Comportement viscoplastique avec effet de mémoire et restauration de Chaboche

Résumé :

Ce document décrit l'intégration du modèle de comportement élasto-visco-plastique de Chaboche avec un écrouissage isotrope comportant un effet mémoire d'écrouissage et deux écrouissages cinématiques non linéaires, avec prise en compte possible de la restauration et de la viscosité. Ce modèle est utilisable par la relation `VISCOCHAB` du mot-clé `COMPORTEMENT`. Le modèle implanté possède un effet d'écrouissage sur les variables tensorielles de rappel et prend en compte toutes les variations des coefficients avec la température[1]. Cette loi de comportement est intégrée par la résolution d'un système d'équations non linéaires. Ce modèle est disponible en 3D, déformation plane, axisymétrie. La modélisation en contrainte plane est prise en compte.

1 à part pour le calcul de la jacobienne

Table des Matières

1 Modèle élasto-visco-plastique de Chaboche avec effet mémoire et de restauration

Le modèle élastoviscoplastique de J.L.Chaboche [bib1] le plus complet superpose à l'écrouissage isotrope deux variables d'écrouissage cinématique, et permet de prendre en compte les effets de durcissement cyclique, le fluage, la restauration et la mémoire du plus grand l'écrouissage. Il est donc bien adapté aux chargements cycliques.

Sous certaines conditions de chargement, les structures peuvent être sujet à un phénomène de déformation progressive, pouvant nuire aux capacités fonctionnelles de l'appareil. Dans sa forme originelle, le modèle surestime largement la déformation progressive ; pour améliorer sa représentativité, il a été modifié en introduisant des termes d'évanescence radiale, afin de mieux modéliser ce phénomène [bib2]. Le modèle résultant, nommé `VISCOCHAB`, est décrit dans ce document.

Plusieurs études ont consisté à tester cette loi de comportement vis-à-vis de sa capacité à modéliser les déformations progressives [bib3, bib4], en comparant à des essais [bib5, bib6, bib7, bib8] et à d'autres modèles [bib12] en particulier celui de Taheri [R5.03.05]. Notamment, des identifications des aciers 316L et 304L ont été faites (resp. dans [bib4] et [bib9]). Récemment, les études de fatigue thermique ont nécessité l'utilisation de `VISCOCHAB`, notamment pour prendre en compte l'effet de mémoire.

Le modèle comporte 25 paramètres (+ les 2 paramètres élastiques) introduits dans la commande `DEFI_MATERIAU` :

`VISCOCHAB (VISCOCHAB_FO) = _F(`

`# écrouissage isotrope`
- ♦ `K` = k ,
- ◊ `B` = b ,
- ◊ `A_R` = α_R , `(défaut : 1.)`

`# écrouissage cinématique`
- ♦ `C1` = C_1 ,
- ♦ `C2` = C_2 ,
- ♦ `G1_0` = γ_1^0 ,
- ♦ `G2_0` = γ_2^0 ,
- ◊ `A_I` = a_∞ , `(défaut : 1.)`

`# viscosité`
- ♦ `K_0` = K_0 ,
- ♦ `N` = n ,

`# écoulement exponentiel`
- ◊ `A_K` = α_K , `(défaut : 0.)`
- ◊ `ALP` = α , `(défaut : 0.)`

`# effet de mémoire`
- ◊ `ETA` = η , `(défaut : 0.5)`
- ♦ `MU` = μ , `(défaut : 0.)`
- ♦ `Q_M` = Q_m ,
- ♦ `Q_0` = Q_0 ,

```
# déformations progressives (Burlet)
◊  D1    =   δ1 ,     (défaut : 1.)
◊  D2    =   δ2 ,     (défaut : 1.)

# restauration
◊  M_R   =   mr ,     (défaut : 1.)
◊  G_R   =   γr ,     (défaut : 0.)
◊  M_1   =   m1 ,     (défaut : 1.)
◊  M_2   =   m2 ,     (défaut : 1.)
◊  G_X1  =   γX1 ,    (défaut : 0.)
◊  G_X2  =   γX2 ,    (défaut : 0.)
◊  QR_0  =   Qr* ,    (défaut : 0.)
)
```

Ces paramètres sont des constantes réelles. Tous ces paramètres peuvent dépendre de la température (mots clé `VISCOCHAB_FO`) et les valeurs attendues sont de type `fonction`. Il n'y a aucune valeur par défaut dans ce cas. On notera que si `C1` ou `C2` dépend de la température, le calcul de la matrice jacobienne n'est pas exact, ce qui peut rendre la convergence locale difficile si `C1` ou `C2` varie fortement avec T .

L'emploi de cette loi de comportement est accessible dans les commandes `STAT_NON_LINE` ou `DYNA_NON_LINE` par le mot-clé `VISCOCHAB` de `COMPORTEMENT`.

Ce modèle complet peut être « dégradé » en annulant l'effet de certains mécanismes (par exemple l'effet de restauration). Par exemple, en annulant l'effet de la restauration et les termes d'évanescence radiale de l'écrouissage cinématique (paramètres matériaux par défaut), on retrouve le modèle de Chaboche avec effet de mémoire `VISC_CIN2_MEMO` [bib12].

Pour des détails concernant le choix des paramètres matériaux conduisant à l'annulation de certains effets, on pourra se référer à la documentation de la commande `DEFI_MATERIAU`.

Dans la suite de ce document, on décrit précisément le modèle `VISCOCHAB`. On présente ensuite le détail de son intégration numérique en lien avec la construction de la matrice tangente cohérente.

2 Le modèle `VISCOCHAB` dans *Code_Aster*

2.1 Description du modèle

A tout instant, l'état du matériau est décrit par la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$, la température T , la déformation plastique $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$, la déformation plastique cumulée p et le tenseur de rappel $\mathbf{X}$. Les équations d'état définissent alors en fonction de ces variables d'état la contrainte $\boldsymbol{\sigma}=\sigma^H \mathbf{Id}+\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ (décomposée en parties hydrostatique et déviatorique), la part isotrope de l'écrouissage R et la part cinématique $\mathbf{X}$:

$$\sigma^H = \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}) = K\, tr(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{th}}) \quad \textbf{avec} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{th}} = \alpha(T - T^{ref})\,\mathbf{Id}$$ **éq 2.1-1**

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma^H \mathbf{Id} = 2\mu(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}})$$ **éq 2.1-2**

$$R = R(p)$$ **éq 2.1-3**

$$\mathbf{X} = (\mathbf{p}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}})$$ **éq 2.1-4**

où K, μ, α et les coefficients de $\mathbf{X}(p)$ et $R(p)$ sont des caractéristiques du matériau qui peuvent dépendre de la température. Plus précisément, ce sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement, le coefficient de dilatation thermique, les fonctions d'écrouissage isotrope et cinématique. Quant à T^{ref} , il s'agit de la température de référence, pour laquelle on considère la déformation thermique comme étant nulle.

