Relations de comportement BETON_GRANGER et BETON_GRANGER_V pour le fluage propre du béton

Résumé :

Ce document présente le modèle de fluage propre de « Granger », qui est une façon de modéliser le fluage propre du béton. On y détaille également l'écriture et le traitement numérique du modèle.

Dans Code_Aster, le modèle est décliné en deux lois de comportement : la version complète BETON_GRANGER_V et une version simplifiée, nommée BETON_GRANGER, sans les effets de l''hygrométrie et du vieillissement.

Table des Matières

1 Introduction

Dans le cadre des études du comportement à long terme des structures en béton, une part prépondérante des déformations mesurées sur structure concerne les déformations différées qui apparaissent dans le béton au cours de sa vie. Elles comportent les retraits au jeune âge, le retrait de dessiccation, le fluage propre et le fluage de dessiccation.

Le modèle présenté ici est dédié à la modélisation de la déformation différée associée au fluage propre. Le fluage propre est, en complément du fluage de dessiccation, la part de fluage du béton qu'on observerait lors d'un essai sans échange d'eau avec l'extérieur. Expérimentalement le béton en fluage propre présente un comportement visqueux vieillissant. La déformation de fluage observée est proportionnelle à la contrainte de chargement, dépend de la température et de l'hygrométrie. La déformation longitudinale s'accompagne comme en élasticité d'une déformation transversale de signe opposé.

Le modèle choisi s'inspire de celui proposé par L. Granger [bib1]. C'est un modèle de type visco-élastique qui prend en compte l'effet du vieillissement et de l'hygrométrie. L'effet de la température n'est pas modélisé.

On effectue dans un premier temps un bref rappel sur les modèles visco-élastiques linéaires et on présente ensuite le modèle proprement dit ainsi que son intégration numérique dans c*ode_aster*.

Dans c*ode_aster*, deux versions sont disponibles : `BETON_GRANGER_V` le modèle complet, et `BETON_GRANGER`, qui ne prend pas en compte le vieillissement.

2 Rappel sur le comportement en fluage d'un matériau visco-élastique

La courbe de fluage expérimentale représente l'évolution en fonction du temps de la déformation d'un matériau soumis à une contrainte unidimensionnelle constante σ. La déformation de fluage ε^{fl} est, par opposition à la déformation instantanée, la part de déformation qui évolue avec le temps.

Si un matériau a un comportement viscoélastique linéaire, la déformation de fluage d'une éprouvette soumise à une charge σ constante est, par définition, proportionnelle à σ. La déformation de fluage (1D) à partir du temps de chargement t_c peut s'écrire :

$$\varepsilon^{fl}(t)=\sigma J(t,t_c) \quad (1)$$

La fonction $J(t,t_c)$ est une fonction croissante de $\left|t-t_c\right|$ et nulle pour $\left|t-t_c\right|$ négatif.

Si le matériau est non vieillissant, la fonction de fluage à un certain instant dépend seulement du temps $\left|t-t_c\right|$ écoulé depuis l'instant de chargement [bib3] :

$$J(t,t_c)=f(t-t_c) \quad (2)$$

La déformation de fluage s'écrit :

$$\varepsilon^{fl}(t)=\sigma f(t-t_c) \quad (3)$$

Pour un matériau viscoélastique vieillissant, la courbe de fluage expérimentale varie pour deux temps de chargement différents. Du point de vue de la modélisation, la fonction de fluage $J(t,t_c)$ ne varie plus seulement en fonction du temps écoulé de l'instant de chargement ; elle dépend de manière indépendante du temps t et de l'instant de chargement t_c.

