traduisant la condition de non interpénétration des lèvres de la fissure :

$$I_{\mathbb{R}^+}(\delta_n) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \delta_n < \delta_{res} \\ 0 & \text{si } \delta_n \geq \delta_{res} \end{cases} \text{ avec } \delta_{res} \text{ saut résiduel de contact défini dans la partie 3.2.2.}$$

Dans le cas où la fissuration n'a pas évolué<sup>3</sup> (matériau sain), le saut résiduel de contact est nul et  $\psi$  la densité d'énergie cohésive est définie de la manière suivante :

$$\text{CZM\_TRA\_MIX : } \psi(\delta_n) = \begin{cases} \sigma_c \frac{\delta_n^2}{2\delta_e} & \text{si } 0 = \delta_{res} \leq \delta_n \leq \delta_e \neq 0 \\ \sigma_c \left(\delta_n - \frac{\delta_e}{2}\right) & \text{si } \delta_e < \delta_n < \delta_p \\ \frac{\sigma_c}{2} \frac{(\delta_n - \delta_c)^2}{(\delta_p - \delta_c)} + G_c & \text{si } \delta_p \leq \delta_n < \delta_c \\ G_c & \text{si } \delta_n \geq \delta_c \end{cases} \quad (22)$$

$$\psi(\delta_T) = \frac{1}{2} C \delta_T^2 \quad T = t \text{ ou } \tau$$

Le saut critique  $\delta_c$  est déduit des autres paramètres de la façon suivante :  $\delta_c = 2G_c / \sigma_c + \delta_e - \delta_p$ , les paramètres  $\delta_e$  et  $\delta_p$  permettent de déterminer la forme de l'énergie (voir figure 8) et donc la forme en trapèze de la loi cohésive (figure 9).

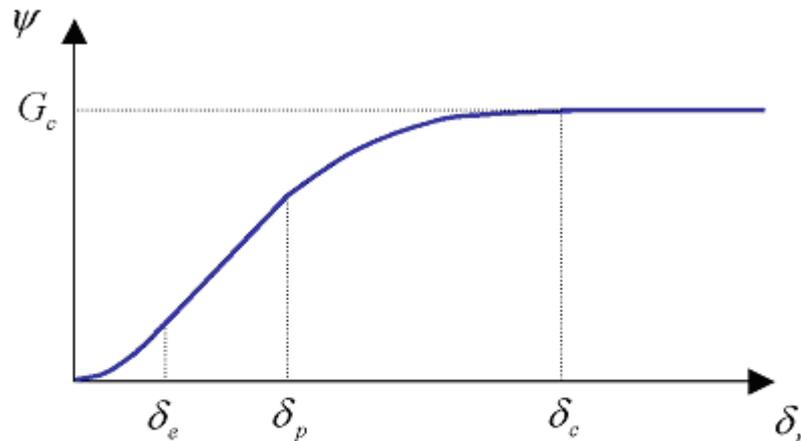


Figure 8 : Densité d'énergie de surface en fonction du saut de déplacement normal, loi CZM\_TRA\_MIX .

En pratique dans Code\_Aster, l'utilisateur renseigne des paramètres adimensionnels qui correspondent à un pourcentage du saut critique. Ils sont positifs et strictement inférieur à 1, baptisés COEF\_EXTR comme extrinsèque<sup>4</sup> pour déterminer la pente à l'origine ( *au choix : infinie ou pas* ) et COEF\_PLAS comme plastique pour déterminer la fin du plateau plastique de la loi :

$$\delta_e = \text{COEF\_EXTR} \cdot \delta_c$$

$$\delta_p = \text{COEF\_PLAS} \cdot \delta_c$$

<sup>3</sup> nous ne détaillerons pas ici la forme de cette énergie dans le cas où la fissuration évolue, cela sera réalisé en détail pour la contrainte cohésive qui en dérive dans la partie 3.2.2.

<sup>4</sup> e xtrinsèque en rapport au nom donné dans la littérature aux lois czm dont la pente à l'origine n'est pas infinie.

Le saut critique est donc déduit des quatre paramètres matériau fournis par l'utilisateur de la façon suivante :

$$\delta_c = \frac{2G_c}{\sigma_c(1 - COEF\_EXTR + COEF\_PLAS)}$$

On remarque que pour assurer la forme en trapèze il est nécessaire d'avoir la condition :  $COEF\_EXTR$  inférieur à  $COEF\_PLAS$ . On autorise toutefois que ces deux coefficients soient égaux ce qui conduit à une forme en triangle. De plus ils doivent être strictement inférieur à 1 afin de garantir l'unicité de la solution locale.

