

## Loi de comportement viscoplastique VISC\_DRUC\_PRAG

---

### Résumé :

Ce document décrit la loi de comportement viscoplastique VISC\_DRUC\_PRAG basée sur le modèle élastoplastique de Drucker-Prager et prenant en compte la viscosité selon une loi puissance de type Perzyna. Son domaine d'application est l'argilite qui est la roche hôte du concept de stockage.

Le modèle proposé comporte un seul mécanisme viscoplastique. Le critère s'écrouit avec la déformation viscoplastique cumulée en passant par trois seuils: élastique, de pic et ultime. L'écoulement est non associé, le potentiel d'écoulement étant un potentiel de Drucker-Prager s'écrouissant selon trois niveaux : élastique, de pic et ultime. Entre les seuils, les écrouissements sont linéaires.

Cette loi peut être utilisée dans une modélisation mécanique pure comme elle peut être utilisée dans une modélisation THM. Elle est disponible en 3D, déformations planes et axisymétrique. Elle est intégrée par la résolution d'une seule équation scalaire non linéaire.

## Table des matières

---

1 Notations.....	3
2 Introduction.....	4
3 Formulation du modèle viscoplastique VISC_DRUC_PRAG.....	4
3.1 Équations du modèle.....	4
4 Intégration dans Code_Aster.....	6
4.1 Décomposition du tenseur de déformation.....	6
4.2 Mise à jour des contraintes.....	7
4.3 Opérateur tangent cohérent.....	11
4.4 Données matériaux.....	13
4.5 Les variables internes .....	13
4.6 Résumé de l'algorithme de résolution.....	14
5 Résultats d'un essai triaxial.....	16
6 Fonctionnalités et vérification.....	18
7 Références.....	18
8 Descriptif des versions du document.....	18

## 1 Notations

$\sigma$  désigne le tenseur des contraintes effectives en petites perturbations, noté sous la forme du vecteur suivant :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2} \sigma_{12} \\ \sqrt{2} \sigma_{13} \\ \sqrt{2} \sigma_{23} \end{pmatrix}$$

On note :

$$\mathbf{D}^e$$

tenseur d'élasticité

$$I_1 = \text{tr}(\sigma)$$

premier invariant des contraintes

$$\mathbf{s} = \sigma - \frac{I_1}{3} \mathbf{Id}$$

tenseur des contraintes déviatoires

$$s_{II} = \sqrt{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}}$$

deuxième invariant du tenseur des contraintes déviatoires

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$$

contrainte équivalente

$$I_1^{el}$$

trace de la prédiction élastique des contraintes

$$\mathbf{s}^{el} = \sigma^{el} - \frac{I_1^{el}}{3} \mathbf{Id}$$

tenseur des contraintes déviatoires de la prédiction élastique des contraintes

$$\sigma_{\text{eq}}^{el} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij}^{el} s_{ij}^{el}}$$

contrainte équivalente de la prédiction élastique des contraintes

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})}{3} \mathbf{Id}$$

déviateur des déformations

$$\varepsilon_v = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$$

déformation volumique

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{ij}^{vp} \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{ij}^{vp}}$$

déformations déviatoriques viscoplastiques cumulées

$$f$$

surface de charge viscoplastique

$$G$$

potentiel d'écoulement viscoplastique

$$\alpha_0, R_0 \text{ et } \beta_0$$

paramètres d'écrouissage correspondant au seuil d'élasticité ( $p=0$ )

$$\alpha_{pic}, R_{pic} \text{ et } \beta_{pic}$$

paramètres d'écrouissage correspondant au pic ( $p = p_{pic}$ )

$$\alpha_{ult}, R_{ult} \text{ et } \beta_{ult}$$

paramètres d'écrouissage correspondant au seuil ultime ( $p = p_{ult}$ )

$$\Phi$$

amplitude de la vitesse des déformations irréversibles

$$A$$

paramètre de fluage

$$n$$

puissance de la loi de fluage

$$P_{ref}$$

pression de référence

## 2 Introduction

Ce document décrit l'intégration de la loi de comportement viscoplastique VISC\_DRUC\_PRAG dans Code\_Aster. Cette loi comporte un seul mécanisme viscoplastique. Le critère viscoplastique s'écroute avec la déformation viscoplastique déviatorique cumulée en passant par trois seuils : élastique pour une déformation viscoplastique nulle, un seuil dit de pic pour une déformation viscoplastique dite de pic (paramètre du modèle) et un seuil ultime pour une déformation viscoplastique dite ultime (paramètre du modèle). Entre les seuils, les fonctions d'écroûissage sont linéaires. Dans Code\_Aster il existe une autre loi basée sur le modèle de Drücker-Prager et utilisée en élastoplasticité sous une forme associée sous le nom DRUCK\_PRAGER ou non associée sous le nom DRUCK\_PRAG\_N\_A (voir [R7.01.16]).

## 3 Formulation du modèle viscoplastique VISC\_DRUC\_PRAG

### 3.1 Équations du modèle

Ce modèle se base sur une formulation viscoplastique du type Drücker-Prager, où la surface de charge  $f(\boldsymbol{\sigma}, p)$  est définie par :

$$f = \sqrt{\frac{3}{2}} s_{II} + \alpha(p) I_1 - R(p)$$

$\alpha(p)$  et  $R(p)$  sont des fonctions de la déformation viscoplastique déviatorique cumulée  $p$ ,

On introduit un potentiel d'écoulement viscoplastique  $g(\boldsymbol{\sigma}, p)$  :

$$g = \sqrt{\frac{3}{2}} s_{II} + \beta(p) I_1$$

Pour l'évolution du critère  $f$  et du potentiel  $g$  nous distinguons trois seuils distincts correspondants à trois valeurs de la variable d'écroûissage : un seuil élastique, un seuil de pic et un seuil ultime. Entre ces seuils, l'écroûissage est linéaire. Entre le seuil élastique et le seuil de pic, l'écroûissage est positif, après le pic l'écroûissage est négatif et devient constant après le seuil ultime.