2.1.1 Surface d'écoulement - potentiel viscoplastique

La surface d'écoulement associée au modèle VISCOCHAB est représentée dans l'espace des contraintes principales par :

- son centre $\mathbf{X}$, tenseur d'écrouissage cinématique,
- sa taille $\alpha_R R + k$, k étant sa taille initiale et R la variable d'écrouissage isotrope donnant l'évolution de cette taille, modulée par le coefficient α_R ,
- sa forme donnée par le critère de Von Mises appliqué à $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\text{-}\mathbf{X}$. $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ est le déviateur des contraintes.

L'évolution de la déformation plastique est gouvernée par une loi d'écoulement normal à un critère de plasticité de Von Mises :

$$F(\boldsymbol{\sigma}, R, \mathbf{X}) = (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X})_{eq} - \alpha_R R(p) - k \quad \text{avec}\ A_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\tilde{A} : \tilde{A}}$$ **éq 2.1-5**

Le potentiel de dissipation viscoplastique pour le modèle de Chaboche s'écrit :

$$\Omega^p = \frac{K_0 + \alpha_k R}{\alpha(n+1)} \exp\left[\alpha \left\langle \frac{F}{K_0 + \alpha_k R} \right\rangle^{n+1}\right]$$ **éq 2.1-6**

où $\langle F \rangle$ est la partie positive de F .

On en déduit la loi d'évolution de la déformation plastique :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \Omega^p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{p}\, \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2}\dot{p}\, \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X}}{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X})_{eq}}$$ **éq 2.1-7**

en ayant posé :

$$\dot{p} = \left\langle \frac{F}{K_0 + \alpha_k R} \right\rangle^n \exp\left[\alpha \left\langle \frac{F}{K_0 + \alpha_k R} \right\rangle^{n+1}\right]$$ **éq 2.1-8**

Classiquement, $\dot{p}$ est la vitesse de déformation plastique cumulée. Les paramètres K_0 , α_k et α sont relatifs à la viscosité du matériau (viscosité de Norton). L'équation [éq 2.1-7] peut aussi s'écrire de manière équivalente sous la forme suivante :

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}$$ **éq 2.1-9**

La normale unitaire à la surface d'écoulement est notée :

$$\mathbf{n}=\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\left\|\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\|^{-1}=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{X}}{\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{X}\right)_{eq}} \qquad \text{éq 2.1-10}$$

Les lois d'évolution de l'écrouissage isotrope et de l'écrouissage cinématique sont obtenues à partir du potentiel thermodynamique et du potentiel de dissipation.

2.1.2 Formulation de l'écrouissage isotrope

L'évolution de la variable d'écrouissage isotrope R est donnée par :

$$\dot{R}=b\left(Q-R\right)\dot{p}+\gamma_r\left|Q_r-R\right|^{m_r}\operatorname{sgn}\left(Q_r-R\right) \qquad \text{éq 2.1-11}$$

Cette loi d'évolution de l'écrouissage isotrope fait intervenir un premier terme linéaire en fonction de la vitesse de déformation viscoplastique cumulée $\dot{p}$. Ce terme est utile pour décrire l'évolution de la boucle (adoucissement ou durcissement) en chargement cyclique. Ce terme fournit une valeur asymptotique de R (correspondant à l'état stabilisé) égale à la variable Q . Cette variable Q traduit le durcissement cyclique (l'effet de mémoire des déformations maximales). Ce n'est pas une constante mais elle dépend de l'amplitude maximum de la déformation (effet de mémoire) :

$$Q=Q_0+\left(Q_m-Q_0\right)\left(1-e^{-2\mu q}\right) \qquad \text{éq 2.1-12}$$

On définit dans l'espace des déformations une surface d'écoulement à l'intérieur de laquelle Q est une constante (domaine de non-écrouissage) :

$$f\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}},\boldsymbol{\xi},q\right)=\frac{2}{3}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi}\right)_{eq}-q\leq 0 \qquad \text{éq 2.1-13}$$

Ce critère définit un domaine caractérisant les déformations plastiques maximales, dont q mesure le rayon et $\boldsymbol{\xi}$ le centre, calculé suivant une loi de normalité :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}:\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}}>0 \qquad \text{éq 2.1-14}$$

La normale unitaire à la surface d'écoulement est notée :

$$\mathbf{n}^{*}=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\left\|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\|^{-1}=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi}}{\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi}\right)_{\mathbf{eq}}} \qquad \text{éq 2.1-15}$$

Les lois d'évolution des variables q et $\boldsymbol{\xi}$ sont données sous la forme :

$$\dot{q}=\eta\, H\left(f\right)\left\langle \mathbf{n}:\mathbf{n}^{*}\right\rangle \dot{p} \qquad \text{éq 2.1-16}$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\left(1-\eta\right)H\left(f\right)\left\langle \mathbf{n}:\mathbf{n}^{*}\right\rangle \dot{p}\;\mathbf{n}^{*} \qquad \text{éq 2.1-17}$$

Le paramètre η (qui n'existe pas dans la formulation initiale 5) permet de prendre en compte partiellement l'effet de mémoire. S'il est égal à 1/2, on retrouve la formulation initiale. S'il vaut 1, q est égal à la norme de la plus grande déformation plastique atteinte. S'il est très inférieur à 1/2, l'effet de mémoire est pris en compte en partie seulement.