2.1 Principe de superposition de Boltzmann

La relation (1) n'est valable que pour un chargement constant. Pour un historique de chargement non constant on peut appliquer le principe de superposition de Boltzmann, en vertu de la dépendance linéaire à la contrainte. Si l'histoire de chargement $\sigma(t)$ est décomposée en n incréments de charge on a :

$$\sigma(t)=\sum_{i=0}^{n} H(t-t_{ci})\Delta\sigma_i \quad (4)$$

Où H est la fonction de Heaviside. On peut alors écrire l'expression de la déformation de fluage :

$$\varepsilon^{fl}(t)=\sum_{i=0}^{n} J(t,t_{ci})\Delta\sigma_i \quad (5)$$

En passant à la limite, pour un incrément de chargement infiniment petit :

$$\varepsilon^{fl}(t)=\int_{t_c=0}^{t} J(t,t_c)\frac{\partial\sigma}{\partial t_c}\,d t_c \quad (6)$$

Pour un matériau viscoélastique linéaire non-vieillissant on a :

$$\varepsilon^{fl}(t)=\int_{t_c=0}^{t} f(t-t_c)\frac{\partial\sigma}{\partial t_c}dt_c=f*\frac{\partial\sigma}{\partial t} \tag{7}$$

où $*$ représente le produit de convolution.

3 Présentation du modèle de fluage propre de Granger

3.1 Propriétés expérimentales du fluage propre du béton en chargement uniaxial

Les essais de fluage propre sur éprouvette font apparaître les propriétés suivantes :

- dans une gamme de contrainte inférieure à environ 50% de la résistance à la rupture, le fluage propre est proportionnel à la contrainte ;
- le fluage propre d'une éprouvette à hygrométrie h_{ext} est quasiment proportionnel à h_{ext}. Le fluage propre d'un béton sec est presque nul et il est maximal pour un béton saturé en eau ;
- lorsque la température T augmente on a une accélération du fluage ;
- le fluage propre est un phénomène fortement vieillissant : la déformation ne dépend pas seulement du temps écoulé depuis la mise sous charge mais aussi de l'instant de chargement ; en autres mots, le comportement rhéologique du matériau à l'instant de chargement dépend de son « âge ». Dans le cas du béton, l'âge est le temps écoulé depuis le coulage.

On choisit de modéliser le fluage propre du béton avec un modèle viscoélastique linéaire auquel on ajoutera la dépendance du fluage vis-à-vis de l'hygrométrie ainsi que le vieillissement [bib1].

L'effet de la température, modélisé dans [bib1], ne sera pas pris en compte ici.

3.2 Modélisation du fluage non vieillissant par un modèle de Kelvin généralisé

On peut montrer que tout corps visco-élastique linéaire non-vieillissant peut être modélisé par un groupement en série de chaînes de Kelvin, appelé modèle de Kelvin généralisé. La fonction de fluage peut alors se mettre sous la forme :

$$J(t, t_c) = f(t - t_c) = \sum_{s=1}^{r} J_s \left(1 - \exp\left(-\frac{t - t_c}{\tau_s}\right)\right) \qquad (8)$$

Où τ_s et J_s sont, respectivement, le temps de retard et la souplesse de chaque chaîne s de Kelvin. Il s'agit de coefficients positifs identifiés sur les courbes expérimentales de fluage. Le choix a été fait dans Code_Aster de se limiter à huit chaînes ($r=8$), ce qui dans la pratique suffit à reproduire de façon satisfaisante les courbes de fluage expérimentales de béton.

Il est très difficile de déterminer à la fois les J_s et τ_s dès que le nombre de séries de Kelvin dépasse deux, car il y a trop de solution possibles. On fait donc généralement un choix a priori sur les τ_s et on détermine alors par régression linéaire les J_s. Les temps de retard sont choisi de manière à avoir $\tau_s = \tau_1 \cdot 10^{s-1}$.

Le modèle viscoélastique de Kelvin généralisé est enrichi pour prendre en compte l'effet de l'hygrométrie. A cette fin, on définit une contrainte équivalente.

Ensuite, la fonction de fluage (8) du modèle de Kevin généralisé est modifiée pour prendre en compte l'effet du vieillissement.

3.3 Effet du vieillissement

Physiquement, le vieillissement dans le béton est associé à l'hydratation au jeune âge et à d'autres phénomènes comme la polymérisation pour le béton plus âgé.