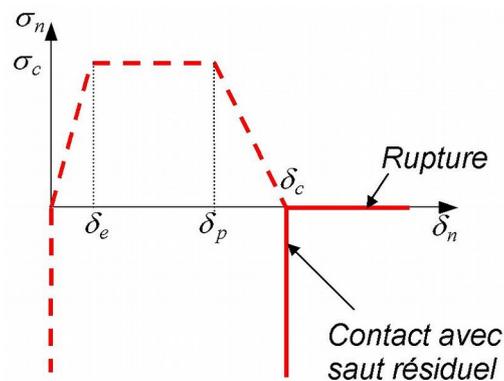
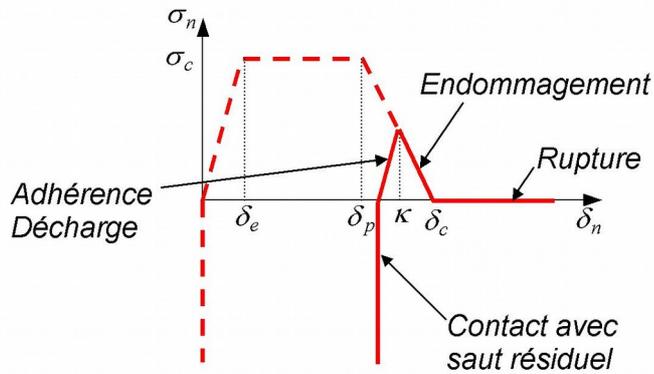
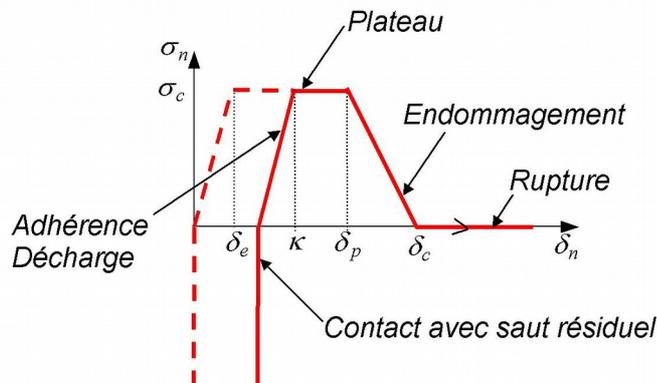
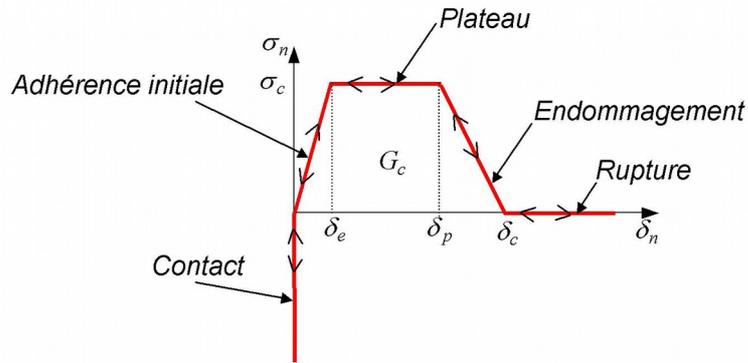
Si on choisit un  $COEF\_EXTR$  nul, la première ligne de ( 22 ) n'est plus pertinente et si on choisit également  $COEF\_PLAS$  nul, la seconde ligne n'est plus utile. Ce cas de figure permet de retomber sur l'énergie de la loi fragile  $CZM\_OUV\_MIX$  (voir partie 3.1.1 ). L'irréversibilité pour le contact est toutefois différente. En effet, dans la loi ductile on conserve un saut résiduel  $\delta_{res}$  au moment de la mise en contact des lèvres (voir partie suivante).

### 3.2.2 Vecteur contrainte

L'énergie de surface définie précédemment n'est pas dérivable dans les cas suivants :  $\delta_n = 0$  (adhésion parfaite avant amorçage si  $\delta_e = 0$  ou cas du contact), et (  $\delta_n = \kappa$  (décharge verticale si  $\delta_e = 0$  ). Le vecteur contrainte noté  $\vec{\sigma}$  est alors défini comme appartenant au sous différentiel (généralisation de la notion de dérivée) de la densité d'énergie de surface.

$$\vec{\sigma} \in \partial \Pi(\delta) \quad (23)$$

Cet ensemble coïncide avec la dérivée aux points où celle-ci est dérivable et à un ensemble de dérivées directionnelles possibles dans le cas contraire. Pour plus de détails on se reportera à la doc R7.02.13 des éléments d'interface.



**Figure 9 : Vecteur contrainte à différents états de fissuration : sain (9.1), endommagé (9.2 et 9.3) et cassé (9.4).**

Sur la figure 9 on représente les différents stades d'évolution de la loi dans le cas où  $\delta_e \neq 0$ . Dans le cas contraire, les pentes d'adhérence initiale et d'adhérence/décharge sont infinies.

### Définition de l'évolution du seuil

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, l'irréversibilité est pilotée par un seuil noté  $\kappa$ . Sa valeur initiale est fixée à  $\delta_e$ , en effet on considère qu'il n'y a pas de dissipation d'énergie dans la phase d'adhésion.

- Dans le cas où  $\delta_e = 0$  l'évolution du seuil  $\kappa$ , d'un incrément de chargement à l'autre, est donné classiquement par :  $\kappa^+ = \max(\kappa^-, \delta_n)$
- Dans le cas où  $\delta_e \neq 0$  l'évolution du seuil  $\kappa$ , d'un incrément de chargement à l'autre, est donné par  $\kappa^+ = \max(\max(\kappa^-, \delta_e), \delta_n)$ .
- De plus, on borne à  $\delta_c$  la valeur de  $\kappa$ .

Ces trois points peuvent être résumé dans l'écriture condensée suivante :

$$\kappa^+ = \min(\max(\max(\kappa^-, \delta_e), \delta_n), \delta_c)$$

La variable seuil nous permet de définir les trois états de la fissure cohésive (illustrés figure 9) :

**Sain** :  $\kappa = \delta_e$

**Endommagé** :  $\delta_e < \kappa < \delta_c$

**Cassé** :  $\kappa = \delta_c$

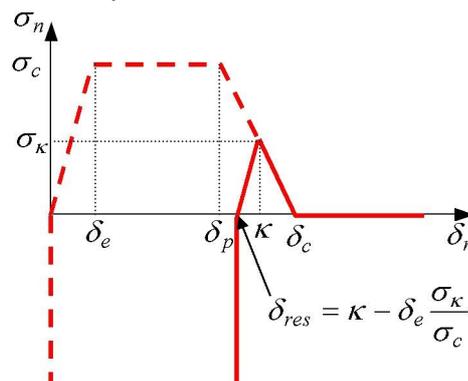
### Définition du saut résiduel de contact

En cas de décharge on fait le choix de maintenir un saut résiduel irréversible noté  $\delta_{res}$  pour la prise en compte du contact (voir figure 9). Cela est motivé d'un point de vue mécanique. En effet, on considère que les fasciés de la rupture ductile sont assez chahutés et que les lèvres de fissure ne se recollent pas parfaitement lors d'une refermeture. Le saut résiduel est défini de la manière suivante (voir figure 10) :

$$\delta_{res} = \kappa - \delta_e \frac{\sigma_\kappa}{\sigma_c}$$

avec  $\sigma_\kappa$  valeur courante de la contrainte critique de la loi, cette quantité est donnée par :

$$\sigma_\kappa = \max\left(0, \min\left(\sigma_c, \sigma_c \left(\frac{\kappa - \delta_e}{\delta_p - \delta_e}\right)\right)\right)$$



**Figure 10 : Loi cohésive pour un état endommagé.**

**Remarques** : Dans le cas « sain » le contact est logiquement pris en compte à partir d'un saut nul (voir figure 9.1). Dans le cas « cassé » , le saut résiduel de contact correspond au saut critique d'ouverture de fissure  $\delta_c$  (voir figure 9.4).