Remarque :

Les mêmes expressions pour Q , f , $\dot{q}$ *et* $\dot{\xi}$ *sont utilisées dans les lois* `VMIS` / `VISC_CIN1` / `2_MEMO` [bib11] *qui sont des versions simplifiées(et optimisées) de* `VISCOCHAB` *cf [R5.03.04].*

La loi d'évolution de l'écrouissage isotrope [éq 2.1-11] fait intervenir un second terme, permettant de prendre en compte l'effet de la restauration. La variable Q_r est donnée par l'équation :

$$Q_r = Q - Q_r^* \left[1 - \left(\frac{Q_m - Q}{Q_m} \right)^2 \right] \qquad \text{éq 2.1-18}$$

Notons que dans le modèle initial de Chaboche [bib1], le coefficient m_r dans l'équation [éq 2.1-11] vaut 1.

2.1.3 Formulation de l'écrouissage cinématique

Avant de donner l'expression de la loi d'écrouissage du modèle `VISCOCHAB`, on rappelle les différentes étapes qui ont permis son élaboration.

La loi la plus simple est un écrouissage linéaire de la forme :

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{2}{3} C \, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \qquad \text{éq 2.1-19}$$

À cette loi, on peut rajouter un terme non-linéaire de rappel fournissant un effet de mémoire évanescente du trajet de chargement (modèle initial de Chaboche) :

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{2}{3} C \, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}} - \gamma \, \mathbf{X} \, \dot{p} \qquad \text{éq 2.1-20}$$

avec

$$\gamma = \gamma^0 \left[a_\infty + \left(1 - a_\infty \right) e^{-bp} \right] \qquad \text{éq 2.1-21}$$

Il a été montré qu'une telle loi sur-estime largement le phénomène de déformation progressive. Ceci amène à introduire un terme à évanescence radiale (terme dû à Burlet et Cailletaud) :

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{2}{3} C \, \dot{\varepsilon}^p - \gamma \left(\mathbf{X} : \mathbf{n} \right) \mathbf{n} \;\; \dot{p} \qquad \text{éq 2.1-22}$$

En fait, cette loi sous-estime maintenant le phénomène de déformation progressive. On peut alors combiner les deux équations [éq 2.1.20] et [éq 2.1.22] avec le paramètre de pondération $\delta \in [0,1]$, afin de mieux estimer les déformations progressives :

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{2}{3} C \, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \left[\delta \left(\gamma \, \mathbf{X} \, \dot{p} \right) + \left(1 - \delta \right) \left(\gamma \left(\mathbf{X} : \mathbf{n} \right) \mathbf{n} \;\; \dot{p} \right) \right] \qquad \text{éq 2.1-23}$$

Dans le modèle initial de Chaboche, on trouve aussi un terme supplémentaire qui permet d'introduire les effets de la restauration dans l'écrouissage cinématique, ce qui donne au final la loi suivante :

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{2}{3} C \, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \gamma \left[\delta \;\; \mathbf{X} + \left(1 - \delta \right) \left(\mathbf{X} : \mathbf{n} \right) \mathbf{n} \right] \dot{p} - \gamma_X \left[\left(\mathbf{X} \right)_{eq} \right]^{m-1} \mathbf{X} \qquad \text{éq 2.1-24}$$

avec γ donné par l'équation [éq 2.1-21].

Pour une prise en compte exacte de la dépendance des paramètres matériaux par rapport à la température, il est nécessaire de rajouter un terme supplémentaire en $\dot{T}$, ce qui donne :

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{2}{3} C \, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \gamma \left[\delta \;\; \mathbf{X} + \left(1 - \delta \right) \left(\mathbf{X} : \mathbf{n} \right) \mathbf{n} \right] \dot{p} - \gamma_X \left[\left(\mathbf{X} \right)_{eq} \right]^{m-1} \mathbf{X} + \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial T} \mathbf{X} \, \dot{T} \qquad \text{éq 2.1-25}$$

avec γ donné par l'équation [éq 2.1-21].

Le modèle VISCOCHAB proposé comporte en fait 2 variables d'écrouissage cinématique $\mathbf{X_1}$ et $\mathbf{X_2}$ dont les lois d'évolutions sont données par l'équation [éq 2.1-25].

Bilan :
La loi d'évolution de l'écrouissage est de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{X}=\mathbf{X_1}+\mathbf{X_2} \\ \dot{\mathbf{X}}_i=\frac{2}{3}C_i\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p-\gamma_i\left[\delta_i\,\mathbf{X_i}+\left(1-\delta_i\right)\left(\mathbf{X_i}:\mathbf{n}\right)\mathbf{n}\right]\dot{p} \\ \quad -\gamma_{Xi}\left[\left(\mathbf{X_i}\right)_{eq}\right]^{m_i-1}\mathbf{X_i}+\frac{1}{C_i}\frac{\partial C_i}{\partial T}\mathbf{X_i}\dot{T} \quad i=1,2 \end{cases} \quad \textbf{éq 2.1-26}$$

avec

$$\gamma_i=\gamma_i^0\left[a_\infty+\left(1-a_\infty\right)e^{-bp}\right] \quad i=1,2 \quad \textbf{éq 2.1-27}$$

2.2 Intégration implicite

Pour réaliser numériquement l'intégration de la loi de comportement, on effectue une discrétisation en temps et on adopte un schéma d'Euler implicite, réputé approprié pour des relations de comportement élastoplastiques. C'est la méthode utilisée par défaut. Il est également possible de réaliser une intégration explicite (voir §2.3) en choisissant le mot-clé ALGO_INTE='RUNGE_KUTTA'.
Dorénavant, on emploiera les notations suivantes : A^-, A^+ et ΔA représentent respectivement les valeurs d'une quantité au début et à la fin du pas de temps considéré ainsi que son incrément durant le pas. On a donc la relation : $\Delta A=A^+-A^-$. Le problème est alors le suivant : connaissant l'état au temps t^- ainsi que les incréments de déformation $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ (issus de la phase de prédiction (cf. STAT_NON_LINE [R5.03.01]) et de température ΔT, déterminer l'état des variables internes au temps t ainsi que les contraintes $\boldsymbol{\sigma}$.