L'effet du vieillissement est modélisé en multipliant les coefficients J_s par une fonction de vieillissement $k(a(t_c))=k(t_c)$ dépendant de l'âge a du matériau au temps de chargement t_c. La fonction de fluage devient :

$$J(t,t_c)=k(t_c)\sum_{s=1}^{8} J_s\left(1-\exp\left(-\frac{t-t_c}{\tau_s}\right)\right) \quad (9)$$

Le choix est fait d'utiliser la même fonction de vieillissement pour toutes les chaînes de Kelvin. De cette manière on a découplé dans la fonction de fluage (9) la contribution du vieillissement (qui dépend de t_c) de la contribution non-vieillissante (en $t-t_c$).

Dans code_aster, la fonction de vieillissement est une donnée utilisateur. Une modélisation possible pour prendre en compte le vieillissement associée à l'hydratation est celle du CEB [bib2] :

$$\begin{cases} k(a)=\dfrac{28^{0,2}+0,1}{a^{0,2}+0,1} & \text{si } a\leqslant 28 \text{ jours} \\ k(a)=1 & \text{si } a>28 \text{ jours} \end{cases} \quad (10)$$

où a est exprimé en jours. La loi non-vieillissante est retrouvée pour $k(a)=constante=1$.

3.4 Effet de l'hygrométrie

On définit la contrainte équivalente S :

$$S=h\sigma \quad (11)$$

Pour un essai à contrainte constante on aura :

$$\varepsilon^{fl}(t)=S\,J(t,t_c)=(h\sigma)k(t_c)\sum_{s=1}^{8} J_s\left(1-\exp\left(-\frac{t-t_c}{\tau_s}\right)\right) \quad (12)$$

Pour un essai caractérisé par un historique de contrainte variable, on aura :

$$\varepsilon^{fl}(t)=\int_{t_0}^{t} J(t,t_c)\frac{\partial S}{\partial t_c}dt_c=\sum_{s=1}^{8}\left(J_s\int_{t_0}^{t} k(t_c)\left(1-\exp\left(-\frac{t-t_c}{\tau_s}\right)\right)\frac{\partial S}{\partial t_c}dt_c\right) \quad (13)$$

Remarque

C'est la teneur en eau C (qui correspond à la variable de commande SECH*) en non pas l'humidité relative h qu'on obtient du calcul* code_aster *de séchage [R7.01.12]. C'est la courbe isotherme de sorption-désorption qui permet de passer de la variable C à h . Soit C la courbe isotherme de désorption : $C=C(h)$ et $h=C^{-1}(C)$. La courbe $h=C^{-1}(C)$, de nature empirique, doit être renseignée par l'utilisateur.*

3.5 Modélisation 3D

L'hypothèse classique consiste à supposer l'existence d'un coefficient de Poisson de fluage constant et égal au coefficient de Poisson élastique, soit $\nu_f=0,2$. D'où pour $\boldsymbol{S}=h\cdot\boldsymbol{\sigma}$ constante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{fl}(t)=J(t,t_c)\cdot[(1+\nu_f)\boldsymbol{S}-\nu_f \operatorname{tr}(\boldsymbol{S})\boldsymbol{I}] \quad (14)$$

et donc :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{fl}(t)=J(t,t_c)\cdot(1+\nu_f)\tilde{\boldsymbol{S}} \text{ et } \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{fl}(t))=J(t,t_c)\cdot(1-2\nu_f)\operatorname{tr}(\boldsymbol{S}) \quad (15)$$

où $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et $\tilde{\boldsymbol{S}}$ dénotent les parties déviatoriques des tenseurs de déformation et de contrainte.

4 Relations de comportement *Code_Aster*

On introduit dans le *Code_Aster* deux relations de comportement associées au fluage propre :

- BETON_GRANGER_V
- BETON_GRANGER

La première tient compte de l'ensemble des effets (hygrométrie et vieillissement), la deuxième ne tient pas compte du phénomène de vieillissement. Elles sont disponibles en modélisation 2D, 3D et contraintes planes.

Les différents paramètres du modèle sont renseignés dans DEFI_MATERIAU, sous les mot-clés BETON_GRANGER, V_BETON_GRANGER et ELAS_FO.