Définition de la loi cohésive :

En s'appuyant sur les quantités introduites précédemment on peut adopter une écriture de la contrainte normale fonction de l'ouverture normale de façon générale, valable pour les trois états de fissuration :

**CZM\_TRA\_MIX :**

$$\sigma_n(\delta_n) \begin{cases} \in ]-\infty, 0] & \text{si } \delta_n = \delta_{res} \text{ et } \delta_e \neq 0 & \text{contact} \\ \in ]-\infty, \sigma_\kappa] & \text{si } \delta_n = \delta_{res} \text{ et } \delta_e = 0 & \text{contact + adhésion parfaite} \\ = \frac{\sigma_c}{\delta_e}(\delta_n - \kappa) + \sigma_\kappa & \text{si } \delta_{res} < \delta_n \leq \kappa \text{ et } \delta_e \neq 0 & \text{adhésion extrinsèque} \\ = \min(\sigma_c, \sigma_c \frac{\delta_n - \delta_c}{\delta_p - \delta_c}) & \text{si } \kappa < \delta_n \leq \delta_c & \text{dissipation} \\ = 0 & \text{si } \delta_n > \delta_c & \text{rupture finale} \end{cases} \quad (24)$$

$\sigma_T(\delta_T) = C \delta_T$  où  $T = t$  ou  $\tau$  (comportement élastique) (voir 3.4 pour la définition de  $C$ )

Dans les cas de figure où l'énergie est dérivable le module tangent est facile à déterminer. Donnons la valeur de ce dernier pour les phases d'adhésion, de dissipation et de rupture :

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \delta_n} \begin{cases} = \frac{\sigma_c}{\delta_e} & \text{si } \delta_{res} < \delta_n \leq \kappa \text{ et } \delta_e \neq 0 & \text{adhésion extrinsèque} \\ = \frac{\sigma_c}{\delta_p - \delta_c} & \text{si } \delta_n > \delta_p \text{ et } \kappa < \delta_n \leq \delta_c & \text{dissipation adoucissant} \\ = 0 & \text{si } \kappa < \delta_n < \delta_p & \text{dissipation plateau} \\ = 0 & \text{si } \delta_n > \delta_c & \text{rupture finale} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \sigma_T}{\partial \delta_T} = C$$

## 3.3 Loi cohésive pour la fatigue CZM\_FAT\_MIX

Cette loi est destinée à modéliser la propagation de fissure par fatigue en mode I. Elle est proche de celles présentées précédemment, la principale différence porte sur l'irréversibilité de la fissuration. Cette dernière est basée sur le cumul d'ouverture au cours des cycles de chargement. Cet ingrédient est essentiel pour rendre compte de la fatigue avec les modèles cohésifs. Pour des informations théoriques sur ce point, le lecteur peut se reporter à Jaubert et Marigo (4).

### 3.3.1 Énergie de surface

L'énergie de surface  $\Psi$ , définie sur une discontinuité  $\Gamma$ , dépend du saut de déplacement normal entre les lèvres de la fissure :  $\delta_n$  et de  $\kappa$  variable interne seuil qui gère l'irréversibilité de la fissuration. Cette dernière mémorise le cumul d'ouverture au cours des cycles de chargement. Sa loi d'évolution entre deux incréments de chargement successifs  $i$  et  $i+1$  s'écrit :

$$\dot{\kappa} = \langle \dot{\delta}_n \rangle$$

où l'opérateur  $\langle . \rangle$  désigne la partie positive et le point la différence des valeurs en  $i$  et  $i+1$ . Ainsi  $\kappa$  n'évolue que lorsque le saut normal augmente et reste constant dans le cas contraire.

L'énergie de surface est définie de la manière suivante :

$$\Psi(\delta_n, \kappa) = \int_{\Gamma} \Pi(\delta_n, \kappa) d\Gamma \quad (25)$$

avec la densité d'énergie de surface :

$$\Pi(\delta_n, \kappa) = \psi(\kappa) + I_{\mathbb{R}^+}(\delta_n)$$

où  $I_{\mathbb{R}^+}$  fonction indicatrice traduisant la condition de non interpénétration des lèvres de la fissure :

$$I_{\mathbb{R}^+}(\delta_n) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \delta_n < 0 \\ 0 & \text{si } \delta_n \geq 0 \end{cases}$$

et  $\psi$  densité d'énergie cohésive définie de la manière suivante :

$$\text{CZM\_FAT\_MIX : } \psi(\kappa) = \begin{cases} \frac{-\sigma_c^2}{4G_c} \kappa^2 + \sigma_c \kappa & \text{si } \kappa \leq 2G_c/\sigma_c \\ G_c & \text{si } \kappa \geq 2G_c/\sigma_c \end{cases} \quad (26)$$

$$\psi(\delta_T) = \frac{1}{2} C \delta_T^2 \quad T = t \text{ ou } \tau$$

**Remarque :**

- On introduit une rigidité  $C$  en mode de glissement pour des questions numériques. Ce mode de rupture ne dissipe pas d'énergie et n'est pas destiné à être activé.
- $C$  dépend d'un paramètre numérique choisi par l'utilisateur (voir partie 3.4)

### 3.3.2 Vecteur contrainte

L'énergie de surface définie précédemment n'est pas dérivable par rapport au saut dans les cas suivants :  $\delta_n = 0$  (amorçage) et  $\dot{\delta}_n = 0$  (le saut n'évolue pas). Le vecteur contrainte noté  $\vec{\sigma}$  est défini comme appartenant au sous différentiel (généralisation de la notion de dérivée) de la densité d'énergie de surface.

$$\sigma_n \in \partial \Pi(\delta_n) \quad (27)$$

Cet ensemble coïncide avec la dérivée aux points où celle-ci est dérivable :

$$\sigma_n(\delta_n) = \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \delta_n}$$

avec  $\frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} = \begin{cases} \sigma_c \left(1 - \frac{\kappa}{\delta_c}\right) & \text{si } \kappa < \delta_c \\ 0 & \text{si } \kappa \geq \delta_c \end{cases}, \frac{\partial \kappa}{\partial \delta_n} = \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{\delta}_n > 0 \text{ et } \delta_n \neq 0 \\ 0 & \text{si } \dot{\delta}_n < 0 \text{ et } \delta_n \neq 0 \end{cases}$  et  $\delta_c = 2G_c / \sigma_c$

et à un ensemble de dérivées directionnelles possibles dans le cas contraire. Pour plus de détails on se reportera à la doc R7.02.13 des éléments d'interface. Pour la loi CZM\_FAT\_MIX les modes sont découplés, on explicite les sous différentiels (ensembles de scalaires) pour chacun d'entre eux :