2.2.1 Système d'équations

La discrétisation implicite du problème conduit à un système de 27 équations :

Relation contrainte-déformation	$\Delta\boldsymbol{\sigma}-H\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}-\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{th}}-\Delta p\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}^+}\right)=0$	6 éq	**éq 2.2-1**
Écrouissage cinématique	$\begin{cases} i=1,2 \\ \Delta\mathbf{X_i}-\frac{2}{3}C_i\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}+\gamma_i^+\left[\delta_i\,\mathbf{X_i^+}+\left(1-\delta_i\right)\left(\mathbf{X_i^+}:\mathbf{n}^+\right)\mathbf{n}^+\right]\Delta p \\ \quad +\gamma_{Xi}\left[\left(\Delta\mathbf{X_i^+}\right)_{eq}\right]^{m_i-1}\Delta\mathbf{X_i^+}\Delta t-\frac{1}{C_i}\frac{\partial C_i}{\partial T}\mathbf{X_i^+}\Delta T=0 \end{cases}$	12 éq	**éq 2.2-2**
Plasticité cumulée	$\Delta p-\Delta t\left\langle\frac{F^+}{K_0+\alpha_k R^+}\right\rangle^n\exp\left[\alpha\left\langle\frac{F^+}{K_0+\alpha_k R^+}\right\rangle^{n+1}\right]=0$	1 éq	**éq 2.2-3**
Écrouissage isotrope	$\Delta R-b\left(Q^+-R^+\right)\Delta p-\gamma_r\left\lvert Q_r^+-R^+\right\rvert^{m_r}\mathrm{sgn}\left(Q_r^+-R^+\right)\Delta t=0$	1 éq	**éq 2.2-4**
Effet de mémoire	$\Delta q-\eta\,H\left(f\right)\left\langle\mathbf{n}:\mathbf{n}^*\right\rangle^+\Delta p=0$	1 éq	**éq 2.2-5**

	$\Delta\xi-\sqrt{\frac{3}{2}}(1-\eta)H(f)\langle\mathbf{n}:\mathbf{n}^*\rangle^+\Delta p\,(\mathbf{n}^*)^+=0$	6 éq	**éq 2.2-6**

Dans ce système, γ_i^+ est donné en fonction de p^+ par l'équation [éq. 2.1-27] ; Q^+ et Q_r^+ sont obtenus en fonction de q^+ par les équations [éq. 2.1-12] et [éq. 2.1-18].

Les 27 inconnues sont : $\Delta\boldsymbol{\sigma}$, $\Delta\mathbf{X_1}$, $\Delta\mathbf{X_2}$, Δp , ΔR , Δq et $\Delta\boldsymbol{\xi}$.

Remarque :
Contrairement à VISC_CIN2_MEMO [R5.03.04], l'équation de vérification du seuil des déformations maximales : $f(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}},\boldsymbol{\xi},q)=\frac{2}{3}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi})_{eq}-q=0$ (voir [éq. 2.1-13]) n'est pas prise en compte.

2.2.2 Schéma général de résolution

On calcule la contrainte en faisant l'hypothèse d'un incrément purement élastique ($\Delta p=0$).

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\sigma}=H\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\quad\text{avec}\quad \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}=\Delta\mathbf{X_i}=\Delta\boldsymbol{\xi}=0\\ \Delta R=\Delta p=\Delta q=0\end{aligned}\qquad \textbf{éq 2.3-1}$$

On calcule la fonction seuil $F^+=(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{X})_{eq}^+-\alpha_R R^+-k$. Si $F^+\leq 0$ alors l'incrément est purement élastique et l'intégration est terminée. Sinon des corrections viscoplastiques sont effectuées en résolvant le système (S1) suivant :

Relation contrainte-déformation	$\Delta\boldsymbol{\sigma}-H\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}-\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{th}}-\Delta p\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}^+}\right)=0$	6 éq	**éq 2.3-2**
Écrouissage cinématique	$\begin{cases} i=1,2\\ \Delta\mathbf{X_i}-\frac{2}{3}C_i\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}+\gamma_i^+\left[\delta_i\,\mathbf{X_i^+}+(1-\delta_i)(\mathbf{X_i^+}:\mathbf{n}^+)\mathbf{n}^+\right]\Delta p\\ \quad +\gamma_{Xi}\left[(\mathbf{X_i^+})_{eq}\right]^{m_i-1}\mathbf{X_i^+}\Delta t-\frac{1}{C_i}\frac{\partial C_i}{\partial T}\mathbf{X_i}\Delta T=0\end{cases}$	12 éq	**éq 2.3-3**
Plasticité cumulée	$\Delta p-\Delta t\left(\frac{F^+}{K_0+\alpha_k R^+}\right)^n\exp\left[\alpha\left(\frac{F^+}{K_0+\alpha_k R^+}\right)^{n+1}\right]=0$	1 éq	**éq 2.3-4**
Écrouissage isotrope	$\Delta R-b(Q^+-R^+)\Delta p-\gamma_r\lvert Q_r^+-R^+\rvert^{m_r}\operatorname{sgn}(Q_r^+-R^+)\Delta t=0$	1 éq	**éq 2.3-5**
Effet de mémoire	$\Delta q=0$	1 éq	**éq 2.3-6**
	$\Delta\boldsymbol{\xi}=0$	6 éq	**éq 2.3-7**

Les 20 inconnues sont : $\Delta\boldsymbol{\sigma}$, $\Delta\mathbf{X_1}$, $\Delta\mathbf{X_2}$, Δp , ΔR . On remarque que Δq et $\Delta\boldsymbol{\xi}$ en font pas partie des inconnues car leur solution est triviale.

On remarque aussi que, à ce stade, on peut vérifier que $F^+>0$, et comme $K_0>0$, $\alpha_k>0$ et $R^+>0$, on a formellement remplacé les crochets (partie positive) de l'équation [éq 2.2.3] par des parenthèses simples dans l'équation [éq 2.3-4].

On calcule ensuite la fonction duale f « surface enveloppe des déformations maximales » :

$$f^+=\frac{2}{3}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi}\right)^+_{eq}-q^+ \qquad \textbf{éq 2.3-8}$$

Si $f^+\leq 0$ alors l'intégration est terminée. Sinon, on résout le système (S2) suivant :

