Loi de Rankine

Résumé :

Ce document présente la méthode de résolution de la loi de Rankine.

Table des Matières

Notations

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$	Contraintes principales (dans cet ordre)
E	Module d'Young
ν	Coefficient de Poisson
$K=\frac{E}{3(1-2\nu)}$	Module de compressibilité élastique
$G=\frac{E}{2(1+\nu)}$	Module de cisaillement élastique
σ_t	Limite de traction du matériau
$p=\frac{I_1}{3}=\frac{trace(\boldsymbol{\sigma})}{3}$	Contrainte moyenne
$p<0$	Convention de signe pour la contrainte en compression
$\boldsymbol{\sigma}^e$	Tenseur de prédiction élastique des contraintes
$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}^e+\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Tenseurs des déformations totale, élastique et incrément de déformation plastique
$\varepsilon_v^p=trace(\boldsymbol{\varepsilon}^p)$	Incrément de la déformation plastique volumique
$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\boldsymbol{\varepsilon}^p-\frac{\varepsilon_v^p}{3}\mathbf{1}$	Incrément de la déformation plastique déviatorique
$\varepsilon^p=\Vert\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\Vert=\sqrt{\frac{3}{2}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p:\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}$	Norme de l'incrément de déformation plastique déviatorique, ou incrément de déformation équivalente

1 Introduction

La loi de Rankine est formulée en termes de contraintes principales. Cette formulation suppose l'isotropie du matériau (voir [1] et [2]) En effet, cette condition est nécessaire pour garantir que la méthode de retour radial préserve les directions principales. Son intérêt réside dans le fait qu'elle simplifie l'écriture des équations et autorise de ce fait des méthodes de résolution très performantes (car quasi-analytiques).

Le comportement élastique est purement linéaire.

La surface de charge est caractérisée par trois plans dans l'espace des contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Chacun de ces plans est caractérisé par une équation du type :

$$R_{i=1,2,3}(\boldsymbol{\sigma}^+) = \sigma_i^+ - \sigma_t = 0 \quad (1)$$

Où σ_t est l'unique donnée du matériau et caractérise la limite en traction du matériau. La loi est associée.

2 Intégration locale de la loi de Rankine

Le taux de déformation plastique est donné à l'aide de la formule de Koiter :

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p=\sum_{j=1}^{m} d\mu_j \frac{\partial R_j}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\sum_{j=1}^{m} d\mu_j \boldsymbol{n}_j \tag{2}$$

Où $d\mu_i \geq 0$ sont les multiplicateurs plastiques associés aux mécanismes i , et :

$$\frac{\partial R_i}{\partial \sigma_j}=n_{ij}=\delta_{ij} \tag{3}$$

Et où m caractérise le nombre de mécanismes actifs, égal à un, deux ou trois suivant les situations suivantes :

- la contrainte finale se situe à l'intérieur de la surface de charge, le point est régulier et $m=1$;
- la contrainte finale se situe sur une arête du cône, le point est singulier et $m=2$;
- la contrainte finale ne se situe ni à l'intérieur de la surface de charge ni sur une arête. Elle est alors projetée au sommet du cône, le point est singulier et $m=3$;

La contrainte finale $\boldsymbol{\sigma}^+$ est calculée à partir d'une prédiction élastique notée $\boldsymbol{\sigma}^e$ et d'une correction $\Delta\boldsymbol{\sigma}_C=\boldsymbol{C}.\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$ de sorte que :

$$\boldsymbol{\sigma}^+=\boldsymbol{\sigma}^e-\Delta\boldsymbol{\sigma}_C=\boldsymbol{\sigma}^e-\sum_{j=1}^{m}\Delta\mu_j \boldsymbol{C}.\boldsymbol{n}_j \tag{4}$$

Les multiplicateurs plastiques $d\mu_j$ sont calculés en injectant l'équation (**4**) dans l'équation (**1**), ce qui donne :

$$\sum_{j=1}^{m} d\mu_j (\boldsymbol{C}.\boldsymbol{n}_j)_i=\sigma_i^e-\sigma_t \tag{5}$$

Dans ce qui suit, on détaille les expressions correspondant aux différentes situations mentionnées plus haut.

Les déformations plastiques volumique et équivalente s'écrivent :

$$\begin{cases} \varepsilon_v^p=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\|=\sqrt{\frac{2}{3}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p:\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \end{cases} \tag{6}$$

Avec $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\boldsymbol{\varepsilon}^p-\frac{\varepsilon_v^p}{3}\mathbf{1}$.

2.1 Cas où un seul mécanisme est actif

Le mécanisme R_1 est actif. D'où :

$$d\mu\left(K+\frac{4}{3}G\right)=R_1(\boldsymbol{\sigma}^e)=\sigma_1^e-\sigma_t \tag{7}$$

Avec σ_t la limite de traction du matériau. D'où :

$$d\mu=\frac{\langle R_1(\boldsymbol{\sigma}^e)\rangle_+}{K+\frac{4}{3}G} \tag{8}$$

Où l'opérateur $\langle\ \rangle_+$ désigne la partie positive de la grandeur associée.