### Mode I :

- Adhésion avant amorçage ( $\kappa = 0$  et  $\delta_n = 0$ ) :

$$\partial \Pi(\delta_n) = \{x_n \in \mathbb{R}; x_n \leq \sigma_c\}$$

- Charge / Décharge retour à zéro ( $\dot{\delta}_n < 0$ ) et condition de contact :

$$\partial \Pi(\delta_n) = \{x_n; x_n \leq 0 \text{ et } \delta_n \geq 0 \text{ et } x_n \delta_n = 0\}$$

- Charge / Décharge verticale ( $\dot{\delta}_n = 0$ ) :

$$\partial \Pi(\delta_n) = \{\lambda \delta_n; 0 \leq \lambda \leq \frac{\Psi'(\kappa)}{\kappa}\}$$

- Endommagement et rupture ( $\dot{\delta}_n > 0$ ) :

$$\partial \Pi(\delta_n) = \{\Psi'(\kappa)\}$$

### Mode II ou III :

- Comportement linéaire :

$$\partial \Pi(\delta_T) = \{\Psi'(\delta_T)\}, T = t \text{ ou } \tau$$

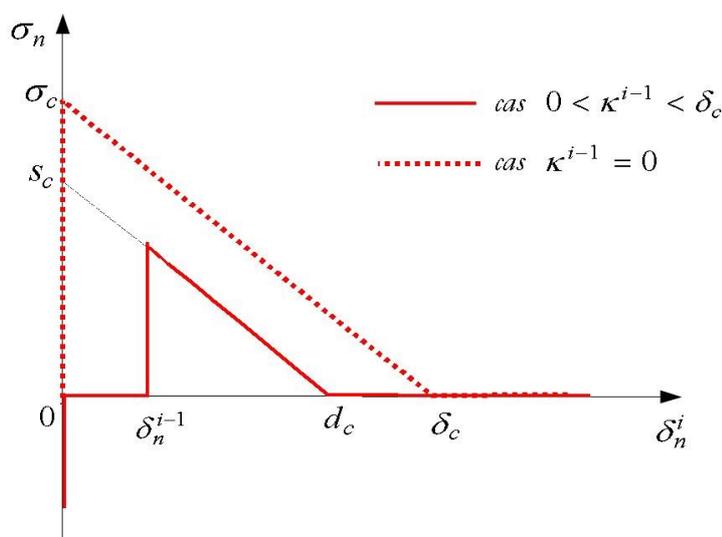


Figure 11 : Forme de la loi cohésive CZM\_FAT\_MIX

On peut présenter la loi cohésive CZM\_FAT\_MIX en adoptant une écriture plus usuelle. On exprime la contrainte normale  $\sigma_n$  en fonction du saut courant  $\delta_n^i$  pour différentes valeurs du seuil à l'instant précédent  $\kappa^{i-1}$  (voir figure 11) :

**Cas  $\kappa^{i-1} = 0$  : configuration à l'amorçage** (trait pointillé sur la figure 11)

$$\sigma_n(\delta_n^i) = \begin{cases} \sigma_c \left(1 - \frac{\delta_n^i}{\delta_c}\right) & \text{si } 0 < \delta_n^i \leq \delta_c \\ 0 & \text{si } \delta_n^i > \delta_c \end{cases} \quad \text{et condition d'amorçage } \sigma_n(0) \leq \sigma_c$$

**Cas**  $0 < \kappa^{i-1} < \delta_c$  : configuration courante (trait continu sur la figure 11)

$$\sigma_n(\delta_n^i) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < \delta_n^i < \delta_n^{i-1} \\ \sigma_c \left(1 - \frac{\kappa^{i-1} + \delta_n^i - \delta_n^{i-1}}{\delta_c}\right) & \text{si } \delta_n^{i-1} < \delta_n^i \leq d_c \\ 0 & \text{si } \delta_n^i > d_c \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} d_c = \delta_c s_c / \sigma_c \\ s_c = \sigma_c \left(1 - \frac{\kappa^{i-1} - \delta_n^{i-1}}{\delta_c}\right) \end{cases}$$

et condition de contact  $\sigma_n(0) \leq 0$ ,

et condition de charge/décharge verticale  $0 \leq \sigma_n(\delta_n^i) < \sigma_c \left(1 - \frac{\kappa^{i-1}}{\delta_c}\right)$

**Cas**  $\kappa^{i-1} \geq \delta_c$  : configuration rupture

$\sigma_n(\delta_n^i) = 0$  si  $\delta_n^i > 0$  et condition de contact  $\sigma_n(0) \leq 0$

A titre illustratif, une évolution cyclique d'amplitude constante du saut de déplacement normal sur un point de gauss conduit à l'évolution de la contrainte représentée sur la figure 12. On y représente également le cas de figure où le chargement est monotone. L'évolution de la contrainte est alors identique à celle lors de la première montée du chargement cyclique. Ce qui nous amène à la remarque suivante :

**Remarque :**

- La loi `CZM_FAT_MIX` est équivalente à la loi `CZM_OUV_MIX` tant que le chargement est monotone. Toutefois, on ne peut s'assurer de cette condition en chaque point de gauss, puisqu'il peut subvenir des décharges locales de la structure même si le chargement global croît. Il est donc déconseillé d'utiliser la loi de fatigue pour modéliser la fissuration sous chargement monotone. Le risque est de ne pas obtenir le même résultat qu'avec la loi `CZM_OUV_MIX`.