Les fonctions liées à la cohésion s'écrivent sous la forme suivante :

$$\alpha(p) = \left( \frac{\alpha_{pic} - \alpha_0}{p_{pic}} \right) p + \alpha_0 \text{ pour } 0 < p < p_{pic}$$

$$\alpha(p) = \left( \frac{\alpha_{ult} - \alpha_{pic}}{p_{ult} - p_{pic}} \right) (p - p_{pic}) + \alpha_{pic} \text{ pour } p_{pic} < p < p_{ult}$$

$$\alpha(p) = \alpha_{ult} \text{ pour } p > p_{ult}$$

Les fonctions liées à la dilatance s'écrivent sous la forme suivante :

$$\beta(p) = \left( \frac{\beta_{pic} - \beta_0}{p_{pic}} \right) p + \beta_0 \text{ pour } 0 < p < p_{pic}$$

$$\beta(p) = \left( \frac{\beta_{ult} - \beta_{pic}}{p_{ult} - p_{pic}} \right) (p - p_{pic}) + \beta_{pic} \text{ pour } p_{pic} < p < p_{ult}$$

$$\beta(p) = \beta_{ult} \text{ pour } p > p_{ult}$$

Les fonctions d'écrouissage s'écrivent :

$$R(p) = \left( \frac{R_{pic} - R_0}{p_{pic}} \right) p + R_0 \text{ pour } 0 < p < p_{pic}$$

$$R(p) = \left( \frac{R_{ult} - R_{pic}}{p_{ult} - p_{pic}} \right) (p - p_{pic}) + R_{pic} \text{ pour } p_{pic} < p < p_{ult}$$

$$R(p) = R_{ult} \text{ pour } p > p_{ult}$$

Les contraintes sont reliées aux déformations par la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{vp})$$

Quand le seuil viscoplastique est atteint, des déformations irréversibles viscoplastiques sont générées et exprimées selon la théorie de Perzyna par :

$$d \varepsilon_{ij}^{vp} = A \left\langle \frac{f}{P_{ref}} \right\rangle^n \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} dt$$

$f$  étant le critère de viscoplasticité ;  $A$  et  $n$  sont des paramètres du modèle ;  $P_{ref}$  une pression de référence.

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial s_{II}}{\partial \sigma_{ij}} + \beta(p) \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} \text{ et } \dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}^{vp} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}^{vp}$$

avec,  $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{vp}$  le déviateur du tenseur de déformation viscoplastique,

$$\frac{\partial s_{II}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial s_{II}}{\partial s_{kl}} \frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{s_{kl}}{s_{II}} \left( \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) = \frac{s_{ij}}{s_{II}}$$

et

$$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ij}$$

d'où

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s_{ij}}{s_{II}} + \beta(p) \delta_{ij}$$

## Résumé des équations :

### Le critère :

$$f = \sqrt{\frac{3}{2}} s_{II} + \left[ \left( \frac{\alpha_{pic} - \alpha_0}{P_{pic}} \right) p + \alpha_0 \right] I_1 - \left[ \left( \frac{R_{pic} - R_0}{P_{pic}} \right) p + R_0 \right] \quad \text{pour } 0 < p < p_{pic}$$

$$f = \sqrt{\frac{3}{2}} s_{II} + \left[ \left( \frac{\alpha_{ult} - \alpha_{pic}}{P_{ult} - P_{pic}} \right) (p - p_{pic}) + \alpha_{pic} \right] I_1 - \left[ \left( \frac{R_{ult} - R_{pic}}{P_{ult} - P_{pic}} \right) (p - p_{pic}) + R_{pic} \right] \quad \text{pour } p_{pic} < p < p_{ult}$$

$$f = \sqrt{\frac{3}{2}} s_{II} + \alpha_{ult} I_1 - R_{ult} \quad \text{pour } p \geq p_{ult} :$$

### Le potentiel d'écoulement :

$$g = \sqrt{\frac{3}{2}} s_{II} + \left[ \left( \frac{\beta_{pic} - \beta_0}{P_{pic}} \right) p + \beta_0 \right] I_1 \quad \text{pour } 0 < p < p_{pic}$$

$$g = \sqrt{\frac{3}{2}} s_{II} + \left[ \left( \frac{\beta_{ult} - \beta_{pic}}{P_{ult} - P_{pic}} \right) (p - p_{pic}) + \beta_{pic} \right] I_1 \quad \text{pour } p_{pic} < p < p_{ult}$$

$$g = \sqrt{\frac{3}{2}} s_{II} + \beta_{ult} I_1 \quad \text{pour } p \geq p_{ult}$$

$\alpha_0$  ,  $R_0$  et  $\beta_0$  : paramètres d'écrouissage correspondant au seuil d'élasticité (  $p=0$  )

$\alpha_{pic}$  ,  $R_{pic}$  et  $\beta_{pic}$  : paramètres d'écrouissage correspondant au paramètre  $P_{pic}$

$\alpha_{ult}$  ,  $R_{ult}$  et  $\beta_{ult}$  : paramètres d'écrouissage correspondant au paramètre  $P_{ult}$

### La loi de Hooke :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{vp})$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}, p) \leq 0 \quad \text{domaine d'élasticité ; } \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = 0$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}, p) > 0 \quad \text{viscoplasticité ; } \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = A \left\langle \frac{f}{P_{ref}} \right\rangle^n \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} ; \dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$$

## 4 Intégration dans Code\_Aster

### 4.1 Décomposition du tenseur de déformation

La décomposition de l'incrément de déformation totale s'écrit :

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$$

où  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e$  et  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$  sont les incréments des tenseurs élastiques et viscoplastiques.