Relation contrainte-déformation	$\Delta\boldsymbol{\sigma}-H\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}-\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{th}}-\Delta p\dfrac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}^+}\right)=0$	6 éq	**éq 2.3-9**
Écrouissage cinématique	$\begin{cases} i=1,2 \\ \Delta\mathbf{X_i}-\frac{2}{3}C_i\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}+\gamma_i^+\left[\delta_i\ \mathbf{X_i^+}+(1-\delta_i)(\mathbf{X_i^+}:\mathbf{n}^+)\mathbf{n}^+\right]\Delta p \\ \quad +\gamma_{Xi}\left[(\mathbf{X_i^+})_{eq}\right]^{m_i-1}\mathbf{X_i^+}\Delta t-\dfrac{1}{C_i}\dfrac{\partial C_i}{\partial T}\mathbf{X_i}\Delta T=0 \end{cases}$	12 éq	**éq 2.3-10**
Plasticité cumulée	$\Delta p-\Delta t\left(\dfrac{F^+}{K_0+\alpha_k R^+}\right)^n\exp\left[\alpha\left(\dfrac{F^+}{K_0+\alpha_k R^+}\right)^{n+1}\right]=0$	1 éq	**éq 2.3-11**
Écrouissage isotrope	$\Delta R-b(Q^+-R^+)\Delta p-\gamma_r\lvert Q_r^+-R^+\rvert^{m_r}\operatorname{sgn}(Q_r^+-R^+)\Delta t=0$	1 éq	**éq 2.3-12**
Effet de mémoire	$\Delta q-\eta\langle\mathbf{n}:\mathbf{n}^*\rangle^+\Delta p=0$	1 éq	**éq 2.3-13**
	$\Delta\boldsymbol{\xi}-\sqrt{\frac{3}{2}}(1-\eta)\langle\mathbf{n}:\mathbf{n}^*\rangle^+\Delta p\,(\mathbf{n}^*)^+=0$	6 éq	**éq 2.3-14**

Les 27 inconnues sont : $\Delta\boldsymbol{\sigma}$, $\Delta\mathbf{X_1}$, $\Delta\mathbf{X_2}$, Δp , ΔR , Δq et $\Delta\boldsymbol{\xi}$.
On remarque que puisque $f^+>0$, alors on a pu remplacer $H(f)$ des équations [éq 2.2-5] et [éq 2.2-6] par 1 dans les équations [éq 2.3-13] et [éq 2.3-14].

Le système (S1) (resp. (S2)) est un système implicite non-linéaire à 20 (resp. 27) équations et 20 (resp. 27) inconnues.
On peut formellement écrire ses systèmes : $\phi(\Delta Y)=0$, avec :

- $\Delta Y=(\Delta\boldsymbol{\sigma},\Delta\mathbf{X_1},\Delta\mathbf{X_2},\Delta p,\Delta R)^t$ pour (S1),
- et $\Delta Y=(\Delta\boldsymbol{\sigma},\Delta\mathbf{X_1},\Delta\mathbf{X_2},\Delta p,\Delta R,\Delta q,\Delta\boldsymbol{\xi})^t$ pour (S2).

Ces systèmes non-linéaires sont résolus par la méthode itérative de Newton (dans l'environnement PLASTI décrit par exemple dans [R5.03.10]) :

$$\phi(\Delta Y_k)+\left(\frac{\partial\phi}{\partial\Delta Y}\right)_{\Delta Y_k}(\Delta Y_{k+1}-\Delta Y_k)=0$$

en itérant en k jusqu'à convergence et en démarrant avec une solution initiale assurant cette convergence.

2.2.3 Calcul de la Jacobienne

Suivant que l'on ait à résoudre le système (S1) ou (S2), on décompose le système $\phi(\Delta Y)=0$ en sous-systèmes :

$$\phi(\Delta Y)=\begin{bmatrix} g(\Delta Y) \\ l(\Delta Y) \\ j(\Delta Y) \\ f(\Delta Y) \\ r(\Delta Y) \end{bmatrix} \text{ pour (S1) et } \phi(\Delta Y)=\begin{bmatrix} g(\Delta Y) \\ l(\Delta Y) \\ j(\Delta Y) \\ f(\Delta Y) \\ r(\Delta Y) \\ h(\Delta Y) \\ c(\Delta Y) \end{bmatrix} \text{ pour (S2).}$$

Où :

g représente la relation contrainte-déformation

l représente les équations de l'écrouissage cinématique $\mathbf{X_1}$

j représente les équations de l'écrouissage cinématique $\mathbf{X_2}$

f représente l'équation définissant la plasticité cumulée p

r représente l'équation définissant l'écrouissage isotrope $R(p)$

h représente l'équation définissant l'effet de mémoire q

c représente les équations définissant l'effet de mémoire $\boldsymbol{\xi}$

La matrice Jacobienne du système est la matrice J écrite par blocs :

$$J=\begin{bmatrix}
\frac{\partial g}{\partial(\Delta\sigma)} & \frac{\partial g}{\partial(\Delta X_1)} & \frac{\partial g}{\partial(\Delta X_2)} & \frac{\partial g}{\partial(\Delta p)} & \frac{\partial g}{\partial(\Delta R)} & \frac{\partial g}{\partial(\Delta q)} & \frac{\partial g}{\partial(\Delta\xi)} \\
\frac{\partial l}{\partial(\Delta\sigma)} & \frac{\partial l}{\partial(\Delta X_1)} & \frac{\partial l}{\partial(\Delta X_2)} & \frac{\partial l}{\partial(\Delta p)} & \frac{\partial l}{\partial(\Delta R)} & \frac{\partial l}{\partial(\Delta q)} & \frac{\partial l}{\partial(\Delta\xi)} \\
\frac{\partial j}{\partial(\Delta\sigma)} & \frac{\partial j}{\partial(\Delta X_1)} & \frac{\partial j}{\partial(\Delta X_2)} & \frac{\partial j}{\partial(\Delta p)} & \frac{\partial j}{\partial(\Delta R)} & \frac{\partial j}{\partial(\Delta q)} & \frac{\partial j}{\partial(\Delta\xi)} \\
\frac{\partial f}{\partial(\Delta\sigma)} & \frac{\partial f}{\partial(\Delta X_1)} & \frac{\partial f}{\partial(\Delta X_2)} & \frac{\partial f}{\partial(\Delta p)} & \frac{\partial f}{\partial(\Delta R)} & \frac{\partial f}{\partial(\Delta q)} & \frac{\partial f}{\partial(\Delta\xi)} \\
\frac{\partial r}{\partial(\Delta\sigma)} & \frac{\partial r}{\partial(\Delta X_1)} & \frac{\partial r}{\partial(\Delta X_2)} & \frac{\partial r}{\partial(\Delta p)} & \frac{\partial r}{\partial(\Delta R)} & \frac{\partial r}{\partial(\Delta q)} & \frac{\partial r}{\partial(\Delta\xi)} \\
\frac{\partial h}{\partial(\Delta\sigma)} & \frac{\partial h}{\partial(\Delta X_1)} & \frac{\partial h}{\partial(\Delta X_2)} & \frac{\partial h}{\partial(\Delta p)} & \frac{\partial h}{\partial(\Delta R)} & \frac{\partial h}{\partial(\Delta q)} & \frac{\partial h}{\partial(\Delta\xi)} \\
\frac{\partial c}{\partial(\Delta\sigma)} & \frac{\partial c}{\partial(\Delta X_1)} & \frac{\partial c}{\partial(\Delta X_2)} & \frac{\partial c}{\partial(\Delta p)} & \frac{\partial c}{\partial(\Delta R)} & \frac{\partial c}{\partial(\Delta q)} & \frac{\partial c}{\partial(\Delta\xi)}
\end{bmatrix}$$