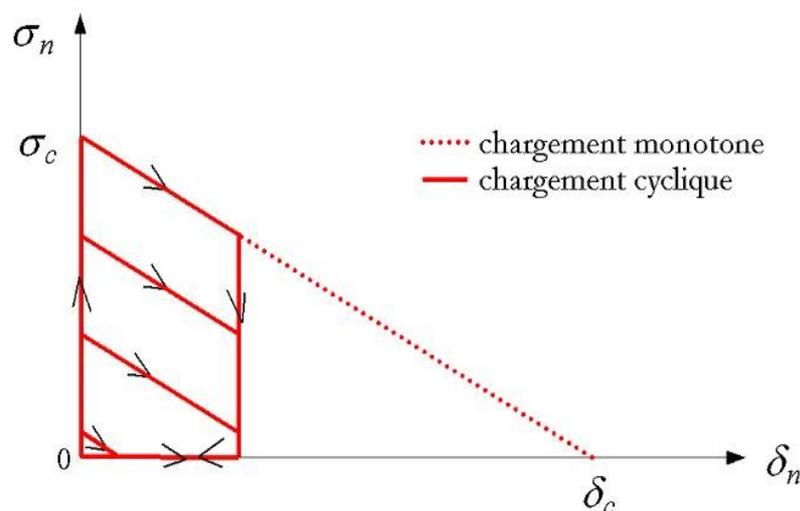


Figure 12 : Évolution de la contrainte au cours de chargements monotone et cyclique avec le loi `CZM_FAT_MIX`

## 3.4 Paramètres numériques PENA\_LAGR et RIGI\_GLIS

La formulation lagrangien augmenté du modèle introduit un paramètre numérique de pénalisation, noté PENA\_LAGR dans Code\_Aster. Cette valeur, entrée par l'utilisateur sous le mot clé RUPT\_FRAG, est reliée au scalaire qui multiplie le terme quadratique du lagrangien (noté  $r$  dans la documentation R3.06.13) par la relation suivante :

$$r = \text{PENA\_LAGR} \cdot \sigma_c^2 / 2 G_c$$

### Remarque :

- Il est nécessaire que PENA\_LAGR soit strictement supérieur à 1 pour que le problème soit bien posé (unicité de la solution). Pour plus détails sur ce point on se reportera à la doc R3.06.13 ou à (6).

Pour les lois CZM\_OUV\_MIX, CZM\_FAT\_MIX et CZM\_TRA\_MIX un autre paramètre numérique est nécessaire (en plus du précédent), il détermine la rigidité du comportement en glissement (paramètre  $C$  introduit partie 3.1.1). On le note RIGI\_GLIS, il est relié à  $C$  par :

$$C = \text{RIGI\_GLIS} \cdot \sigma_c^2 / 2 G_c$$

On rappelle que ces deux lois ont pour vocation de prendre en compte la dissipation d'énergie par fissuration en mode d'ouverture uniquement. La rigidité du glissement n'intervient que pour traiter numériquement le cas où l'on souhaite imposer des conditions de symétrie sur les éléments d'interfaces. L'objectif est de garder une rigidité en glissement quand l'élément est cassé en ouverture.

## 3.5 Variables internes

Les lois CZM\_XXX\_MIX possèdent chacune neuf variables internes. Du point de vue de la loi de comportement, seule la première est *stricto sensu* une variable interne. Les autres fournissent des indications sur l'état de l'élément d'interface à un instant donné.

$V1 = \kappa$  : **seuil en saut**, permet de prendre en compte l'irréversibilité de la fissuration, voir sa définition dans les parties précédentes (spécifique à chaque loi).

$V2$  : **indicateur du régime de la loi**

Pour la loi CZM\_TRA\_MIX  $V2 = -1$  : contact,  $V2 = 0$  : adhérence initiale ou courante,  $V2 = 1$  : dissipation,  $V2 = 2$  : rupture finale,  $V2 = 3$  : plateau (voir figure 13).

Pour les autres lois CZM\_XXX\_MIX :  $V2 = -1$  : contact,  $V2 = 0$  : adhérence initiale ou courante,  $V2 = 1$  : dissipation,  $V2 = 2$  : rupture finale,  $V2 = 3$  : retour à zéro à contrainte nulle (voir figure 13).

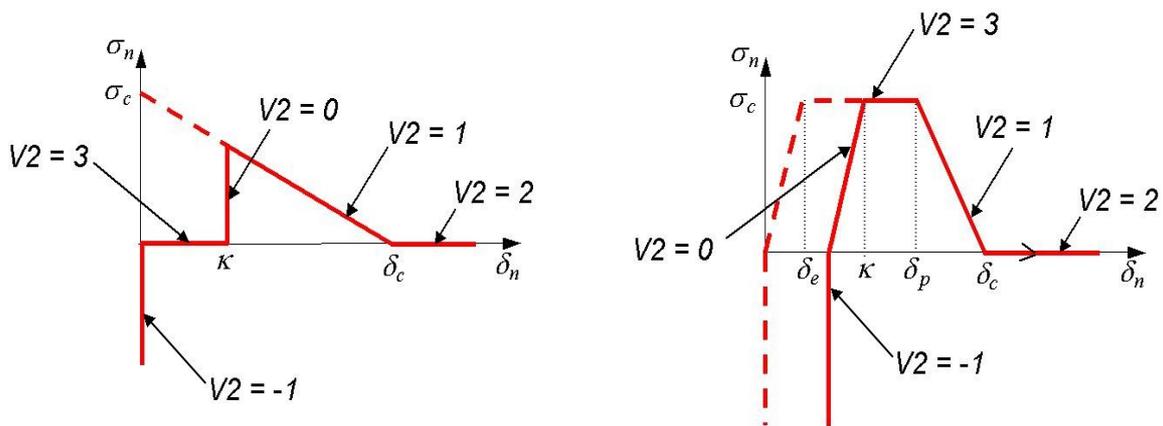


Figure 13 : Représentation des valeur de l'indicateur V2 pour les lois CZM\_OUV\_MIX à gauche et CZM\_TRA\_MIX à droite

**V3 : indicateur d'endommagement**  $V3=0$  si matériau sain,  $V3=1$  si matériau endommagé,  $V3=2$  si matériau cassé (voir exemples figures 9.1, 9.2 et 9.4 pour CZM\_TRA\_MIX et figure 7 pour CZM\_OUV\_MIX).