## 4.2 Mise à jour des contraintes

Les notations suivantes sont adoptées :  $A^-$ ,  $A$  et  $\Delta A$  désignant respectivement les quantités au début, à la fin du pas de temps et son incrément durant le pas.

On exprime les contraintes actualisées à l'instant  $t^+$  par rapport à celles calculées à l'instant  $t^-$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^- + \mathbf{D}^e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e ; \mathbf{s} = \mathbf{s}^- + 2\mu \Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e ; I_1 = I_1^- + 3K \Delta \varepsilon_v^e$$

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \frac{I_1}{3} \delta_{ij}$$

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta \tilde{\varepsilon}_{ij} + \text{tr} \left( \frac{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{3} \right) \delta_{ij} = \Delta \tilde{\varepsilon}_{ij} + \frac{\Delta \varepsilon_v}{3} \delta_{ij}$$

$$I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) ; \varepsilon_v = \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon})$$

Prédiction élastique :

$$\boldsymbol{\sigma}^{el} = \boldsymbol{\sigma}^- + \mathbf{D}^e \Delta \boldsymbol{\varepsilon} ; \mathbf{s}^{el} = \mathbf{s}^- + 2\mu \Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} ; I_1^{el} = I_1^- + 3K \Delta \varepsilon_v$$

### 4.2.1 Solution élastique

Calcul de l'incrément des contraintes en régime élastique :

$$\Delta \sigma_{ij} = \Delta s_{ij} + \frac{\Delta I_1}{3} \delta_{ij} ; \Delta \varepsilon_{ij} = \Delta \tilde{\varepsilon}_{ij} + \frac{\Delta \varepsilon_v}{3} \delta_{ij}$$

$$\Delta \sigma_{ij} = 2\mu \Delta \tilde{\varepsilon}_{ij} + 3K \frac{\Delta \varepsilon_v}{3} \delta_{ij} = 2\mu \Delta \tilde{\varepsilon}_{ij} + K \Delta \varepsilon_v \delta_{ij} = 2\mu \left( \Delta \varepsilon_{ij} - \frac{\text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon})}{3} \delta_{ij} \right) + K \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) \delta_{ij}$$

$$\Delta \sigma_{ij} = 2\mu \Delta \varepsilon_{ij} + \left( K - \frac{2G}{3} \right) \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) \delta_{ij}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Delta \sigma_{11} \\ \Delta \sigma_{22} \\ \Delta \sigma_{33} \\ \sqrt{2} \Delta \sigma_{12} \\ \sqrt{2} \Delta \sigma_{13} \\ \sqrt{2} \Delta \sigma_{23} \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}^e} = \begin{bmatrix} \frac{4\mu}{3} + K & K - \frac{2\mu}{3} & K - \frac{2\mu}{3} & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2\mu}{3} & \frac{4\mu}{3} + K & K - \frac{2\mu}{3} & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2\mu}{3} & K - \frac{2\mu}{3} & \frac{4\mu}{3} + K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_{11} \\ \Delta \varepsilon_{22} \\ \Delta \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2} \Delta \varepsilon_{12} \\ \sqrt{2} \Delta \varepsilon_{13} \\ \sqrt{2} \Delta \varepsilon_{23} \end{pmatrix}$$

### 4.2.2 Solution viscoplastique

On exprime le champ de contraintes à l'instant  $t^+$  :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^- + D_{ijkl}^e \Delta \varepsilon_{kl}^e = \sigma_{ij}^- + D_{ijkl}^e (\Delta \varepsilon_{kl} - \Delta \varepsilon_{kl}^{vp}) = \sigma_{ij}^{el} - D_{ijkl}^e \Delta \varepsilon_{kl}^{vp}$$

$$s_{ij} = s_{ij}^{el} - 2\mu \Delta \tilde{\varepsilon}_{ij}^{vp} \text{ et } I_1 = I_1^{el} - 3K \Delta \varepsilon_v^{vp}$$

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \frac{I_1}{3} \delta_{ij}$$

qui s'écrit en remplaçant l'accroissement des déformations visqueuses par leurs expressions sous la forme :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{el} - D_{ijkl}^{el} \langle \Phi \rangle \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}(\sigma, p) \Delta t \quad \text{avec} \quad \Phi = A \left( \frac{f(\sigma, p)}{P_{ref}} \right)^n \quad \text{où}$$

$\Phi$  et  $\frac{\partial g}{\partial \sigma}$  caractérisent l'amplitude et la direction de la vitesse des déformations irréversibles.

$f(\sigma, p)$  étant le critère de viscoplasticité,  $A$  et  $n$  sont des paramètres du modèle.