Chaque terme de cette matrice non-symétrique est explicité en Annexe [§7.1]. On notera que les termes $\frac{\partial l}{\partial(\Delta X_1)}$, $\frac{\partial l}{\partial(\Delta X_2)}$, $\frac{\partial j}{\partial(\Delta X_1)}$ et $\frac{\partial j}{\partial(\Delta X_2)}$ ne tiennent pas compte de la dépendance en ΔT (voir [éq 2.3-10]).

2.3 Intégration explicite

Pour réaliser l'intégration explicite de la loi de comportement, on utilise la méthode de Runge-Kutta [R5.03.14]. On intègre donc directement par cette méthode le système de 27 équations différentielles suivant :

Écoulement	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\frac{\partial\Omega^p}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=\dot{p}\,\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=\frac{3}{2}\dot{p}\,\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{X}}{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{X})_{eq}}$	6 éq	**éq 2.3-10**
Écrouissage cinématique	$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p-\gamma_i\left[\delta_i\,\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{i}+(1-\delta_i)(\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{i}:\mathbf{n})\mathbf{n}\right]\dot{p}-\gamma_{Xi}\left[(\mathbf{X}_\mathbf{i})_{eq}\right]^{m_i-1}\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{i}\quad i=1,2$	12 éq	**éq 2.3-11**
Plasticité cumulée	$\dot{p}=\left\langle\frac{F}{K_0+\alpha_k R}\right\rangle^n\exp\left[\alpha\left\langle\frac{F}{K_0+\alpha_k R}\right\rangle^{n+1}\right]$	1 éq	**éq 2.3-12**
Écrouissage isotrope	$\dot{R}=b(Q-R)\dot{p}+\gamma_r\lvert Q_r-R\rvert^{m_r}\operatorname{sgn}(Q_r-R)$	1 éq	**éq 2.3-13**
Effet de mémoire	$\dot{q}=\eta\,H(f)\langle\mathbf{n:n}^*\rangle\,\dot{p}$	1 éq	**éq 2.3-14**
	$\dot{\boldsymbol{\xi}}=\sqrt{\frac{3}{2}}(1-\eta)H(f)\langle\mathbf{n}:\mathbf{n}^*\rangle\,\dot{p}\;\mathbf{n}^*$	6 éq	**éq 2.3-15**

avec :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{\sigma}-\sigma^H\,\mathbf{Id}=2\mu(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p})$$

$$A_{eq}=\sqrt{\frac{3}{2}\tilde{\mathbf{A}}:\tilde{\mathbf{A}}}$$

$$F(\boldsymbol{\sigma},R,\mathbf{X})=(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{X})_{eq}-\alpha_R R(p)-k$$

$$\mathbf{X}=\mathbf{X_1}+\mathbf{X_2}$$

$$\mathbf{X_1}=\frac{2}{3}C_1\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{1}\qquad\mathbf{X_2}=\frac{2}{3}C_2\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{2}$$

$$Q=Q_0+(Q_m-Q_0)(1-e^{-2\mu q})$$

$$Q_r = Q - Q_r^* \left[1 - \left(\frac{Q_m - Q}{Q_m} \right)^2 \right]$$

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\xi}, q) = \frac{2}{3} (\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} - \boldsymbol{\xi})_{eq} - q$$

$$\mathbf{n}^* = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} - \boldsymbol{\xi}}{(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} - \boldsymbol{\xi})_{\mathbf{eq}}}$$

2.4 Signification des variables internes

Les variables internes du modèle VISCOCHAB aux points de Gauss (VARI_ELGA) sont :

en 3D implicite	en 2D implicite	Runge-Kutta
V1 = X_{1xx}	V1 = X_{1xx}	V1 = ε_{xx}^{p}
V2 = X_{1yy}	V2 = X_{1yy}	V2 = ε_{yy}^{p}
V3 = X_{1zz}	V3 = X_{1zz}	V3 = ε_{zz}^{p}
V4 = X_{1xy}	V4 = X_{1xy}	V4 = ε_{xy}^{p}
V5 = X_{1xz}	V5 = X_{2xx}	V5 = ε_{xz}^{p}
V6 = X_{1yz}	V6 = X_{2yy}	V6 = ε_{yz}^{p}
V7 = X_{2xx}	V7 = X_{2zz}	V7 = α_{1xx}
V8 = X_{2yy}	V8 = X_{2xy}	V8 = α_{1yy}
V9 = X_{2zz}	V9 = p	V9 = α_{1zz}
V10 = X_{2xy}	V10 = R	V10 = α_{1xy}
V11 = X_{2xz}	V11 = q	V11 = α_{1xz}
V12 = X_{2yz}	V12 = ξ_{xx}	V12 = α_{1yz}
V13 = p	V13 = ξ_{yy}	V13 = α_{2xx}
V14 = R	V14 = ξ_{zz}	V14 = α_{2yy}
V15 = q	V15 = ξ_{xy}	V15 = α_{2zz}
V16 = ξ_{xx}	V16 = ζ	V16 = α_{2xy}
V17 = ξ_{yy}		V17 = α_{2xz}
V18 = ξ_{zz}		V18 = α_{2yz}
V19 = ξ_{xy}		V19 = ξ_{xx}
V20 = ξ_{xz}		V20 = ξ_{yy}
V21 = ξ_{yz}		V21 = ξ_{zz}
V22 = ζ		V22 = ξ_{xy}
		V23 = ξ_{xz}
		V24 = ξ_{yz}
		V25 = R
		V26 = q

		V27 = p
		V27 = 0

- l'indicateur ζ vaut 1 si le point de Gauss a plastifié au cours de l'incrément ou 0 sinon
- p représente la déformation plastique équivalente cumulée (positive ou nulle)

3 Fonctionnalités et vérification

La loi de comportement est définie par le mot-clé VISCOCHAB (mot clé facteur COMPORTEMENT des commandes STAT_NON_LINE, DYNA_NON_LINE, SIMU_POINT_MAT,...). Elle est associée aux matériaux VISCOCHAB et VISCOCHAB_FO (commande DEFI_MATERIAU).