La déformation plastique s'écrit :

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \delta \mu \frac{\partial R_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \delta \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Et la correction $\Delta \boldsymbol{\sigma}_C$ s'écrit :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_C = \boldsymbol{C} . \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \delta \mu \boldsymbol{C} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \delta \mu \begin{pmatrix} K + \frac{4}{3} G \\ K - \frac{2}{3} G \\ K - \frac{2}{3} G \end{pmatrix} \tag{10}$$

Les déformations plastiques volumique et équivalente s'écrivent :

$$\begin{cases} \delta \varepsilon_v^p = \delta \mu \\ \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} . \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 \delta \mu \\ -\delta \mu \\ -\delta \mu \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \delta \mu \\ -\delta \mu \\ -\delta \mu \end{pmatrix}} = \frac{2}{3} \delta \mu \end{cases} \tag{11}$$

2.2 Cas où deux mécanismes sont actifs

Les mécanismes R_1 et R_2 sont actifs. D'où :

$$\begin{cases} d \mu_1 \underbrace{\left(K + \frac{4}{3} G \right)}_{A} + d \mu_2 \underbrace{\left(K - \frac{2}{3} G \right)}_{B} = R_1 (\boldsymbol{\sigma}^e) = \sigma_1^e - \sigma_t \\ d \mu_1 \left(K - \frac{2}{3} G \right) + d \mu_2 \left(K + \frac{4}{3} G \right) = R_2 (\boldsymbol{\sigma}^e) = \sigma_2^e - \sigma_t \end{cases} \tag{12}$$

En posant det le déterminant du système, on a :

$$det = A^2 - B^2 = 4 G \left(K + \frac{G}{3} \right) > 0 \tag{13}$$

Le déterminant étant toujours strictement nul, il existe toujours une solution qui s'écrit :

$$\begin{cases} d \mu_1 = \dfrac{\langle A R_1 (\boldsymbol{\sigma}^e) - B R_2 (\boldsymbol{\sigma}^e) \rangle_+}{det} \\ d \mu_2 = \dfrac{\langle A R_2 (\boldsymbol{\sigma}^e) - B R_1 (\boldsymbol{\sigma}^e) \rangle_+}{det} \end{cases} \tag{14}$$

La déformation plastique s'écrit :

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^P = \delta \mu_1 \frac{\partial R_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \delta \mu_2 \frac{\partial R_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \delta \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Et la correction $\Delta\boldsymbol{\sigma}_C$ s'écrit :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_C=\boldsymbol{C}.\delta\boldsymbol{\varepsilon}^P=\delta\mu_1\boldsymbol{C}.\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\delta\mu_2\boldsymbol{C}.\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\delta\mu_1\begin{pmatrix}K+\frac{4}{3}G\\K-\frac{2}{3}G\\K-\frac{2}{3}G\end{pmatrix}+\delta\mu_2\begin{pmatrix}K-\frac{2}{3}G\\K+\frac{4}{3}G\\K-\frac{2}{3}G\end{pmatrix} \tag{16}$$

Les déformations plastiques volumique et équivalente s'écrivent :

$$\begin{cases}\delta\varepsilon_v^P=\delta\mu_1+\delta\mu_2\\ \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\sqrt{\frac{2}{3}.\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\delta\mu_1-\delta\mu_2\\2\delta\mu_2-\delta\mu_1\\-\delta\mu_1-\delta\mu_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\delta\mu_1-\delta\mu_2\\2\delta\mu_2-\delta\mu_1\\-\delta\mu_1-\delta\mu_2\end{pmatrix}}=\frac{2}{3}\sqrt{\delta\mu_1^2+\delta\mu_2^2-\delta\mu_1\delta\mu_2}\end{cases} \tag{17}$$

2.3 Cas de la projection au sommet du cône

Dans ce cas, on a directement :

$$\begin{cases}p^+=p^e-K\,\Delta\varepsilon_v^p=\sigma_t\\ \boldsymbol{\sigma}^+=p^+\mathbf{1}\end{cases} \tag{18}$$

On obtient directement la déformation plastique volumique :

$$\Delta\varepsilon_v^p=\frac{p^e-\sigma_t}{K} \tag{19}$$

Les mécanismes R_1 , R_2 et R_3 sont actifs. D'où :

$$\begin{cases}d\mu_1 A+(d\mu_2+d\mu_3)B=R_1(\boldsymbol{\sigma}^e)=\sigma_1^e-\sigma_t\\ d\mu_2 A+(d\mu_1+d\mu_3)B=R_2(\boldsymbol{\sigma}^e)=\sigma_2^e-\sigma_t\\ d\mu_3 A+(d\mu_1+d\mu_2)B=R_3(\boldsymbol{\sigma}^e)=\sigma_3^e-\sigma_t\end{cases} \tag{20}$$

On montre qu'après quelques manipulations algébriques, on obtient :

$$\begin{cases}d\mu_1=\frac{(A+B)R_1-B(R_2+R_3)}{6KG}\\ d\mu_2=\frac{(A+B)R_2-B(R_1+R_3)}{6KG}\\ d\mu_3=\frac{(A+B)R_3-B(R_1+R_2)}{6KG}\end{cases} \tag{21}$$

La déformation plastique équivalente s'écrit alors :

$$\delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\delta\mu_1-\delta\mu_2-\delta\mu_3\\2\delta\mu_2-\delta\mu_1-\delta\mu_3\\2\delta\mu_3-\delta\mu_1-\delta\mu_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\delta\mu_1-\delta\mu_2-\delta\mu_3\\2\delta\mu_2-\delta\mu_1-\delta\mu_3\\2\delta\mu_3-\delta\mu_1-\delta\mu_2\end{pmatrix}}$$
$$\delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\frac{2}{3}\sqrt{\delta\mu_1^2+\delta\mu_2^2+\delta\mu_3^2-\delta\mu_1\delta\mu_2-\delta\mu_1\delta\mu_3-\delta\mu_2\delta\mu_3} \quad (22)$$

2.4 Variables internes du modèle

Les variables internes du modèle sont au nombre de neuf :

- `V1` est la déformation plastique volumique ε_v^p ;
- `V2` est la déformation plastique équivalente (déviatorique) $\tilde{\varepsilon}^p=\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\|$;
- `V3` est l'indicateur de plasticité ;
- `V4` à `V9` sont les six composantes du tenseur des déformations plastiques $\boldsymbol{\varepsilon}^p$.