- Les 2×8 constantes caractéristiques de la fonction de fluage du modèle de Kelvin généralisé J_s, τ_s sont renseignées sous le mot-clé BETON_GRANGER, dont l'utilisation est commune aux deux relations de comportement BETON_GRANGER et BETON_GRANGER_V.
- Si on utilise la relation de comportement vieillissante BETON_GRANGER_V alors on renseigne en plus le mot-clé V_BETON_GRANGER la fonction de vieillissement $k(t_c)$.
- La courbe de desorption, nécessaire aux deux relations de comportement BETON_GRANGER et BETON_GRANGER_V, est renseignée sous le mot-clé ELAS_FO.

Le détail des mot-clés et des opérandes est fourni dans la table Table 4-1.

Mot-clé	Explication	Opérandes
BETON_GRANGER	Les 2×8 constantes caractéristiques de la fonction de fluage du modèle de Kelvin généralisé : - J_s souplesse de la chaîne s - τ_s temps de retard de la chaîne s	J1 : J_1 TAUX_1 : τ_1 ... J8 : J_8 TAUX_8 : τ_8
V_BETON_GRANGER	Fonction de vieillissement	FONC_V : $k(t_c)$
ELAS_FO	• La courbe de sorption-désorption donnant h en fonction de la teneur en eau C	FONC_DESORP : $C^{-1}(C)$

Table 4-1. Renseignement des paramètres dans DEFI_MATERIAU.

5 Intégration numérique du modèle

5.1 Discrétisation (1D)

Considérons d'abord le cas non vieillissant. La déformation de fluage pour la seule chaîne de Kelvin s s'écrit de la manière suivante (voir 13) :

$$\varepsilon_s^{fl}(t)=\int_{t_0}^{t} J_s\left(1-\exp\left(-\frac{t-t_c}{\tau_s}\right)\right)\frac{\partial S}{\partial t_c}dt_c \tag{16}$$

L'intégration numérique du modèle se fait en approximant $S(t)$ comme une fonction linéaire par morceaux sur la succession de n incréments de temps $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$ avec $i=1,\cdots,n$. De ce fait, $\dot{S}$ est constant sur $t\in[t_{i-1},t_i]$ et égal à $\frac{\Delta S_i}{\Delta t_i}$. La déformation de la chaîne s au temps t_n est alors donnée par l'expression suivante :

$$\varepsilon_s^{fl}(t_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta S_i}{\Delta t_i}\int_{t_{i-1}}^{t_i} J_s\left(1-\exp\left(-\frac{t-t_c}{\tau_s}\right)\right)dt_c \tag{17}$$

On obtient :

$$\varepsilon_s^{fl}(t_n)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta S_i}{\Delta t_i}\right)J_s\Delta t_i-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta S_i}{\Delta t_i}\right)J_s\tau_s\left(\exp\left(-\frac{t_n-t_i}{\tau_s}\right)-\exp\left(-\frac{t_n-t_{i-1}}{\tau_s}\right)\right) \tag{18}$$

Et donc :

$$\varepsilon_s^{fl}(t_n)=J_s\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i}_{A_n^0}-\underbrace{J_s\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i\frac{\tau_s}{\Delta t_i}\left(\exp\left(-\frac{t_n-t_i}{\tau_s}\right)\right)\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t_i}{\tau_s}\right)\right)}_{A_n^s}=J_s A_n^0-A_n^s \tag{19}$$

À t_{n+1} on peut également écrire :

$$\begin{aligned}\varepsilon_s^{fl}(t_{n+1})=&J_s\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i-J_s\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i\frac{\tau_s}{\Delta t_i}\left(\exp\left(-\frac{t_{n+1}-t_i}{\tau_s}\right)\right)\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t_i}{\tau_s}\right)\right)\\&+J_s\Delta S_{n+1}-J_s\Delta S_{n+1}\frac{\tau_s}{\Delta t_{n+1}}\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_s}\right)\right)\end{aligned} \tag{20}$$

Soit, avec $\Delta_{n+1}=t_{n+1}-t_n$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_s^{fl}(t_{n+1})=&J_s\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i-J_s\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i\frac{\tau_s}{\Delta t_i}\left(\exp\left(-\frac{t_n-t_i}{\tau_s}\right)\right)\left(\exp\left(-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_s}\right)\right)\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t_i}{\tau_s}\right)\right)\\&+J_s\Delta S_{n+1}-J_s\Delta S_{n+1}\frac{\tau_s}{\Delta t_{n+1}}\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_s}\right)\right)\end{aligned} \tag{21}$$