Le critère viscoplastique à l'instant  $t^+$  s'écrit :

$$f(\sigma, p) = f\left(\sigma_{ij}^{el} - D_{ijkl}^{el} \langle \Phi \rangle \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}(\sigma, p) \Delta t, p\right)$$

L'incrément de la déformation viscoplastique étant :

$$\Delta \varepsilon_{ij}^{vp} = \langle \Phi \rangle \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \Delta t = \langle \Phi \rangle \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s_{ij}}{s_{II}} + \beta(p) \delta_{ij} \right) \Delta t$$

La déformation volumique viscoplastique étant :

$$\Delta \varepsilon_v^{vp} = 3 \langle \Phi \rangle \beta(p) \Delta t$$

La composante déviatorique de la déformation viscoplastique s'écrit sous la forme :

$$\Delta \tilde{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \langle \Phi \rangle \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s_{ij}}{s_{II}} \Delta t \quad \text{ou} \quad \Delta \tilde{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \langle \Phi \rangle \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{\sigma_{eq}} \Delta t$$

comme  $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} s_{II}$ ,  $s_{II} = \sqrt{s_{ij} s_{ij}}$  et  $\sigma_{eq}^{el} = \sqrt{\frac{3}{2}} s_{ij}^{el} s_{ij}^{el}$

On écrit aussi les égalités suivantes :

$$s_{ij} \frac{\sigma_{eq}^{el}}{\sigma_{eq}} = s_{ij}^{el}$$

$$\Delta p = \sqrt{\left( \frac{2}{3} \Delta \tilde{\varepsilon}_{ij}^{vp} \Delta \tilde{\varepsilon}_{ij}^{vp} \right)}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \langle \Phi \rangle = A \left\langle \frac{f(\sigma, p)}{P_{ref}} \right\rangle^n \quad \text{éq 1}$$

d'où :  $\Delta p = \langle \Phi \rangle \Delta t$

En utilisant ces égalités on peut trouver une expression pour  $s_{ij}$ ,  $\sigma_{eq}$  et  $I_1$  en fonction de  $s_{ij}^{el}$ ,  $\sigma_{eq}^{el}$ ,  $I_1^{el}$  et  $\Delta p$  :



$$s_{ij} = s_{ij}^{el} - 2\mu \Delta \varepsilon_{ij}^{vp} = s_{ij}^{el} - 3\mu \langle \Phi \rangle \frac{s_{ij}}{\sigma_{eq}} \Delta t = s_{ij}^{el} - 3\mu \langle \Phi \rangle \frac{s_{ij}^{el}}{\sigma_{eq}^{el}} \Delta t$$

$$s_{ij} = s_{ij}^{el} \left( 1 - \frac{3\mu \langle \Phi \rangle}{\sigma_{eq}^{el}} \Delta t \right) = s_{ij}^{el} \left( 1 - \frac{3\mu}{\sigma_{eq}^{el}} \Delta p \right)$$

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eq}^{el} - 3\mu \langle \Phi \rangle \Delta t = \sigma_{eq}^{el} - 3\mu \Delta p \quad \text{éq 2}$$

$$I_1 = I_1^{el} - 3K \Delta \varepsilon_v^{vp} = I_1^{el} - 9K \beta \langle \Phi \rangle \Delta t = I_1^{el} - 9K \beta \Delta p \quad \text{éq 3}$$

## 4.2.3 Calcul de l'inconnue

L'incrément de déformation viscoplastique cumulée  $\Delta p$  est la seule inconnue du problème. Pour le déterminer, on écrit la loi d'écoulement viscoplastique (éq 1) :

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = A \left( \frac{\sigma^{eq} + \alpha(p) I_1 - R(p)}{P_{ref}} \right)^n$$

$$R(p) = R(p^- + \Delta p) = R^- + R_{const} \Delta p ; R_{const} = \frac{\partial R}{\partial p}$$

$$\alpha(p) = \alpha(p^- + \Delta p) = \alpha^- + \alpha_{const} \Delta p ; \alpha_{const} = \frac{\partial \alpha}{\partial p}$$

$$\beta(p) = \beta(p^- + \Delta p) = \beta^- + \beta_{const} \Delta p ; \beta_{const} = \frac{\partial \beta}{\partial p}$$

Par souci de simplification de l'écriture de l'équation en  $\Delta p$ , on pose :

$$C = \frac{A \Delta t}{P_{ref}^n}$$

Soit, en remplaçant  $\sigma_{eq}$  et  $I_1$  par leurs expressions (éq 2 et éq 3), on obtient :

$$F(\Delta p) = C \left( \frac{(\sigma_{eq}^{el} + \alpha I_1^{el} - R^-) - (3\mu + R_{const} - \alpha_{const} I_1^{el} + 9K \alpha^- \beta^-) \Delta p}{(9K \alpha^- \beta_{const} + 9K \alpha_{const} \beta^-) \Delta p^2 - (9K \alpha_{const} \beta_{const}) \Delta p^3} \right)^n - \Delta p = 0$$

On cherche  $\Delta p$  tel que  $F(\Delta p) = 0$ .