3 Expression de la matrice tangente dans la base principale

3.1 Cas où un seul mécanisme est actif

On a :

$$d\boldsymbol{\sigma}^{+}=\boldsymbol{C}.\delta\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{\delta\sigma_1}{K+\frac{4}{3}G}\begin{pmatrix}K+\frac{4}{3}G\\ K-\frac{2}{3}G\\ K-\frac{2}{3}G\end{pmatrix} \tag{23}$$

En posant $\begin{cases}A=K+\frac{4}{3}G\\ B=K-\frac{2}{3}G\end{cases}$, on a :

$$\frac{\delta\sigma_1}{A}\begin{pmatrix}A\\ B\\ B\end{pmatrix}=\frac{1}{A}\begin{pmatrix}A\\ B\\ B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}.\boldsymbol{C}.\delta\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{A}\begin{pmatrix}A\\ B\\ B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B & B\end{pmatrix}.\delta\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}A & B & B\\ B & \frac{B^2}{A} & \frac{B^2}{A}\\ B & \frac{B^2}{A} & \frac{B^2}{A}\end{bmatrix}.\delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{24}$$

Soit l'expression suivante de la matrice tangente $\boldsymbol{T}$ (voir 57 pour la matrice d'élasticité $\boldsymbol{C}$) :

$$\boldsymbol{T}=\frac{\delta\boldsymbol{\sigma}^{+}}{\delta\boldsymbol{\varepsilon}}=\boldsymbol{C}-\begin{bmatrix}A & B & B\\ B & \frac{B^2}{A} & \frac{B^2}{A}\\ B & \frac{B^2}{A} & \frac{B^2}{A}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{A^2-B^2}{A} & \frac{B(A-B)}{A}\\ 0 & \frac{B(A-B)}{A} & \frac{A^2-B^2}{A}\end{bmatrix} \tag{25}$$

3.2 Cas où deux mécanismes sont actifs

On a :

$$d\boldsymbol{\sigma}^{+}=\boldsymbol{C}.\delta\boldsymbol{\varepsilon}-\underbrace{\left(\frac{A\delta\sigma_1-B\delta\sigma_2}{det}\begin{pmatrix}A\\ B\\ B\end{pmatrix}+\frac{A\delta\sigma_2-B\delta\sigma_1}{det}\begin{pmatrix}B\\ A\\ B\end{pmatrix}\right)}_{\delta\Delta\boldsymbol{\sigma}_C} \tag{26}$$

On obtient :

$$\delta\Delta\boldsymbol{\sigma}_C=\delta\sigma_1\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \frac{B}{A+B}\end{pmatrix}+\delta\sigma_2\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \frac{B}{A+B}\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \frac{B}{A+B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B & B\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \frac{B}{A+B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B & A & B\end{pmatrix}\right].\delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{27}$$

Soit :

$$\delta\Delta\boldsymbol{\sigma}_C=\left[\begin{bmatrix} A & B & B \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{AB}{A+B} & \frac{B^2}{A+B} & \frac{B^2}{A+B}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B & A & B \\ \frac{B^2}{A+B} & \frac{AB}{A+B} & \frac{B^2}{A+B}\end{bmatrix}\right].\delta\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\delta\Delta\boldsymbol{\sigma}_C=\begin{bmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & \frac{2B^2}{A+B}\end{bmatrix}.\delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{28}$$

Soit l’expression suivante de la matrice tangente $\boldsymbol{T}$:

$$\boldsymbol{T}=\frac{\delta\boldsymbol{\sigma}^+}{\delta\boldsymbol{\varepsilon}}=\boldsymbol{C}-\begin{bmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & \frac{2B^2}{A+B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A(A+B)-2B^2}{A+B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3KG}{K+\frac{G}{3}}\end{bmatrix} \tag{29}$$

3.3 Cas de la projection au sommet du cône

On montre que l'on a trivialement $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{0}$.

4 Expression de la matrice tangente dans la base globale

Le paragraphe **§3** permet de construire la matrice tangente consistante dans la base principale, notée $\boldsymbol{T}$. Il convient désormais de ramener cette matrice dans la base globale (cartésienne), que l'on notera $\bar{\boldsymbol{T}}$.

4.1 Remarque liminaire

Il est à noter que la construction de cette matrice tangente consistante est une étape cruciale à la fois pour la robustesse et la performance de l'algorithme :

- Premièrement, il est parfaitement connu qu'une telle matrice permet un taux de convergence quadratique pour le processus de Newton ;
- Deuxièmement, cette matrice rend compte de la rotation des directions principales au cours d'un incrément. Sans elle, la formulation de la loi de Rankine en termes de contraintes principales décrite au paragraphe **§1** ne serait pas complète, puisque les contraintes principales, maintenues fixes au cours de l'intégration locale de la loi (**§2**), ne pourraient pas tourner au niveau global de la structure.