On reconnaît l'expression de A_n^0 et de A_n^s de l'équation (19). In fine, on peut donc écrire pour la chaîne s :

$$\varepsilon_s^{fl}(t_{n+1})=J_s A_n^0-A_n^s\exp\left(-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_s}\right)+J_s\Delta S_{n+1}-J_s\Delta S_{n+1}\frac{\tau_s}{\Delta t_{n+1}}\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_S}\right)\right) \tag{22}$$

Considérons maintenant les huit chaînes de Kelvin en série. On a :

$$\varepsilon^{fl}(t_n)=\sum_{s=1}^{8}\varepsilon_s^{fl}(t_n) \quad (23)$$

Posons $J=\sum_{s=1}^{8}J_s$. D'après (19) et (23) on a à t_n :

$$\varepsilon^{fl}(t_n)=J\,A_n^0-\sum_{s=1}^{8}A_n^s \quad (24)$$

A t_{n+1} on a également :

$$\varepsilon^{fl}(t_{n+1})=J\,A_{n+1}^0-\sum_{s=1}^{8}A_{n+1}^s \quad (25)$$

Avec :

$$A_{n+1}^0=A_n^0+\Delta S_{n+1}$$

et

$$A_{n+1}^s=A_n^s\exp\left(-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_s}\right)+J_s\,\Delta S_{n+1}\frac{\tau_s}{\Delta t_{n+1}}\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_s}\right)\right) \quad (26)$$

Plus précisément, si on prend en compte aussi l'effet du vieillissement et en considérant constant le coefficient de vieillissement sur Δt_i , on a :

$$A_{n+1}^0=A_n^0+k(t_{n+1/2})\Delta S_{n+1}$$

et

$$A_{n+1}^s=A_n^s\exp\left(-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_s}\right)+J_s\,k(t_{n+1/2})\Delta S_{n+1}\frac{\tau_s}{\Delta t_{n+1}}\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_s}\right)\right) \quad (27)$$

Remarque :

On a noté :

- $\Delta X_i=X_i-X_{i-1}$.
- $X_{n+1/2}=\dfrac{X_{n+1}+X_n}{2}$

Pour avoir ε^{fl} au temps t_{n+1} , il ne faut stocker que A^0 et les A^s du pas de temps précédent, soient neuf variables. En 3D les A_0 et les $\boldsymbol{A}^s$ sont des tenseurs. On associera alors aux deux relations de comportement de fluage propre (9x6) variables internes correspondant aux composantes des tenseurs $\boldsymbol{A}$. Elles caractérisent l'avancement du fluage.

L'écriture en incrément de déformation $\Delta\varepsilon_s^{fl}(t_{n+1})=\varepsilon_s^{fl}(t_{n+1})-\varepsilon_s^{fl}(t_n)$, plus proche de la programmation donne quant à elle :

$$\Delta\varepsilon_s^{fl}(t_{n+1})=A_n^s\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_s}\right)\right)+J_s k(t_{n+1/2})\Delta S_{n+1}\left(1-\frac{\tau_s}{\Delta t_{n+1}}\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_S}\right)\right)\right) \tag{28}$$

5.2 Intégration de la relation de comportement

On note $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ l'incrément de déformation infinitésimal tel que :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}\left(\nabla(\Delta\boldsymbol{u})+\nabla^T(\Delta\boldsymbol{u})\right) \tag{29}$$

Si on tient compte, dans la partition de la déformation, de la déformation thermique, des déformations associées au retrait endogène et au retrait de dessiccation, alors on a :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}=\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e+\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{fl}+\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{th}+\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{ret-end}+\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{ret-des} \tag{30}$$

Avec la déformation élastique telle que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e=\boldsymbol{H}\,\boldsymbol{\sigma} \tag{31}$$

$\boldsymbol{H}$ est le tenseur d'élasticité de Hooke. La déformation thermique s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{th}=\alpha(T-T_{ref})\boldsymbol{I}_d \tag{32}$$

Pour une température T donnée, avec α le coefficient de dilatation thermique et T_{ref} la température de référence. Les déformations de retrait endogène et de dessiccation :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{ret-end}=-\beta\xi\boldsymbol{I}_d \text{ et } \boldsymbol{\varepsilon}^{ret-des}=\kappa(C_{ref}-C)\boldsymbol{I}_d \tag{33}$$

Avec ξ l'hydratation, C la concentration en eau, C_{ref} le séchage de référence et (β,κ) des caractéristiques matériaux.