**V4 : pourcentage d'énergie dissipée.**

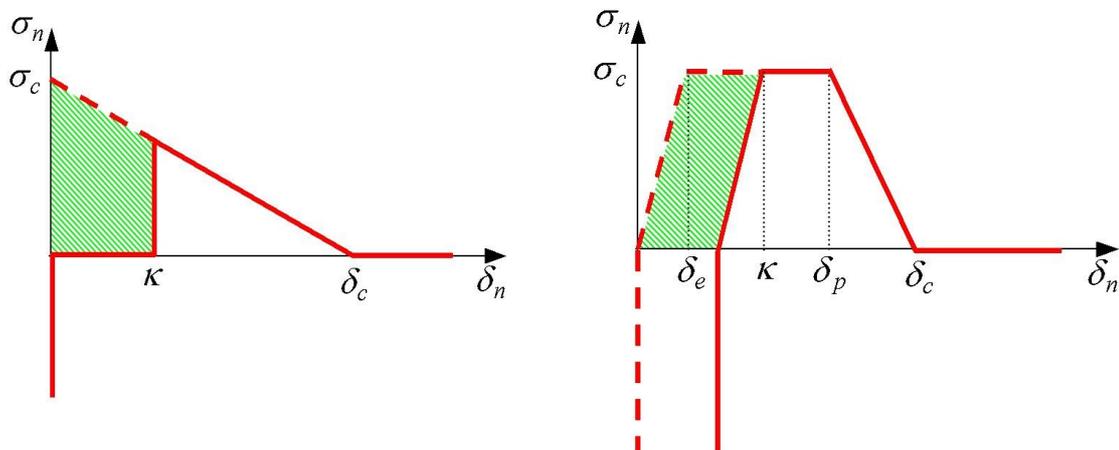
$$V4 = \frac{\kappa \sigma_c}{G_c} \left( 1 - \frac{\kappa \sigma_c}{4 G_c} \right) \text{ pour CZM_OUV_MIX et CZM_TAC_MIX}$$

$$V4 = \frac{\delta_{res} (\sigma_c + \sigma_\kappa) + (\delta_p - \delta_e) (\sigma_c - \sigma_\kappa)}{2 G_c} \text{ pour CZM_TRA_MIX}$$

$V5 = V4 \times G_c$  : valeur de l'énergie dissipée (voir figure 14).

**V6** : valeur de l'énergie résiduelle courante : nulle pour ces lois (valable pour CZM\_XXX\_REG).

$V7 = \delta_n$  : saut normal,  $V8 = \delta_t$  : saut tangentiel,  $V9 = \delta_\tau$  saut tangentiel (nul en 2D).



**Figure 14 : Représentation de l'énergie dissipée V5  
(partie hachurée) pour les lois CZM\_OUV\_MIX et CZM\_TRA\_MIX**

**Remarque :**

- Pour la loi CZM\_FAT\_MIX l'énergie dissipée est égale à la somme des aires des trapèzes lors de l'évolution de la contrainte présentée sur la figure 12. Une fois le point matériel rompu on remarque que cette énergie est égale à l'aire du triangle décrit lors d'une évolution monotone.

## 3.6 Loi cohésive pour une liaison acier-béton CZM\_LAB\_MIX

### 3.6.1 Énergie de surface

Ce modèle a été conçu pour modéliser le comportement d'une liaison acier-béton dans une structure en béton armé. On pourra se reporter à (9) pour la construction et la validation de ce modèle.

L'énergie de surface  $\Psi$ , définie sur une interface  $\Gamma$ , dépend du saut de déplacement à travers l'interface  $\delta$  et de la variable interne seuil  $\kappa$  qui gère l'irréversibilité du glissement. Cette dernière mémorise la plus grande norme du saut atteinte au cours du glissement. Sa loi d'évolution entre deux incréments de chargement successifs - et + s'écrit :

$$\kappa^+ = \max(\kappa^-, \|\delta\|)$$

L'énergie de surface est définie de la manière suivante :

$$\Psi(\delta, \kappa) = \int_{\Gamma} \Pi(\delta, \kappa) d\Gamma \quad (28)$$

avec la densité d'énergie de surface :

$$\Pi(\delta, \kappa) = \psi(\max(\|\delta\|, \kappa)) + I_{\mathbb{R}^+}(\delta)$$

où  $I_{\mathbb{R}^+}$  est une fonction indicatrice qui impose la cinématique de glissement de l'interface. Les différentes cinématiques possibles (au choix de l'utilisateur) sont mentionnées dans le tableau ci-dessous :

Contact unilatéral	$I_{\mathbb{R}^+}(\delta) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \delta_n < 0 \\ 0 & \text{si } \delta_n \geq 0 \end{cases} \quad (29)$
--------------------	---

Glissement dans le plan tangent	$I_{\mathbb{R}^+}(\delta) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \delta_n \neq 0 \\ 0 & \text{si } \delta_n = 0 \end{cases} \quad (30)$
---------------------------------	---

Glissement unidirectionnel selon le vecteur $\mathbf{t}$	$I_{\mathbb{R}^+}(\delta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta \parallel \mathbf{t} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (31)$
--	--

La densité d'énergie cohésive  $\psi$  est telle que :

$$\text{CZM\_LAB\_MIX} : \frac{\partial \Psi}{\partial \delta}(\delta) = \sigma_0 \frac{(\delta/\delta_0)^\alpha}{(1 + \delta/\delta_0)^{\alpha+\beta}} \quad (32)$$

Cette grandeur s'interprète comme la force cohésive à l'interface en fonction du saut de déplacement, et se trouve représentée sur la figure 15. Les paramètres  $\sigma_0$  et  $\delta_0$  permettent d'adimensionner la force et le déplacement, tandis que  $\alpha$  et  $\beta$  paramètrent la forme de la courbe. En pratique, on doit avoir  $0 < \alpha < 1$  et  $\beta > 0$ .

On peut calculer le point où la force cohésive est maximale, qui est défini par :

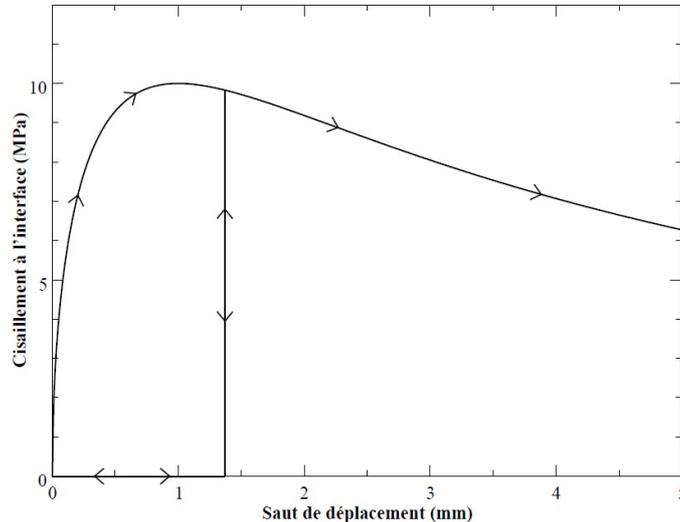


Figure 15 : Force cohésive en fonction de la norme du saut de déplacement, loi CZM\_LAB\_MIX.