Dans ce paragraphe, on décrit en détail la méthode permettant de construire $\bar{\boldsymbol{T}}$ à partir de $\boldsymbol{T}$. En annexe (§5), on trouvera les éléments de théorie nécessaire à la transformation des quantités tensorielles d'une base à l'autre.

4.2 Application au cas de Rankine

La transposition des formules de l'annexe §5 à la mise en œuvre numérique mérite quelques précisions. On a tout d'abord les correspondances suivantes :

- $\boldsymbol{X}=\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pred}$ et $x_\alpha=\varepsilon_\alpha^{pred}$;
- $\boldsymbol{Y}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{+}$ et $y_\alpha=\sigma_\alpha^{+}$;
- $\boldsymbol{E}_\alpha=\hat{\boldsymbol{d}}_\alpha^{pred}\otimes\hat{\boldsymbol{d}}_\alpha^{pred}$;
- $(\boldsymbol{T})_{\alpha\beta}=\dfrac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta}$ est la matrice tangente consistante dans la base principale calculée au paragraphe **§3** ;

La notation ^{pred} indique que l'on travaille avec des grandeurs « prédites » données en entrée par le processus de Newton, la notation $^{+}$ avec des grandeurs issues de la résolution locale de la loi de comportement, et la notation $\hat{}$ avec la base de Voigt. On notera que les directions principales prédites $\hat{\boldsymbol{d}}_\alpha^{pred}$ sont figées au cours de la résolution locale, ce qui est cohérent avec l'hypothèse d'isotropie adoptée (voir les explications du paragraphe **§5**).

Disposant de toutes ces informations à l'issue de la résolution locale de la loi de comportement, on en déduit la matrice tangente consistante $\bar{\boldsymbol{T}}=\bar{\boldsymbol{D}}$ exprimée dans la base de projection $\bar{\boldsymbol{b}}$ définie au paragraphe **§6 :**

- L'équation (**40**) dans le cas bidimensionnel en contraintes planes (`C_PLAN`) ;
- L'équation (**44**) dans le cas bidimensionnel en déformation plane (`D_PLAN`) ou axisymétrique (`AXIS`) ;
- L'équation (**52**) dans le cas tridimensionnel (3D) ;

La seconde information importante concerne la convention d'écriture des différents tenseurs. En effet, par souci de généralité, la notation utilisée pour les tenseurs dans tout le paragraphe **§4** est la notation classique, faisant apparaître des tenseurs jusqu'à l'ordre quatre. Cette écriture est impropre à la résolution numérique, où l'on préfère utiliser des notations condensées rendues possibles par le fait que l'on travaille avec des tenseurs symétriques d'ordre deux (contraintes et déformations le sont toujours). On distingue deux formes de notations condensées correspondant à deux bases de projection (voir **§6**) :

- La base orthonormée $\bar{\boldsymbol{b}}$ des tenseurs symétriques d'ordre deux. C'est dans cette base que sont données les contraintes et les déformations à l'entrée et à la sortie de la résolution locale du comportement ;

- La base dite de Voigt $\hat{b}$, beaucoup plus commode à utiliser lors de la résolution numérique locale du comportement car elle évite d'avoir à manipuler des coefficients en $\sqrt{2}$ lors des opérations matricielles ;

4.3 Schéma de résolution de la loi de comportement

Entrées :

- Contraintes exprimées dans la base globale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^-$;
- Incrément de déformation exprimé dans la base globale $\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$;

Calculs :

- On évalue les contraintes élastiques $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^e$ et les déformations élastiques $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ dans la base de Voigt ;
- On les transforme dans la base principale, on obtient $\boldsymbol{\sigma}^e$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^e$;
- On intègre la loi de comportement et on obtient l'incrément de déformation plastique $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$ et les contraintes dans la base de Voigt $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^+$;
- Calcul de la matrice tangente dans la base principale :
  - $\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^+,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e\right)\rightarrow\hat{\boldsymbol{E}}_\alpha$ puis $T_{\alpha\beta}=\dfrac{\partial\sigma_\alpha}{\partial\varepsilon_\beta}$
- Transfert de la matrice tangente dans la base de Voigt :
  - $\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^+,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e,\hat{\boldsymbol{E}}_\alpha,\boldsymbol{T}\right)\rightarrow\hat{T}_{ij}=\dfrac{\partial\sigma_i}{\partial\varepsilon_j}$
- Transfert de la matrice tangente dans la base de globale :
  - $\hat{\boldsymbol{T}}\rightarrow\bar{\boldsymbol{T}}$

5 Annexe : q uelques résultats sur les tenseurs symétriques isotropes d'ordre deux

5.1 Définition d'un tenseur symétrique isotrope

On définit par S^3 l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux dans l'espace vectoriel de dimension $n=3$, et les tenseurs $\boldsymbol{Y}\in S^3$ et $\boldsymbol{X}\in S^3$ tels que :

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}): S^3 \rightarrow S^3 \quad (30)$$

La fonction tensorielle $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})$ est dite isotrope si :

$$\boldsymbol{R}.\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}).\boldsymbol{R}^t=\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{R}.\boldsymbol{X}.\boldsymbol{R}^t) \quad (31)$$