Remarque :

Dans la suite du document, on notera $\Delta\varepsilon^A=\Delta\varepsilon^{th}+\Delta\varepsilon^{ret\ end}+\Delta\varepsilon^{ret\ des}$.

En 3D, pour la partie déviatorique on a donc la contrainte suivante :

$$\tilde{\sigma}=2\mu\tilde{\varepsilon}^e=\frac{2\mu}{2\mu^-}\tilde{\sigma}^-+2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}-2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}^{fl} \tag{34}$$

Et la déformation de fluage :

$$\tilde{\varepsilon}^{fl}(t_{n+1})=(1+\nu_f)\left(J\tilde{A}_{n+1}^0-\sum_{s=1}^{8}\tilde{A}_{n+1}^s\right) \tag{35}$$

Pour alléger l'écriture, on notera :

$$\begin{aligned}A_{n+1}&\Rightarrow A\\ A_n&\Rightarrow A^-\end{aligned} \tag{36}$$

Dans un premier temps, on exprime l'incrément de contrainte équivalente (déviatorique) à partir de (11) :

$$\Delta\tilde{S}=h\tilde{\sigma}-h^{-}\tilde{\sigma}^{-} \tag{37}$$

En appliquant la partie déviatorique de (28) (somme sur toutes les chaînes) sur l'expression de la contrainte déviatorique (34) :

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}=&\frac{2\mu}{2\mu^{-}}\tilde{\sigma}^{-}+2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}-\\ &2\mu(1+\nu_f)\left[\sum_s\left\{\tilde{A}^{-,s}\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_s}\right)\right)\right\}+k(t_{n+1/2})\Delta\tilde{S}\sum_s\left\{J_s\left(1-\frac{\tau_s}{\Delta t}\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_S}\right)\right)\right)\right\}\right]\end{aligned} \tag{38}$$

On y injecte (37), ce qui donne :

$$\begin{aligned}&\tilde{\sigma}\left[1+2\mu(1+\nu_f)(h\,k(t_{n+1/2}))\sum_s\left(J_s 1-\frac{\tau_s}{\Delta t}\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_S}\right)\right)\right)\right]=\\ &\frac{2\mu}{2\mu^{-}}\tilde{\sigma}^{-}+2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}-\\ &2\mu(1+\nu_f)\left[\sum_s\left\{\tilde{A}^{-,s}\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_s}\right)\right)\right\}-k(t_{n+1/2})h^{-}\tilde{\sigma}^{-}\sum_s\left\{J_s\left(1-\frac{\tau_s}{\Delta t}\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_S}\right)\right)\right)\right\}\right]\end{aligned} \tag{39}$$

De même, pour la partie sphérique on a :

$$tr(\sigma)=\frac{3K}{3K^{-}}tr(\sigma^{-})+3K\,tr(\Delta\varepsilon)-3K\,tr(\Delta\varepsilon^{fl})-3K\,tr(\Delta\varepsilon^{A}) \tag{40}$$