La loi VISCOCHAB est vérifiée en particulier par les cas tests suivants :

COMP002I	[V6.07.102]	Test élémentaire de robustesse et de fiabilité des comportements visco-plastiques.
COMP010I	[V6.07.110]	Validation élémentaire de la prise en compte de la température dans les comportements visco-plastiques.
HSNV125D	[V7.22.125]	Élément de volume en traction / cisaillement et température variables (comparaison à d'autres codes)
SSND105B	[V6.08.105]	Loi de comportement visco-élasto-plastique avec effet de mémoire. Comparaison avec VISC_CIN2_MEMO
SSND111A	[V6.08.111]	Effet de mémoire dans un essai cyclique. Comparaison avec VISC_CIN2_MEMO
SSNV118	[V6.04.118]	Essai de traction cisaillement avec le modèle viscoplastique de Chaboche. Comparaison avec le logiciel SIDOLO

4 Identification des paramètres du modèle

Le modèle proposé étant très proche de celui de Chaboche, on pourra se référer à [bib4] pour l'identification des paramètres du modèle initial de Chaboche.

Pour l'identification des paramètres supplémentaires, la référence [bib4] présente les essais utilisés pour compléter l'identification de l'acier 316 SPH.

Plus récemment, l'identification de l'acier 304L a été réalisée sans tenir compte des phénomènes de restauration et de déformation progressive [bib10].

5 Bibliographie

1. J.LEMAITRE, J.L.CHABOCHE, Mécanique des matériaux solides. Dunod 1996
2. L. BONNAFOUX, « Modification du modèle viscoplastique de Chaboche pour la modélisation du phénomène de déformations progressives et implantation dans le code éléments finis Aster », Rapport interne EDF R&D, 1993
3. P. GEYER, « Modélisation des phénomènes de déformation progressive par le modèle élastoplastique de Chaboche modifié par Burlet et Cailletaud », Note HT-26/93/052/A (H-T20-1994-00254-FR dans Eureka), 1994

4. P. GEYER, « Étude et modification du modèle élastoviscoplastique de Chaboche pour améliorer la description du rochet 2d ». Note HT-26/95/032/A (H-T20-1995-05189-FR dans Eureka), 1995

5. P. GEYER, « Confrontation du modèle de Chaboche modifié par Burlet et Cailletaud aux essais de pression-traction du CEA », Note HT-26/94/006/A (H-T20-1994-02201-FR dans Eureka), 1994

6. P. GEYER, « Simulation numérique d'un essai bi-tube avec les modèles élastoplastiques de Chaboche et de Taheri », Note HT-26/94/023/A (H-T20-1995-00954-FR dans Eureka), 1995

7. P. GEYER, « Évaluation des modèles de Chaboche et Burlet par le calcul de l'essai COTHAA nA8 », Note HT-C2/96/010/A (H-T00-1997-00320-FR dans Eureka), 1997

8. P. GEYER, « Évaluation des modèles de Chaboche et Burlet par le calcul du manchon monobloc testé sur la boucle CUMULUS en déformation progressive »,Note HT-C2/96/047/A (H-T00-1997-02043-FR dans Eureka), 1997

9. P. GEYER, « Caractérisation de l'acier 304L utilisé lors des essais "déformation progressive" sur CUMULUS et identification des paramètres du modèle de Chaboche », Note HT-26/93/040/A (H-T20-1993-03153-FR dans Eureka), 1993

10. F. CURTIT, « Identification d'une loi de comportement de type Chaboche avec effet de mémoire d'écrouissage pour l'acier 304L à 20°C et 300°C », Note H-T26-2007-3264, 2008

11. J.M. PROIX, « Relations de comportement élasto-visco-plastique de Chaboche, Document de Référence de Code_Aster », [R5.03.04], 2007

12. P.GEYER, J.M.PROIX, S.JAYET-GENDROT, S.TAHERI, « A 3D elastoplastic cyclic consitutive law for the description of ratchetting of 316 stainless steel », SMIRT 1995

6 Description des versions du document

Version Aster	**Auteur(s) ou contributeur(s), organisme**	**Description des modifications**
9.4	S. Geniaut EDF/R&D/AMA	Texte initial, loi `VISCOCHAB`
10.5	J.M.Proix EDF/R&D/AMA	Correction du § signification des variables internes et ajout du § fonctionnalités et vérification

7 Annexes

7.1 Expression des termes de la matrice Jacobienne

Dans les calculs présentés ici, on omettra l'exposant « + » pour désigner les quantités à l'instant actuel (fin du pas de temps).

La matrice Jacobienne du système est la matrice $\mathbf{J}$ écrite par blocs :