Quelle que soit la rotation $\boldsymbol{R}$. L'hypothèse d'isotropie implique que $\boldsymbol{Y}$ et $\boldsymbol{X}$ sont coaxiaux, c'est-à-dire qu'ils possèdent les mêmes directions principales $\boldsymbol{d}_{\alpha=1,2,3}$. On note :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=\sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha(\boldsymbol{d}_\alpha\otimes\boldsymbol{d}_\alpha)=\sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha\boldsymbol{E}_\alpha\\ \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})&=\sum_{\alpha=1}^{3} y_\alpha(\boldsymbol{d}_\alpha\otimes\boldsymbol{d}_\alpha)=\sum_{\alpha=1}^{3} y_\alpha\boldsymbol{E}_\alpha\end{aligned} \quad (32)$$

Où $y_\alpha=y_\alpha(x_1,x_2,x_3)$ et x_α représentent les valeurs propres de $\boldsymbol{Y}$ et $\boldsymbol{X}$, respectivement.

5.2 Dérivée d'une fonction tensorielle isotrope d'ordre deux

On suppose que la fonction tensorielle isotrope $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})$ est différentiable par rapport à $\boldsymbol{X}$, et on définit sa dérivée $\boldsymbol{D}$ telle que :

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})\stackrel{\text{def}}{=}\frac{d\,\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})}{d\,\boldsymbol{X}} \quad (33)$$

Appliquée à l'équation (**32**), on obtient l'expression suivante :

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})=\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\boldsymbol{E}_\alpha\otimes\frac{d\,y_\alpha}{d\,\boldsymbol{X}}+y_\alpha\frac{d\,\boldsymbol{E}_\alpha}{d\,\boldsymbol{X}}\right)=\sum_{\alpha=1}^{3}\left(y_\alpha\frac{d\,\boldsymbol{E}_\alpha}{d\,\boldsymbol{X}}+\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta}\boldsymbol{E}_\alpha\otimes\frac{d\,x_\beta}{d\,\boldsymbol{X}}\right) \quad (34)$$

5.2.1 Cas bidimensionnel de type contraintes planes (`C_PLAN`)

En dimension deux (cas `C_PLAN`), l'équation caractéristique $det(\boldsymbol{X}-x_\alpha\boldsymbol{I})=0$ donne une équation quadratique des valeurs propres $x_{\alpha=1,2}$ de $\boldsymbol{X}$ du type suivant :

$$x_\alpha^2-I_1x_\alpha+I_2=0 \text{ avec } \alpha=1,2 \quad (35)$$

Avec :

$$\begin{cases}I_1=trace(\boldsymbol{X})=X_{11}+X_{22}\\ I_2=det(\boldsymbol{X})=X_{11}X_{22}-X_{12}X_{21}\end{cases} \quad (36)$$

La résolution du problème spectral donne aisément les solutions suivantes pour les valeurs propres :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{I_1 + \sqrt{I_1^2 - 4 I_2}}{2} \\ x_2 = \dfrac{I_1 - \sqrt{I_1^2 - 4 I_2}}{2} \end{cases} \quad (37)$$

Et les vecteurs propres, tenant compte de la multiplicité des valeurs propres :

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_\alpha = \dfrac{\boldsymbol{X} + (x_\alpha - I_1)\boldsymbol{I}}{2 x_\alpha - I_1} & si \quad x_1 \neq x_2 \\ \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{I} & si \quad x_1 = x_2 \end{cases} \quad (38)$$

En particulier, Carlson et Hoger montrent que si $x_1 \neq x_2$, on a :

$$\frac{d x_\alpha}{d \boldsymbol{X}} = \boldsymbol{E}_\alpha \quad (39)$$

En utilisant les équations (**37**), (**38**) et (**39**) dans (**34**), on obtient l'expression de la dérivée $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$, tenant compte de la multiplicité des valeurs propres :

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} [\boldsymbol{I}_S - \boldsymbol{E}_1 \otimes \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2 \otimes \boldsymbol{E}_2] + \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\beta=1}^{2} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta} \boldsymbol{E}_\alpha \otimes \boldsymbol{E}_\beta & si \quad x_1 \neq x_2 \\ \left(\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \right) \boldsymbol{I}_S + \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} & si \quad x_1 = x_2 \end{cases} \quad (40)$$

Avec la matrice identité $\boldsymbol{I}$:

$$(\boldsymbol{I})_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (41)$$

La matrice de transposition $(\boldsymbol{I}_t)_{ijkl} = \delta_{il} \delta_{jk}$ et la matrice de symétrisation $\boldsymbol{I}_S$, telles que :

$$(\boldsymbol{I}_S)_{ijkl} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{I}_t) = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (42)$$

__Remarque :__

On remarque que le terme $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} [\boldsymbol{I}_S - \boldsymbol{E}_1 \otimes \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2 \otimes \boldsymbol{E}_2]$ dans la dérivée $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$ de la première équation de (**40**) exprime la rotation des directions principales dans le plan.