$F(\Delta p) = 0$  est une équation scalaire non linéaire. La borne inférieure étant  $x_{inf} = 0$  et la borne supérieure peut être fixée à :

$$x_{sup} = A \left( \frac{\sigma_{eq}^{el} + \alpha I_1^{el} - R^-}{P_{ref}} \right)^n \Delta t$$

On utilise la méthode des cordes avec un contrôle de l'intervalle de recherche en s'inspirant du document [R5.03.04].

$$\Delta p \in [x_{\text{inf}}, x_{\text{sup}}] ;$$

$$x = \Delta p$$

Si  $|F(x_{\text{inf}})| < \eta$  alors  $\Delta p = x_{\text{inf}}$

Si  $|F(x_{\text{sup}})| < \eta$  alors  $\Delta p = x_{\text{sup}}$

Si  $F(x_{\text{inf}}) > 0$  alors  $x_2 = x_{\text{inf}}$  et  $y_2 = F(x_{\text{inf}})$

Si  $F(x_{\text{sup}}) < 0$  alors on fait une boucle en découpant  $x_{\text{sup}}$  par 10 jusqu'à obtenir une valeur de  $x_{\text{sup}}$  pour laquelle  $F(x_{\text{sup}}) > 0$  dans ce cas on multiplie la dernière solution par 10 et on fixe  $x_1 = x_{\text{sup}}$  et  $y_1 = F(x_{\text{sup}})$

Si  $F(x_{\text{sup}}) > 0$  alors on fait une boucle en multipliant  $x_{\text{sup}}$  par 10 jusqu'à obtenir une valeur de  $x_{\text{sup}}$  pour laquelle  $F(x_{\text{sup}}) < 0$  et on fixe  $x_1 = x_{\text{sup}}$  et  $y_1 = F(x_{\text{sup}})$

Si  $F(x_{\text{inf}}) < 0$  alors  $x_1 = x_{\text{inf}}$  et  $y_1 = F(x_{\text{inf}})$

Si  $F(x_{\text{sup}}) > 0$  alors on fait une boucle en découpant  $x_{\text{sup}}$  par 10 jusqu'à obtenir une valeur de  $x_{\text{sup}}$  pour laquelle  $F(x_{\text{sup}}) < 0$  dans ce cas on multiplie la dernière solution par 10 et on fixe  $x_2 = x_{\text{sup}}$  et  $y_2 = F(x_{\text{sup}})$

Si  $F(x_{\text{sup}}) < 0$  alors on fait une boucle en multipliant  $x_{\text{sup}}$  par 10 jusqu'à obtenir une valeur de  $x_{\text{sup}}$  pour laquelle  $F(x_{\text{sup}}) > 0$  et on fixe  $x_2 = x_{\text{sup}}$  et  $y_2 = F(x_{\text{sup}})$

Des vérifications sont faites sur les valeurs que peuvent prendre les bornes et notamment si elles sont plus faibles qu'une tolérance fixée à 1.E-12, elles seront considérées égales à 0. et donc la solution  $\Delta p$  également. Si les bornes sont égales, on fait un re-découpage du pas de temps.

Les valeurs  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$  et  $y_2$  seront les valeurs à donner en entrée à la routine `zeroco` qui se base sur la méthode des cordes. La solution est calculée par la formule suivante :

$$x^{n+1} = x^{n-1} - F(x^{n-1}) \frac{x^n - x^{n-1}}{F(x^n) - F(x^{n-1})}$$

Avec les valeurs suivantes, on représente la fonction scalaire à résoudre.

$\sigma_{eq}^{el}$	6,315 MPa	$\alpha^-$	$6,86 \cdot 10^{-2}$
$I_1^{el}$	-21,061 MPa	$\beta^-$	-0,147
$N$	4,5	$R^-$	1,394 MPa
$\Delta t$	10 s	$\alpha_{const}$	13.
$A$	$1,5 \cdot 10^{-12}$	$\beta_{const}$	10.
$P_{ref}$	0,1 MPa	$R_{const}$	329,732 MPa

L'inconnue  $x$  pour laquelle  $F(x)$  s'annule se situe entre  $6 \cdot 10^{-5}$  et  $7 \cdot 10^{-5}$  qui se situe bien entre la borne inférieure  $x_{inf}$  et la borne supérieure  $x_{sup}$  qui vaut dans ce cas précis  $1,291310^{-4}$ .