Avec l'expression de la trace des déformations de fluage (somme sur toutes les chaînes) :

$$\begin{aligned}&tr(\varepsilon^{fl})=\\ &(1-2\nu_f)\sum_s\left\{tr(A^{-,s})\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_s}\right)\right)\right\}+\\ &k(t_{n+1/2})tr(S)\sum_s\left\{J_s\left(1-\frac{\tau_s}{\Delta t}\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_S}\right)\right)\right)\right\}\end{aligned} \tag{41}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}&tr(\sigma)\left[1+3K(1-2\nu_f)(h\,k(t_{n+1/2}))\sum_s\left\{J_s\left(1-\frac{\tau_s}{\Delta t}\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_S}\right)\right)\right)\right\}\right]=\\ &\frac{3K}{3K^{-}}tr(\sigma^{-})+3K\,tr(\Delta\varepsilon)-3K\,tr(\Delta\varepsilon^{A})-\\ &3K(1-2\nu_f)\left[\sum_s\left\{tr(A^{-,s})\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_s}\right)\right)\right\}-h^{-}tr(\sigma^{-})k(t_{n+1/2})\sum_s\left\{J_s\left(1-\frac{\tau_s}{\Delta t}\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_S}\right)\right)\right)\right\}\right]\end{aligned} \tag{42}$$

On en déduit alors σ puisque $\sigma_{ij}=\tilde{\sigma}_{ij}+\frac{1}{3}tr\,\sigma\,\delta_{ij}$

5.3 Variables d'état

Les variables d'état des deux relations de comportement sont donc :

- $\boldsymbol{\sigma}$: tenseur des contraintes,
- $\boldsymbol{\varepsilon}$: tenseur des déformations,
- T : température,
- C : concentration en eau,
- ξ : degré hydratation,
- $\boldsymbol{A}_s$: tenseurs caractéristiques de l'avancement du fluage, soient 6×9 variables,
- a : l'âge du béton.

Les composantes des huit tenseurs $\boldsymbol{A}_s$ et a sont les variables internes de la loi de comportement (BETON_GRANGER comme BETON_GRANGER_V). La dimension de chaque tenseur $\boldsymbol{A}_s$ dépend de la modélisation (quatre composantes en 2D et six en 3D). On a donc :

- en 3D, 55 variables internes :
  - VI1...VI6 : composantes du tenseur $\boldsymbol{A}_1$
  - VI7...VI12 : composantes du tenseur $\boldsymbol{A}_2$
  - …
  - VI43...VI48 : composantes du tenseur $\boldsymbol{A}_8$
  - VI49...VI54 : composantes du tenseur $\boldsymbol{A}_0$
  - VI55 : a
- en 2D, 37 variables internes :
  - VI1...VI4 : composantes du tenseur $\boldsymbol{A}_1$
  - VI5...VI8 : composantes du tenseur $\boldsymbol{A}_2$
  - …
  - VI29...VI32 : composantes du tenseur $\boldsymbol{A}_8$
  - VI33...VI36 : composantes du tenseur $\boldsymbol{A}_0$
  - VI37 : a

5.4 Matrice tangente

La matrice tangente s'exprime par la formule suivante :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}+\frac{1}{3}\frac{\partial (tr\,\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{I}_d \tag{43}$$

Avec :

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial (tr\,\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{\partial (tr\,\boldsymbol{\sigma})}{\partial (tr\,\boldsymbol{\varepsilon})}\frac{\partial (tr\,\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \tag{44}$$

Ce qui nécessite l'évaluation des expressions suivantes :

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}=\delta_{ik}\delta_{jl}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \text{ et } \frac{\partial(tr\,\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_{ij}}=\delta_{ij} \text{ avec } I_{ijkl}=\delta_{ik}\delta_{jl} \tag{45}$$

Pour une itération de Newton, on dérive l'expression (39) :

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\left[1+2\mu(1+\nu_f)(h\,k(t_{n+1/2}))\sum_s\left(J_s 1-\frac{\tau_s}{\Delta t}\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_S}\right)\right)\right)\right]=2\mu\,\boldsymbol{I}_d \tag{46}$$

Et l'expression (42) :

$$\frac{\partial(tr\,\boldsymbol{\sigma})}{\partial(tr\,\boldsymbol{\varepsilon})}\left[1+3K(1-2\nu_f)(h\,k(t_{n+1/2}))\sum_s\left\{J_s\left(1-\frac{\tau_s}{\Delta t}\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_S}\right)\right)\right)\right\}\right]=3K\,\boldsymbol{I}_d \tag{47}$$