5.2.2 Cas bidimensionnel de type déformations planes (`D_PLAN`) et axisymétrique (`AXIS`)

La direction hors-plan $\alpha = 3$ étant fixe, l'expression de la dérivée $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$ s'obtient à partir du cas précédant. En effet, en isolant le terme $\alpha = 3$ dans l'équation (**34**), on a l'expression suivante :

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}) = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{2} \left(y_\alpha \frac{d \boldsymbol{E}_\alpha}{d \boldsymbol{X}} + \sum_{\beta=1}^{2} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta} \boldsymbol{E}_\alpha \otimes \frac{d x_\beta}{d \boldsymbol{X}} \right)}_{\boldsymbol{D}_{2D}(\boldsymbol{X})} + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_3} \boldsymbol{E}_\alpha \otimes \frac{d x_3}{d \boldsymbol{X}} + \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial y_3}{\partial x_\beta} \boldsymbol{E}_3 \otimes \frac{d x_\beta}{d \boldsymbol{X}}}_{\boldsymbol{D}_3(\boldsymbol{X})} \quad (43)$$

Où $\boldsymbol{D}_{2D}(\boldsymbol{X})$ est donnée par l'équation (**34**). Le terme complémentaire $\boldsymbol{D}_3(\boldsymbol{X})$ s'écrit, en tenant compte de la multiplicité des valeurs propres, de la façon suivante :

$$\boldsymbol{D}_3(\boldsymbol{X})=\begin{cases}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_3}\boldsymbol{E}_\alpha\otimes\boldsymbol{E}_3+\frac{\partial y_3}{\partial x_\alpha}\boldsymbol{E}_3\otimes\boldsymbol{E}_\alpha\right)+\frac{\partial y_3}{\partial x_3}\boldsymbol{E}_3\otimes\boldsymbol{E}_3 & si \quad x_1\neq x_2\\ \frac{\partial y_1}{\partial x_3}\boldsymbol{I}_p\otimes\boldsymbol{E}_3+\frac{\partial y_3}{\partial x_1}\boldsymbol{E}_3\otimes\boldsymbol{I}_p+\frac{\partial y_3}{\partial x_3}\boldsymbol{E}_3\otimes\boldsymbol{E}_3 & si \quad x_1=x_2\end{cases} \tag{44}$$

Où $\boldsymbol{I}_p$ est la matrice de la projection orthogonale de $\boldsymbol{I}_S$ dans le plan $(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)$:

$$\boldsymbol{I}_p=\begin{cases}\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) & \text{si } i,j,k,l\in\{1,2\}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{45}$$

5.2.3 Cas tridimensionnel

En dimension trois, l'équation caractéristique $det(\boldsymbol{X}-x_\alpha\boldsymbol{I})=0$ donne une équation cubique des valeurs propres $x_{\alpha=1,2,3}$ de $\boldsymbol{X}$ du type suivant :

$$x_\alpha^3-I_1x_\alpha^2+I_2x_\alpha-I_3=0 \text{ avec } \alpha=1,2,3 \tag{46}$$

Avec :

$$\begin{cases}I_1=trace(\boldsymbol{X})\\ I_2=\frac{1}{2}\left[trace(\boldsymbol{X})^2-trace(\boldsymbol{X}^2)\right]\\ I_3=det(\boldsymbol{X})\end{cases} \tag{47}$$

La résolution du problème spectral donne aisément les solutions suivantes pour les valeurs propres :

$$\begin{cases}x_1=-2\sqrt{Q}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)+\frac{I_1}{3}\\ x_2=-2\sqrt{Q}\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right)+\frac{I_1}{3}\\ x_3=-2\sqrt{Q}\cos\left(\frac{\theta-2\pi}{3}\right)+\frac{I_1}{3}\end{cases} \tag{48}$$

Où Q et θ sont donnés par :

$$Q=\frac{I_1^2-3I_2}{9} \text{ et } \theta=\cos^{-1}\left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}}\right) \tag{49}$$

Avec :

$$R=\frac{-2I_1^3+9I_1I_2-27I_3}{54} \tag{50}$$

Et les vecteurs propres, en tenant compte de la multiplicité des valeurs propres :

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_\alpha=\dfrac{x_\alpha}{2x_\alpha^3-I_1x_\alpha^2+I_3}\left[\boldsymbol{X}^2+(x_\alpha-I_1)\boldsymbol{X}+\dfrac{I_3}{x_\alpha}\boldsymbol{I}\right] & si\quad x_1\neq x_2\neq x_3 \\ \boldsymbol{E}_\beta=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{E}_\alpha & si\quad x_\alpha\neq x_\beta \\ \boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{I} & si\quad x_1=x_2=x_3 \end{cases} \tag{51}$$

Dans la deuxième équation de (**51**), $\boldsymbol{E}_\alpha$ est calculé à l'aide la première équation. Sans donner les étapes intermédiaires de calcul, la dérivée $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$, en tenant compte de la multiplicité des valeurs propres, s'écrit finalement :

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})=\begin{cases} \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{y_\alpha}{(x_\alpha-x_\beta)(x_\alpha-x_\gamma)}\left[\frac{d\boldsymbol{X}^2}{d\boldsymbol{X}}-(x_\beta+x_\gamma)\boldsymbol{I}_S\right. & \\ \left.-(2x_\alpha-x_\beta-x_\gamma)\boldsymbol{E}_\alpha\otimes\boldsymbol{E}_\alpha-(x_\beta-x_\gamma)(\boldsymbol{E}_\beta\otimes\boldsymbol{E}_\beta-\boldsymbol{E}_\gamma\otimes\boldsymbol{E}_\gamma)\right] & si\quad x_1\neq x_2\neq x_3 \\ \displaystyle+\sum_{a=1}^{3}\sum_{b=1}^{3}\frac{\partial y_a}{\partial x_b}\boldsymbol{E}_a\otimes\boldsymbol{E}_b & \\ s_1\dfrac{d\boldsymbol{X}^2}{d\boldsymbol{X}}-s_2\boldsymbol{I}_S-s_3\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{X}+s_4\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{I}+s_5\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{X}-s_6\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} & si\quad x_\alpha\neq x_\beta=x_\gamma \\ \left(\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}-\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{I}_S+\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} & si\quad x_1=x_2=x_3 \end{cases} \tag{52}$$