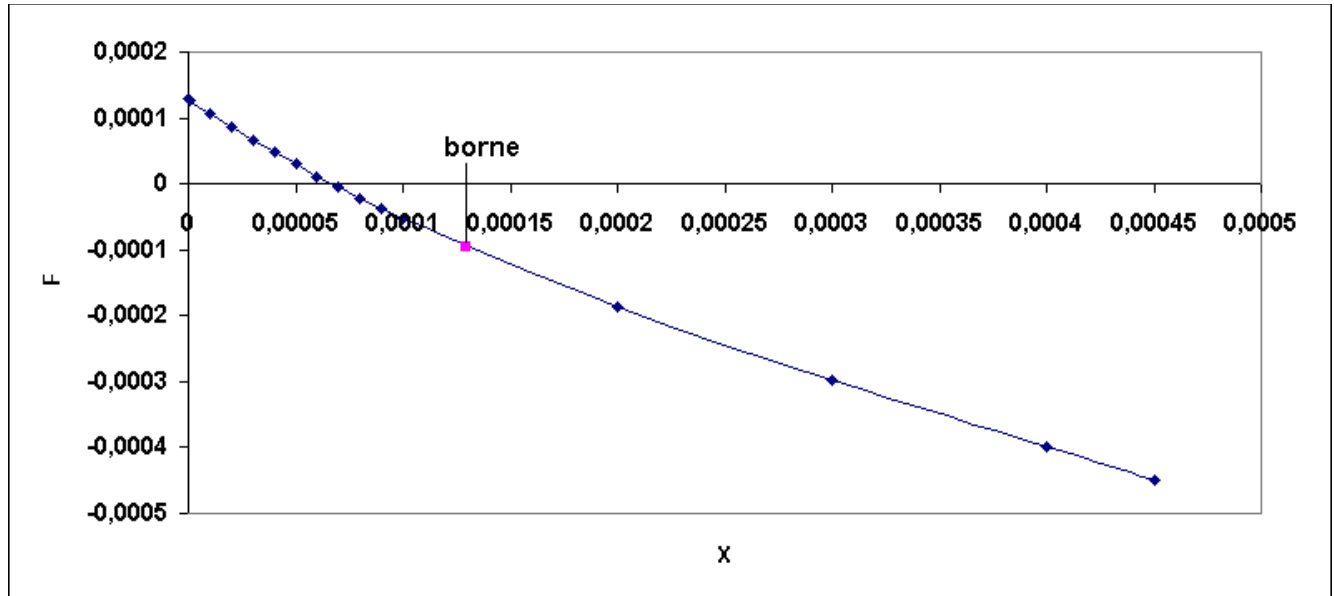


Figure 4-1: Allure de la fonction scalaire

### 4.3 Opérateur tangent cohérent

On cherche à calculer : 
$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{3} \mathbf{Id} \otimes \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$$

Avec :

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \mathbf{s}^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \left( 1 - \frac{3\mu}{\sigma_{eq}^{el}} \cdot \Delta p \right) + \frac{3\mu}{(\sigma_{eq}^{el})^2} \cdot \Delta p \left( \mathbf{s}^{el} \otimes \frac{\partial \sigma_{eq}^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) - \frac{3\mu}{\sigma_{eq}^{el}} \cdot \left( \mathbf{s}^{el} \otimes \frac{\partial \Delta p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial I_1^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} - 9K \beta(p) \frac{\partial \Delta p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$$

Calcul de  $\frac{\partial \mathbf{s}^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  :

$$\frac{\partial \mathbf{s}^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 2\mu \left( \mathbf{Id}_4 - \frac{1}{3} \mathbf{Id} \otimes \mathbf{Id} \right)$$

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial \varepsilon_{pq}} = 2\mu \left( \delta_{ip} \delta_{jq} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{pq} \right)$$

Calcul de  $\frac{\partial I_1^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  :

$$\frac{\partial I_1^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 3 K \mathbf{Id} \text{ soit :}$$

$$\frac{\partial I_1^{el}}{\partial \varepsilon_{pq}} = 3 K \delta_{pq}$$

Calcul de  $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{eq}^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{eq}^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{eq}^{el}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{eq}^{el}}{\partial \mathbf{s}^{el}} \frac{\partial \mathbf{s}^{el}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}^{el}}{\boldsymbol{\sigma}_{eq}^{el}} \left( \mathbf{Id}_4 - \frac{1}{3} \mathbf{Id} \otimes \mathbf{Id} \right) D^e = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}^{el}}{\boldsymbol{\sigma}_{eq}^{el}} \mathbf{D}^e$$

Calcul de  $\frac{\partial \Delta p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  :

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = A \left\langle \frac{f(\boldsymbol{\sigma}, p)}{P_{ref}} \right\rangle^n$$

$$\text{soit } F(\Delta p) = \frac{A \Delta t}{P_{ref}^n} \langle f(\boldsymbol{\sigma}, p) \rangle^n - \Delta p$$

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \Delta p}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$$

pour calculer  $\frac{\partial \Delta p}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}}$ , on utilise  $F(\boldsymbol{\sigma}^{el}, p) = 0$

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}^{el}, p)}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}} \delta \boldsymbol{\sigma}^{el} + \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}^{el}, p)}{\partial \Delta p} \delta \Delta p = 0 \text{ d'où :}$$

$$\frac{\delta \Delta p}{\delta \boldsymbol{\sigma}^{el}} = - \frac{\frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}^{el}, p)}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}}}{\frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}^{el}, p)}{\partial \Delta p}}$$

$$F(\Delta p) = C \left\langle \frac{(\boldsymbol{\sigma}_{eq}^{el} + \alpha I_1^{el} - R^-) - (3\mu + R_{const} - \alpha_{const} I_1^{el} + 9K \alpha^- \beta^-) \Delta p}{(9K \alpha^- \beta_{const} + 9K \alpha_{const} \beta^-) \Delta p^2 - (9K \alpha_{const} \beta_{const}) \Delta p^3} \right\rangle^n - \Delta p = 0$$

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}^{el}, p)}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}} = C \cdot n \cdot \langle f(\boldsymbol{\sigma}^{el}, p) \rangle^{n-1} \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}^{el}, p)}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}}$$

$$\text{où } \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}^{el}, p)}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}} = \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{eq}^{el}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}} + \alpha \frac{\partial I_1^{el}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}} \right) + \alpha_{const} \left( \frac{\partial I_1^{el}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}} \right) \Delta p$$

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}^{el}, p)}{\partial \Delta p} = C.n. \langle f(\boldsymbol{\sigma}^{el}, p) \rangle^{n-1} \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}^{el}, p)}{\partial \Delta p} - 1$$

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}^{el}, p)}{\partial \Delta p} = - \left( 3\mu + R_{const} - \alpha_{const} I_1^{el} + 9K \alpha^- \beta^- \right)$$

$$- 2 \Delta p 9K \left( \alpha^- \beta_{const} + \alpha_{const} \beta^- \right) - 3 \Delta p^2 9K \left( \alpha_{const} \beta_{const} \right)$$

Calcul de  $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{eq}^{el}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}}$  :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{eq}^{el}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{eq}^{el}}{\partial \mathbf{s}^{el}} \frac{\partial \mathbf{s}^{el}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}^{el}}{\boldsymbol{\sigma}_{eq}^{el}} \cdot \left( \mathbf{I}_4 - \frac{1}{3} \mathbf{Id} \otimes \mathbf{Id} \right) = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}^{el}}{\boldsymbol{\sigma}_{eq}^{el}}$$