On considère maintenant la p hase de prédiction au pas de temps $[t_n, t_{n+1}]$. On remarque au préalable qu'en 1D, la dérivée temporelle de la déformation de fluage s'exprime très simplement :

$$\left(\frac{\partial \varepsilon_s^{fl}}{\partial t}\right)_{t_n}=\frac{A_s^-}{\tau_s}-J_s k(t_c)\frac{\partial S}{\partial t} \tag{48}$$

On écrit le problème en vitesse à l'instant t_n :

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial t}\left[1+2\mu\sum_s J_s k(t_n)h^-\right]=2\mu\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial t}-2\mu(1+\nu_f)\left[\sum_s\left(\frac{\tilde{A}_s^-}{\tau_s}-J_s k(t_n)\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^-\frac{dh}{dt}\right)\right] \tag{49}$$

Pour la partie sphérique :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(tr\,\sigma)}{\partial t}\left[1+3\mathrm{K}(1-2\nu_f)\left(\sum_s J_s\cdot k(t_c)\cdot h^-\right)\right]=\\&=3\mathrm{K}\frac{\partial(tr\,\varepsilon)}{\partial t}-3\mathrm{K}(1-2\nu_f)\left[\sum_s\frac{tr\,A_s^-}{\tau_s}-J_s\cdot k(t_n)\cdot(tr\,\sigma^-)\frac{dh}{dt}\right]+3\mathrm{K}\left(3\beta\frac{d\xi}{dt}\right)+3\mathrm{K}\left(3\kappa\frac{dC}{dt}\right)\end{aligned} \tag{50}$$

Au final :

$$\begin{aligned}&\Delta(\mathrm{tr}\,\sigma)\left[1+3\mathrm{K}(1-2\nu_f)\left(\sum_s J_s\cdot k(t_n)\cdot h^-\right)\right]=\\&=3\mathrm{K}\,\Delta(\mathrm{tr}\,\varepsilon)-3\mathrm{K}(1-2\nu_f)\left[\sum_s\frac{(tr\,\boldsymbol{A}_s^-)}{\tau_s}\cdot\Delta t-J_s\cdot k(t_n)\cdot(\mathrm{tr}\,\sigma^-)\,\Delta h\right]\\&-3\mathrm{K}(3\alpha\,\Delta T)+3\mathrm{K}(3\beta\,\Delta\xi)+3\mathrm{K}(3\kappa\,\Delta C)\end{aligned} \tag{51}$$

Le fluage introduit donc un terme de second membre spécifique lors de la phase de prédiction qui en fait est négligé, sans conséquence sur les résultats.

6 Bibliographie

1) CEB FIP Model (1990) General task group n°9, Evaluation of the time behaviour of concrete.

2) J. LEMAITRE, J-L CHABOCHE (1985) : Mécanique des matériaux solides. Dunod.

3) Document de référence de code Aster [R7.01.12] : Modélisation de la thermo-hydratation, du séchage et du retrait du béton.

4) J. SALENCON (2009) : Viscoélasticité pour le calcul des structures. Éditions de l'École polytechnique.

5) L. GRANGER : Comportement différée du béton dans les enceintes de centrale nucléaire : analyse et modélisation. Thèse de Doctorat de l'ENPC (février 1995).

7 Fonctionnalités et vérification

Ce document concerne les lois de comportement BETON_GRANGER, BETON_GRANGER_V (mot clé COMPORTEMENT de STAT_NON_LINE) et leurs matériaux associés BETON_GRANGER, V_BETON_GRANGER (commande DEFI_MATERIAU).

Ces lois de comportement sont respectivement vérifiées par les cas tests suivants :

BETON_GRANGER_V	SSNP116	Couplage fluage/fissuration - Traction uniaxiale	[V6.03.116]
BETON_GRANGER	SSNV142	Essai de fluage propre : modèle Granger	[V6.04.142]
BETON_GRANGER_V	SSNV105	Modèle BETON_GRANGER_V : essai de fluage avec prise en compte de l'humidité relative et du vieillissement.	[V6.04.105]

8 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
		Texte initial
7,4	S.Michel-Ponnelle EDF-R&D/AMA	
13.2	Marina Bottoni EDF-R&D/AMA	Élimination de l'effet de la température