Où (α,β,γ) correspond à une permutation cyclique de $(1,2,3)$. $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{I}_S$ sont donnés par les équations (**41**) et (**42**), respectivement. En remarquant que $\boldsymbol{X}$ est un tenseur symétrique, il faut prendre garde à appliquer l'opérateur de dérivation symétrique pour l'évaluation de $\frac{d\boldsymbol{X}^2}{d\boldsymbol{X}}$, ce qui donne la forme suivante :

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\boldsymbol{X}^2}{d\boldsymbol{X}}\right)_{ijkl} &=\frac{d(X_{im}X_{mj})}{dX_{kl}}=\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{lm}+\delta_{il}\delta_{km})X_{mj}+\frac{X_{im}}{2}(\delta_{mk}\delta_{jl}+\delta_{ml}\delta_{kj}) \\ &=\frac{1}{2}(\delta_{ik}X_{lj}+\delta_{il}X_{kj}+\delta_{jl}X_{ik}+\delta_{kj}X_{il})\end{aligned} \tag{53}$$

Enfin, les expressions de $s_{i=1,6}$ sont les suivantes :

$$\begin{aligned} s_1&=\frac{y_\alpha-y_\gamma}{(x_\alpha-x_\gamma)^2}+\frac{1}{x_\alpha-x_\gamma}\left(\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\beta}-\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\gamma}\right)\\ s_2&=2x_\gamma\frac{y_\alpha-y_\gamma}{(x_\alpha-x_\gamma)^2}+\frac{x_\alpha+x_\gamma}{x_\alpha-x_\gamma}\left(\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\beta}-\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\gamma}\right)\\ s_3&=2\frac{y_\alpha-y_\gamma}{(x_\alpha-x_\gamma)^3}+\frac{1}{(x_\alpha-x_\gamma)^2}\left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\gamma}\right)\\ s_4&=2x_\gamma\frac{y_\alpha-y_\gamma}{(x_\alpha-x_\gamma)^3}+\frac{1}{x_\alpha-x_\gamma}\left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\gamma}-\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\beta}\right)+\frac{x_\gamma}{(x_\alpha-x_\gamma)^2}\left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\gamma}\right)\\ s_5&=2x_\gamma\frac{y_\alpha-y_\gamma}{(x_\alpha-x_\gamma)^3}+\frac{1}{x_\alpha-x_\gamma}\left(\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\beta}\right)+\frac{x_\gamma}{(x_\alpha-x_\gamma)^2}\left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\gamma}\right)\\ s_6&=2x_\gamma^2\frac{y_\alpha-y_\gamma}{(x_\alpha-x_\gamma)^3}+\frac{x_\alpha x_\gamma}{(x_\alpha-x_\gamma)^2}\left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha}\right)-\frac{x_\gamma^2}{(x_\alpha-x_\gamma)^2}\left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\gamma}\right)-\frac{x_\alpha+x_\gamma}{x_\alpha-x_\gamma}\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\beta} \end{aligned} \tag{54}$$

Où (α, β, γ) correspond à une permutation cyclique de $(1, 2, 3)$.

Remarque :

On remarque le terme suivant :

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{y_\alpha}{(x_\alpha - x_\beta)(x_\alpha - x_\gamma)} \left[\frac{d\,\boldsymbol{X}^2}{d\,\boldsymbol{X}} - (x_\beta + x_\gamma)\boldsymbol{I}_S - (2\,x_\alpha - x_\beta - x_\gamma)\boldsymbol{E}_\alpha \otimes \boldsymbol{E}_\alpha \right. \\ \left. - (x_\beta - x_\gamma)(\boldsymbol{E}_\beta \otimes \boldsymbol{E}_\beta - \boldsymbol{E}_\gamma \otimes \boldsymbol{E}_\gamma) \right] \tag{55}$$

Ce terme apparaît dans la dérivée $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$ de la première équation de (**52**) et exprime la rotation des directions principales dans l'espace tridimensionnel.

6 Annexe : convention sur les notations tensorielles

Les vecteurs des déformations et des contraintes dans la base principale $(\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3)$ sont notés :

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\end{Bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\sigma}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\end{Bmatrix} \quad (56)$$

Le tenseur d'élasticité $\boldsymbol{C}$ permettant de relier $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ dans la base principale, tel que $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{C}.\boldsymbol{\varepsilon}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}K+\frac{4}{3}G & K-\frac{2}{3}G & K-\frac{2}{3}G\\ K-\frac{2}{3}G & K+\frac{4}{3}G & K-\frac{2}{3}G\\ K-\frac{2}{3}G & K-\frac{2}{3}G & K+\frac{4}{3}G\end{bmatrix} \quad (57)$$