Calcul de  $\frac{\partial I_1^{el}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}}$  :

$$\frac{\partial I_1^{el}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}} = \frac{\partial \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{el})}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}} = \mathbf{Id}$$

## 4.4 Données matériaux

Les 16 paramètres du modèle sont :

sous ELAS

$E$  : module de Young (  $Pa$  ou  $MPa$  )  
 $\nu$  : coefficient de Poisson

sous VISC\_DRUC\_PRAG

$P_{ref}$  : pression de référence (  $Pa$  ou  $MPa$  )  
 $A$  : paramètre viscoplastique ( en  $s^{-1}$  )  
 $n$  : puissance de la loi fluage  
 $p_{pic}$  : taux d'écroissage au niveau du seuil de pic  
 $p_{ult}$  : taux d'écroissage au niveau du seuil ultime  
 $\alpha_0$ ,  $\alpha_{pic}$  et  $\alpha_{ult}$  : paramètres de la fonction de cohésion  $\alpha(p)$   
 $R_0$ ,  $R_{pic}$  et  $R_{ult}$  : paramètres de la fonction d'écroissage  $R(p)$   
 $\beta_0$ ,  $\beta_{pic}$  et  $\beta_{ult}$  : paramètres de la fonction de dilatance  $\beta(p)$

## 4.5 Les variables internes

$v_1 = p$  : déformation viscoplastique déviatorique cumulée ;

$v_2 = (0 \text{ ou } 1)$  : indicateur de plasticité ;

$v_3 = pos$  : position du point de charge par rapport au seuil :

( pos=1 si  $0 < p < p_{pic}$  ; pos=2 si  $p_{pic} < p < p_{ult}$  ; pos=3 si  $p > p_{ult}$  )  
 $\nu_4$  : nombre d'itérations locales.

## 4.6 Résumé de l'algorithme de résolution

L'algorithme de résolution tel qu'il est implanté dans Code\_Aster :

$$\boldsymbol{\sigma}^{el} = \boldsymbol{\sigma}^- + \mathbf{D}^e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

Le critère :  $f(\boldsymbol{\sigma}^{el}, p^-) = \sigma_{eq}^{el} + \alpha(p^-) I_1^{el} - R(p^-)$

Élasticité : si  $f(\boldsymbol{\sigma}^{el}, p^-) \leq 0$  alors  $\Delta p = 0$  ;

Viscoplasticité : si  $f(\boldsymbol{\sigma}^{el}, p^-) = 0$  alors  $\Delta p \geq 0$  avec  $\Delta p$  solution de l'équation  $F(\Delta p) = 0$

où :

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = A \left\langle \frac{\sigma_{eq}^{el} + \alpha(p) I_1 - R(p)}{P_{ref}} \right\rangle^n = \frac{A}{P_{ref}^n} \langle f(\boldsymbol{\sigma}, p) \rangle^n$$

et

$$F = \frac{A \Delta t}{P_{ref}^n} \langle f(\boldsymbol{\sigma}, p) \rangle^n - \Delta p$$

Mise à jour du tenseur des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{el} - \mathbf{D}^e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^{el} \left( 1 - 3 \frac{\mu}{\sigma_{eq}^{el}} \Delta p \right)$$

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eq}^{el} - 3 G \Delta p$$

$$I_1 = I_1^{el} - 9 K \beta \Delta p$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} + \frac{1}{3} I_1 \mathbf{Id}$$

Une fois que  $\Delta p$  est calculée, les contraintes et les variables internes mises à jour, on vérifie la position de  $p$  par rapport à  $p^-$  et le signe de  $f(\boldsymbol{\sigma}, p)$  :

Si  $0 < p^- < p_{pic}$  ; tester 1) sinon 2) sinon 3)

Si  $p_{pic} < p^- < p_{ult}$  ; tester 2) sinon 3)

Si  $p^- > p_{ult}$  ; tester 3)

Si  $p^- + \Delta p < p_{pic}$  ;

on vérifie  $f(\boldsymbol{\sigma}, p) > 0$  avec  $R$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  correspondantes à  $0 < p < p_{pic}$ ,

si  $f(\boldsymbol{\sigma}, p) > 0$  alors on met à jour les champs de contraintes  
et de variables internes,  
sinon, on considère que  $\Delta p$  n'est pas valable et on re-découpe le pas de temps

Si  $p_{pic} < p^- + \Delta p < p_{ult}$  ;

on vérifie  $f(\boldsymbol{\sigma}, p) > 0$  avec  $R$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  correspondantes à  $p_{pic} < p < p_{ult}$   
si  $f(\boldsymbol{\sigma}, p) > 0$  alors on met à jour les champs de contraintes  
et de variables internes,  
sinon, on considère que  $\Delta p$  n'est pas valable et on redécoupe le pas de temps

Si  $p^- + \Delta p \geq p_{ult}$  ;

on vérifie  $f(\boldsymbol{\sigma}, p) > 0$  avec  $R$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  correspondantes à  $p \geq p_{ult}$   
si  $f(\boldsymbol{\sigma}, p) > 0$  alors on met à jour les champs de contraintes  
et de variables internes,  
sinon, on considère que  $\Delta p$  n'est pas valable et on redécoupe le pas de temps

## 5 Résultats d'un essai triaxial

Il s'agit de simuler un essai triaxial (voir le cas test ssnv211) en imposant comme une contrainte de confinement de  $5\text{ MPa}$ . Une déformation uniaxiale est imposée en compression et qui évolue dans le temps.