$$\begin{cases} \sigma_c = \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{(\alpha + \beta)^{\alpha + \beta}} \sigma_0 \\ \delta_c = \frac{\alpha}{\beta} \delta_0 \end{cases}$$

### 3.6.2 Vecteur contrainte

L'énergie de surface définie précédemment n'est pas dérivable lorsque  $\|\delta\| = \kappa$  (décharge verticale de type Talon-Curnier) ainsi qu'aux points de discontinuité de l'indicatrice  $I_{\mathbb{R}^+}$ . Le vecteur contrainte noté  $\sigma$  est alors défini comme appartenant au sous différentiel (généralisation de la notion de dérivée) de la densité d'énergie de surface.

$$\sigma \cdot n \in \partial \Pi(\delta) \quad (33)$$

Cet ensemble coïncide avec la dérivée aux points où celle-ci est dérivable et à un ensemble de dérivées directionnelles possibles dans le cas contraire. Pour plus de détails on se reportera à la doc R7.02.13 des éléments d'interface. Précisons ici les valeurs prises par cet ensemble lorsque la loi impose un glissement unidirectionnel dans la direction du vecteur  $t$  :

- Endommagement ( $\|\delta\| = \kappa$  et  $\|\dot{\delta}\| > 0$ ) :  

$$\partial \Pi(\delta) = \left\{ t \cdot \sigma \cdot n = -\text{sgn}(t \cdot \delta) \frac{\partial \Psi}{\partial \delta}(\|\delta\|) \right\}$$
- Décharge / Recharge verticale ( $\|\delta\| = \kappa$  et  $\|\dot{\delta}\| = 0$ ) :  

$$\partial \Pi(\delta) = \left\{ t \cdot \sigma \cdot n = -\text{sgn}(t \cdot \delta) \lambda \text{ avec } 0 < \lambda < \frac{\partial \Psi}{\partial \delta}(\kappa) \right\}$$
- Décharge / Recharge à contrainte nulle ( $\|\delta\| < \kappa$ ) :

$$\partial \Pi(\delta) = \{t \cdot \sigma \cdot n = 0\}$$

## 4 Pilotage du chargement par prédiction élastique

Le pilotage du chargement, est disponible pour les lois de comportement cohésives (sauf pour `CZM_FAT_MIX` où le chargement est cyclique et fixé par l'utilisateur et `CZM_TRA_MIX` où a priori la fissuration se fait progressivement). De type prédiction élastique : `PRED_ELAS` (voir [R5.03.80]), il permet de suivre des solutions dissipatives présentant des instabilités. Pour que l'algorithme décrit dans [R5.03.80] fonctionne ; il faut que, en chaque point de Gauss, la loi cohésive fournisse la solution  $\eta$  du problème :

$$F_{el} \simeq \max_{pt\ gauss} \left\{ \frac{\|\delta^0 + \eta \delta^1\| - \kappa^-}{G_c / \sigma_c + \kappa^-} \right\} = \frac{\Delta \tau}{C} \quad (34)$$

De plus, la loi cohésive doit fournir le développement limité du critère  $F_{el}$ . Pour plus de détails sur cette technique, on peut aussi se reporter à 5.

## 5 Mots clés

### 5.1 Lois CZM\_XXX\_REG

Les lois de comportement cohésives CZM\_EXP\_REG et CZM\_LIN\_REG sont utilisées dans STAT\_NON\_LINE et DYNA\_NON\_LINE. Elles sont utilisables sur des éléments de joint 2D ou 3D avec les modélisations : PLAN\_JOINT, AXIS\_JOINT ou 3D\_JOINT.

Quatre paramètres sont à saisir dans DEFI\_MATERIAU sous les mots clé RUPT\_FRAG :

GC : densité d'énergie de surface critique (Pression x Longueur)  
SIGM\_C : contrainte critique (Pression)  
PENA\_ADHERENCE : pénalisation de l'adhérence.  
PENA\_CONTACT : pénalisation du contact (optionnel valant 1 par défaut).

Le mot clé RUPT\_FRAG\_FO permet de faire dépendre les paramètres de la température (voir documentation de DEFI\_MATERIAU [U4.43.01]).

#### Commandes

STAT_NON_LINE	COMPOTEMENT	RELATION	CZM_EXP_REG CZM_LIN_REG
DYNA_NON_LINE	COMPOTEMENT	RELATION	CZM_EXP_REG CZM_LIN_REG
AFFE_MODELE	MODELISATION	PLAN_JOINT AXIS_JOINT 3D_JOINT	
DEFI_MATERIAU	RUPT_FRAG	GC SIGM_C PENA_ADHERENCE PENA_CONTACT	
	RUPT_FRAG_FO	GC SIGM_C PENA_ADHERENCE PENA_CONTACT	

Ces lois de comportement cohésives sont testées en statique : voir cas test SSNP118 (doc [V6.03.118]), SSNP133 (doc [V6.03.133]), SSNA115 (doc [V6.01.115]) et SSNV199 (doc [V6.03.199]) et en dynamique : cas test SDNS105 (doc [V5.06.105]).

### 5.2 Lois CZM\_XXX\_MIX

Les lois de comportement cohésives CZM\_TAC\_MIX, CZM\_OUV\_MIX, CZM\_EXP\_MIX, CZM\_TRA\_MIX, CZM\_FAT\_MIX et CZM\_LAB\_MIX sont utilisées dans STAT\_NON\_LINE (et DYNA\_NON\_LINE pour les deux premières). Elles sont utilisables avec toutes les modélisations de type INTERFACE en 2D et 3D.

- Pour les lois CZM\_TAC\_MIX, CZM\_OUV\_MIX, CZM\_EXP\_MIX et CZM\_FAT\_MIX, quatre paramètres sont à saisir dans DEFI\_MATERIAU sous le mot clé RUPT\_FRAG :  
GC : densité d'énergie de surface critique (Pression x Longueur)  
SIGM\_C : contrainte critique (Pression)  
PENA\_LAGR : pénalisation du lagrangien (optionnel, 100 par défaut).  
RIGI\_GLIS : rigidité du glissement, uniquement pour CZM\_OUV\_MIX et CZM\_FAT\_MIX (optionnel, 10 par défaut).