Avec K le module de compressibilité élastique et G le module de cisaillement élastique. Les déformations et les contraintes sont des tenseurs symétriques d'ordre deux. On exploite généralement cette symétrie (six composantes indépendantes) en les représentant par des vecteurs de dimension six résultants de la projection de ces tenseurs dans des bases appropriées.
Les déformations et les contraintes données en entrée et produites en sortie de la résolution de la loi de comportement sont exprimées dans la base orthonormée des tenseurs symétriques d'ordre deux, notée $\bar{\boldsymbol{b}}$:

$$\bar{\boldsymbol{b}}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_x\\ \boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_y\\ \boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_x}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_z+\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_x}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_z+\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_y}{\sqrt{2}}\end{Bmatrix} \quad (58)$$

Où $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ représentent les vecteurs unitaires de la base orthonormée cartésienne globale, supposée fixe. L'expression condensée des tenseurs des déformations et des contraintes projetés dans la base $\bar{\boldsymbol{b}}$ s'écrit :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\\varepsilon_{yy}\\\varepsilon_{zz}\\\sqrt{2}\,\varepsilon_{xy}\\\sqrt{2}\,\varepsilon_{yz}\\\sqrt{2}\,\varepsilon_{xz}\end{Bmatrix} \text{ et } \bar{\boldsymbol{\sigma}}=\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\\sigma_{yy}\\\sigma_{zz}\\\sqrt{2}\,\sigma_{xy}\\\sqrt{2}\,\sigma_{yz}\\\sqrt{2}\,\sigma_{xz}\end{Bmatrix} \quad (59)$$

Cette écriture fait apparaître un terme en $\sqrt{2}$ devant les composantes croisées. Elle permet de :

- Exprimer le tenseur d'élasticité d'ordre quatre de 81 composantes par un tenseur d'ordre deux de 36 composantes ;
- Symétriser ce tenseur d'élasticité.

En effet, en notant $\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$, sa forme projetée dans la base $\bar{\boldsymbol{b}}$ devient $\bar{\sigma}_i=\bar{C}_{ij}\bar{\varepsilon}_j$, où on a l'expression suivante pour $\bar{\boldsymbol{C}}$:

$$\bar{\boldsymbol{C}}=\begin{bmatrix} C_{xxxx} & C_{xxyy} & C_{xxzz} & \sqrt{2}C_{xxxy} & \sqrt{2}C_{xxxz} & \sqrt{2}C_{xxyz} \\ C_{xxyy} & C_{yyyy} & C_{yyzz} & \sqrt{2}C_{yyxy} & \sqrt{2}C_{yyxz} & \sqrt{2}C_{yyyz} \\ C_{zzxx} & C_{zzyy} & C_{zzzz} & \sqrt{2}C_{zzxy} & \sqrt{2}C_{zzxz} & \sqrt{2}C_{zzyz} \\ \sqrt{2}C_{xyxx} & \sqrt{2}C_{xyyy} & \sqrt{2}C_{xyzz} & 2C_{xyxy} & 2C_{xyxz} & 2C_{xyyz} \\ \sqrt{2}C_{xzxx} & \sqrt{2}C_{xzyy} & \sqrt{2}C_{xzzz} & 2C_{xzxy} & 2C_{xzxz} & 2C_{xzyz} \\ \sqrt{2}C_{yzxx} & \sqrt{2}C_{yzyy} & \sqrt{2}C_{yzzz} & 2C_{yzxy} & 2C_{yzxz} & 2C_{yzyz} \end{bmatrix} \quad (60)$$

La forme condensée (**60**) n'est pas commode à utiliser à cause de la nécessité de manipuler les termes en $\sqrt{2}$ lors des opérations matricielles. On lui préfère une autre écriture, basée sur la projection dans la base dite de Voigt, notée $\tilde{\boldsymbol{b}}$ et ayant l'expression suivante :

$$\hat{\boldsymbol{b}}=\begin{cases} \boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_z \end{cases} \quad (61)$$

L'expression condensée des tenseurs des déformations et des contraintes projetés dans la base de Voigt $\hat{\boldsymbol{b}}$ s'écrit :

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}=\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \text{ et } \hat{\boldsymbol{\sigma}}=\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (62)$$

Cette écriture permet de s'affranchir des termes en $\sqrt{2}$ devant les composantes croisées, et est plus commode à utiliser au cours de la résolution numérique de la loi de comportement.

7 Bibliographie

[1] **Karaoulanis, F.** (**2008**). *Nonsmooth multisurface plasticity in principal stress space*, In: *6th GRACM International Congress on Computational Mechanics*.

[2] **Borja, R.; Sama, K. and Sanz, P.** (**2003**). *On the numerical integration of three-invariant elastoplastic constitutive models*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 192, pp. 1227-1258.

[3] **Sloan, S. and Booke, J.** (**1986**). *Removal of singularities in Tresca and Mohr-Coulomb yield functions*, International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering 2, pp. 173-179.

[4] **Pankaj, N. B.** (**1997**). *Detection of multiple active yield conditions for Mohr-Coulomb elasto-plasticity*, Computers and Structures 62, pp. 51-61.

[5] **Betbeder-Matibet, J.**, (**2003**). *Prévention parasismique - Volume 3*. Lavoisier.

[6] **Wang, X.; Wang, L. and Xu, L.** (**2004**). *Formulation of the return mapping algorithm for elastoplastic soil models*, Computers and Geotechnics 31, pp. 315-338.

[7] **Jiang, H. and Xie, Y.** (**2011**). *A note on the Mohr-Coulomb and Drucker-Prager strenght criteria*, Mechanics Research Communications 38, pp. 309-314.