La vitesse du chargement est fixée à  $10^{-5}\text{ m/s}$ . Le déviateur des contraintes et la déformation volumique en fonction de la déformation axiale imposée sont représentées ci contre.

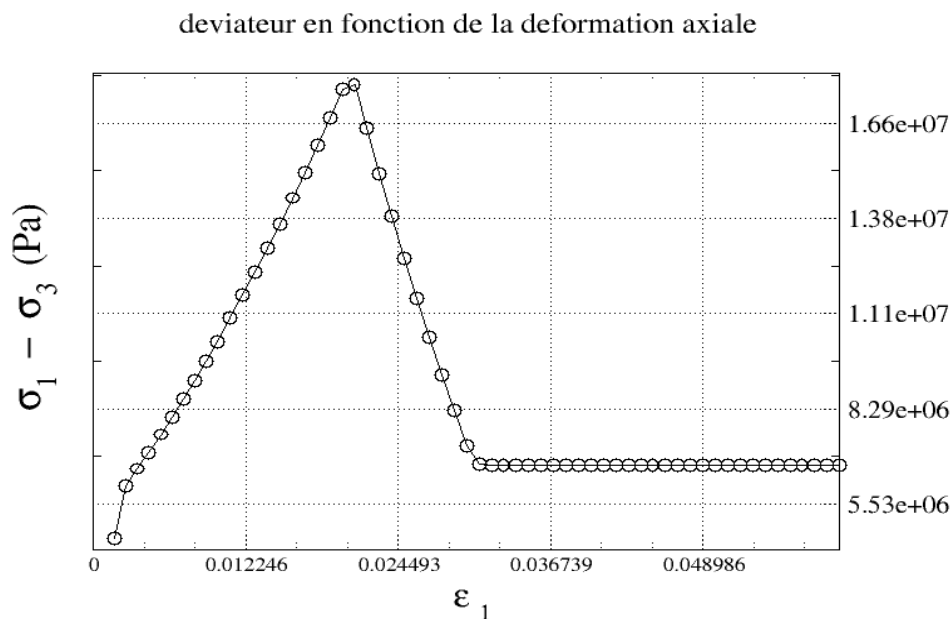


Figure 5-1: Déviateur des contraintes en fonction de la déformation uniaxiale

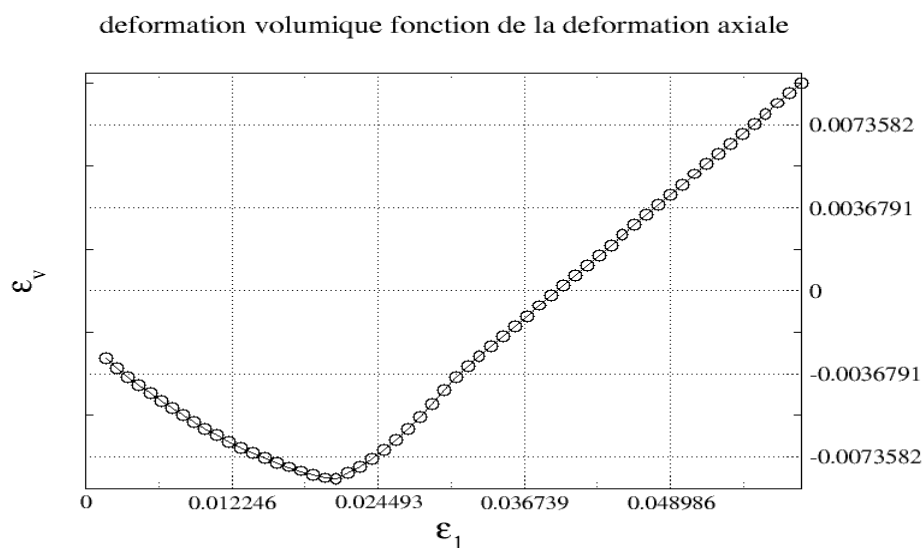


Figure 5-2: Déformation volumique en fonction de la déformation uniaxiale





## 6 Fonctionnalités et vérification

La loi de comportement peut être définie par le mot-clé VISC\_DRUC\_PRAG (commande STAT\_NON\_LINE, mot clé facteur COMPORTEMENT). Elle est associée au matériau VISC\_DRUC\_PRAG (commande DEFI\_MATERIAU).

La loi VISC\_DRUC\_PRAG est vérifiée par les cas tests suivants :

SSNV211	[V6.04.211]	Essai triaxial drainé avec le modèle VISC_DRUC_PRAG
WTNV137	[V7.31.137]	Essai triaxial drainé avec le modèle VISC_DRUC_PRAG
WTNV138	[V7.31.138]	Essai triaxial non drainé avec le modèle VISC_DRUC_PRAG

## 7 Références

- [1] J. EL GHARIB et C. CHAVANT, " Calage sur des essais triaxiaux d'une loi de comportement viscoplastique pour l'argilite basée sur le modèle Drucker\_Prager", H-T64-2008-04194-FR,
- [2] J. EL GHARIB et C. CHAVANT, « Mise en oeuvre dans Code\_Aster d'un modèle viscoplastique simplifié », H-T64-2007-01800-FR,

## 8 Descriptif des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
10.0	J. EL GHARIB, C.CHAVANT EDF R&D / AMA	Texte initial
14.4	F.Voldoire EDF R&D / ERMES	Petites corrections de forme des équations