CINEMATIQUE : Détermine les modes d'ouverture autorisés par la loi CZM\_TAC\_MIX. Il peut s'agir d'une condition de contact ('UNILATERAL'), un glissement dans le plan tangent ('GLIS\_2D') ou un glissement dans une seule direction ('GLIS\_1D'). (optionnel, 'UNILATERAL' par défaut)

- Pour la loi CZM\_TRA\_MIX six paramètres sont à saisir dans DEFI\_MATERIAU sous le mot clé RUPT\_DUCT :

GC : densité d'énergie de surface critique (Pression x Longueur)

SIGM\_C : contrainte critique (Pression)

COEF\_EXTR : coefficient de forme du trapèze (sans dimension)

COEF\_PLAS : coefficient de forme du trapèze (sans dimension)

PENA\_LAGR : pénalisation du lagrangien (optionnel, 100 par défaut).

RIGI\_GLIS : rigidité du glissement, uniquement pour CZM\_OUV\_MIX et CZM\_FAT\_MIX (optionnel, 10 par défaut).
- Pour la loi CZM\_LAB\_MIX six paramètres sont à saisir dans DEFI\_MATERIAU sous le mot clé RUPT\_DUCT :

SIGM\_C : Contrainte maximale supportable par l'interface acier-béton.

GLIS\_C : Glissement pour lequel la contrainte à l'interface est maximale.

ALPHA : Paramètre de forme de la loi d'adhérence acier-béton pour un faible glissement.

BETA : Paramètre de forme de la loi d'adhérence acier-béton pour un grand glissement.

PENA\_LAGR : Pénalisation du lagrangien (optionnel, 100 par défaut).

CINEMATIQUE : Détermine les modes de glissement autorisés par la loi d'interface. Il peut s'agir d'une condition de contact ('UNILATERAL'), un glissement dans le plan tangent ('GLIS\_2D') ou un glissement dans une seule direction ('GLIS\_1D'). (optionnel, 'UNILATERAL' par défaut)

## Commandes

STAT_NON_LINE	COMPORTEMENT	RELATION	CZM_TAC_MIX CZM_OUV_MIX CZM_EXP_MIX CZM_FAT_MIX CZM_TRA_MIX
AFFE_MODELE	MODELISATION	PLAN_INTERFACE PLAN_INTERFACE_S AXIS_INTERFACE AXIS_INTERFACE_S 3D_INTERFACE 3D_INTERFACE_S	
DEFI_MATERIAU	RUPT_FRAG	GC SIGM_C PENA_LAGR RIGI_GLIS CINEMATIQUE	
	RUPT_DUCT	GC SIGM_C COEF_EXTR COEF_PLAS PENA_LAGR RIGI_GLIS	
	CZM_LAB_MIX	SIGM_C GLIS_C ALPHA BETA PENA_LAGR CINEMATIQUE	

Ces lois de comportement cohésives sont testées en statique : voir par exemple les cas test SSNP118 (doc [V6.03.118]), SSNP139 (doc [V6.03.139]), SSNA115 (doc [V6.01.115]), SSNV199 (doc [V6.03.199]), SSNP151 (doc [V6.03.151]), SSNA120 (doc [V6.01.120]).

## 6 Bibliographie

---

- 1) BARENBLATT G. I., The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.*, 7, pp. 55-129 (1962).
- 2) CHARLOTTE M., MARIGO J.J., FRANCFORT G., TRUSKINOVSKY L. : "Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem : Comparisons of Griffith and Barenblatt surface energy models", Symposium on continuous damage and fracture.
- 3) CHARLOTTE M., LAVERNE J. , MARIGO J.-J., Initiation of cracks with cohesive force models: a variational approach. *European Journal of Mechanics, A/Solids* , v 25, n 4, July/August, 2006, p 649-669
- 4) JAUBERT A. et MARIGO J.-J., Justification of Paris-type fatigue laws from cohesive forces model via a variational approach, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Volume 18, pages 23-45 (2006).
- 5) LAVERNE J. : " Formulation énergétique de la rupture par des modèles de forces cohésives : considérations théoriques et implantations numériques ". Thèse de l'Université Paris XIII, novembre 2004 (sous la direction de J.-J. MARIGO et E. LORENTZ).
- 6) LAVERNE J. , LORENTZ E. : Documentation de référence du *Code\_Aster* R3.06.11
- 7) TALON C., CURNIER A. A model of adhesion coupled to contact and friction *Eur. J. Mech. A/Solids* **22** (4), 545-565 (2003).
- 8) LORENTZ E., A mixed interface finite element for cohesive zone models, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 198 (2008), 302-317 .
- 9) DAVID M. , Approche multi-échelle du comportement mécanique des structures en béton armé – Application aux enceintes de confinement des centrales nucléaires . Thèse de doctorat

## 7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
6.3	J.LAVERNE EDF- R&D/AMA	Texte initial
7.2	J.LAVERNE EDF- R&D/AMA	Évolution de l'élément de joint - ajout d'un deuxième point de gauss - ajout d'une 3ème variable interne : pourcentage d'énergie dissipée - Pénalisation de la fermeture (contact). - Pilotage : modification du critère PRED_ELAS
8.4	J.LAVERNE EDF- R&D/AMA	- Pénalisation pour la rigidité initiale - ajout d'une 4ème variable interne 4
9.5	J.LAVERNE EDF- R&D/AMA	Ajout des lois CZM_OUV_MIX et CZM_TAC_MIX
10.1	J.LAVERNE EDF- R&D/AMA	Ajout de la loi CZM_FAT_MIX
10.4	J.LAVERNE EDF- R&D/AMA	Ajout de la loi CZM_TRA_MIX, modification de la définition du repère local des EI avec les angles nautiques (ANGL_REP) et plus avec les angles d'Euler (ANGL_EULER).
11.3	M. David EDF- R&D/AMA	Ajout de la loi CZM_LAB_MIX et du mot-clé CINEMATIQUE
12.1	S. Michel- Ponnelle EDF- R&D/AMA	Ajout de la loi CZM_EXP_MIX