$$\mathbf{J}=\begin{vmatrix}
\frac{\partial g}{\partial(\Delta\boldsymbol{\sigma})} & \frac{\partial g}{\partial(\Delta\mathbf{X_1})} & \frac{\partial g}{\partial(\Delta\mathbf{X_2})} & \frac{\partial g}{\partial(\Delta p)} & \frac{\partial g}{\partial(\Delta R)} & \frac{\partial g}{\partial(\Delta q)} & \frac{\partial g}{\partial(\Delta\boldsymbol{\xi})} \\
\frac{\partial l}{\partial(\Delta\boldsymbol{\sigma})} & \frac{\partial l}{\partial(\Delta\mathbf{X_1})} & \frac{\partial l}{\partial(\Delta\mathbf{X_2})} & \frac{\partial l}{\partial(\Delta p)} & \frac{\partial l}{\partial(\Delta R)} & \frac{\partial l}{\partial(\Delta q)} & \frac{\partial l}{\partial(\Delta\boldsymbol{\xi})} \\
\frac{\partial j}{\partial(\Delta\boldsymbol{\sigma})} & \frac{\partial j}{\partial(\Delta\mathbf{X_1})} & \frac{\partial j}{\partial(\Delta\mathbf{X_2})} & \frac{\partial j}{\partial(\Delta p)} & \frac{\partial j}{\partial(\Delta R)} & \frac{\partial j}{\partial(\Delta q)} & \frac{\partial j}{\partial(\Delta\boldsymbol{\xi})} \\
\frac{\partial f}{\partial(\Delta\boldsymbol{\sigma})} & \frac{\partial f}{\partial(\Delta\mathbf{X_1})} & \frac{\partial f}{\partial(\Delta\mathbf{X_2})} & \frac{\partial f}{\partial(\Delta p)} & \frac{\partial f}{\partial(\Delta R)} & \frac{\partial f}{\partial(\Delta q)} & \frac{\partial f}{\partial(\Delta\boldsymbol{\xi})} \\
\frac{\partial r}{\partial(\Delta\boldsymbol{\sigma})} & \frac{\partial r}{\partial(\Delta\mathbf{X_1})} & \frac{\partial r}{\partial(\Delta\mathbf{X_2})} & \frac{\partial r}{\partial(\Delta p)} & \frac{\partial r}{\partial(\Delta R)} & \frac{\partial r}{\partial(\Delta q)} & \frac{\partial r}{\partial(\Delta\boldsymbol{\xi})} \\
\frac{\partial h}{\partial(\Delta\boldsymbol{\sigma})} & \frac{\partial h}{\partial(\Delta\mathbf{X_1})} & \frac{\partial h}{\partial(\Delta\mathbf{X_2})} & \frac{\partial h}{\partial(\Delta p)} & \frac{\partial h}{\partial(\Delta R)} & \frac{\partial h}{\partial(\Delta q)} & \frac{\partial h}{\partial(\Delta\boldsymbol{\xi})} \\
\frac{\partial c}{\partial(\Delta\boldsymbol{\sigma})} & \frac{\partial c}{\partial(\Delta\mathbf{X_1})} & \frac{\partial c}{\partial(\Delta\mathbf{X_2})} & \frac{\partial c}{\partial(\Delta p)} & \frac{\partial c}{\partial(\Delta R)} & \frac{\partial c}{\partial(\Delta q)} & \frac{\partial c}{\partial(\Delta\boldsymbol{\xi})}
\end{vmatrix}$$

<u>termes liés à la relation contrainte-déformation élastique :</u>

$$\boxed{g(\Delta Y)=\Delta\boldsymbol{\sigma}-H\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}-\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{th}}-\Delta p\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}^{+}}\right)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial(\Delta\boldsymbol{\sigma})}=I_d+H\left(\frac{\partial^2 F}{\partial^2\boldsymbol{\sigma}}\right)\Delta p$$

$$\frac{\partial g}{\partial(\Delta\mathbf{X_i})}=H\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\mathbf{X_i}\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)\Delta p$$

$$\frac{\partial g}{\partial(\Delta p)}=H\left(\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial(\Delta R)}=0,\quad\frac{\partial g}{\partial(\Delta q)}=0,\quad\frac{\partial g}{\partial(\Delta\boldsymbol{\xi})}=0$$

-

termes liés à l'écrouissage cinématique :

$$\boxed{k_i(\Delta Y)=\Delta \mathbf{X_i}-\frac{2}{3}C_i\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}+\gamma_i^{+}\left[\delta_i\,\mathbf{X_i^+}+(1-\delta_i)\left(\mathbf{X_i^+}:\mathbf{n}^+\right)\mathbf{n}^+\right]\Delta p+\gamma_{Xi}\left[\left(\mathbf{X_i^+}\right)_{eq}\right]^{m_i-1}\mathbf{X_i^+}\Delta t\quad i=1,2}$$

avec : $n=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{X}}{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{X})_{eq}}$ et $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}=\Delta p\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$

$$\frac{\partial k_i}{\partial(\Delta \boldsymbol{\sigma})}=-\frac{2}{3}C_i\Delta p\frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}+\gamma_i\frac{2}{3}(1-\delta_i)\Delta p\left[\left(X_i:\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}:\mathbf{X_i}\right)\otimes\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right]$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial k_i}{\partial(\Delta \mathbf{X_i})}=&\,\mathbf{I_d}-\frac{2}{3}C_i\Delta p\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{X_i}\partial \boldsymbol{\sigma}}\\&+\gamma_i\Delta p\left\{\delta_i\mathbf{I_d}+\frac{2}{3}(1-\delta_i)\left[\left(\mathbf{X_i}:\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{X_i}\partial \boldsymbol{\sigma}}+\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\otimes\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{X_i}\partial \boldsymbol{\sigma}}:\mathbf{X_i}\right)\otimes\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right]\right\}\\&+\gamma_{Xi}\Delta t\left[(\mathbf{X_i})_{eq}\right]^{m_i-1}\mathbf{I_d}+\gamma_{Xi}\Delta t\,(m_i-1)\frac{\partial(\mathbf{X_i})_{eq}}{\partial \mathbf{X_i}}\left[(\mathbf{X_i})_{eq}\right]^{m_i-2}\mathbf{X_i}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial k_i}{\partial(\Delta \mathbf{X_j})_{(j\neq i)}}=-\frac{2}{3}C_i\Delta p\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{X_j}\partial \boldsymbol{\sigma}}+\gamma_i\frac{2}{3}(1-\delta_i)\Delta p\left[\left(\mathbf{X_i}:\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{X_j}\partial \boldsymbol{\sigma}}+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{X_j}\partial \boldsymbol{\sigma}}:\mathbf{X_i}\right)\otimes\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right]$$

$$\frac{\partial k_i}{\partial(\Delta p)}=-\frac{2}{3}C_i\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}+\left(\gamma_i'(p)\Delta p+\gamma_i(p)\right)\left[\delta_i\mathbf{X_i}+\frac{2}{3}(1-\delta_i)\left(\mathbf{X_i}:\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right]$$

$$\frac{\partial k_i}{\partial(\Delta R)}=0,\quad \frac{\partial k_i}{\partial(\Delta q)}=0,\quad \frac{\partial k_i}{\partial(\Delta \boldsymbol{\xi})}=0$$

termes liés à la plasticité cumulée :

$$\boxed{f(\Delta Y)=\Delta p-\Delta t\left(\frac{F^+}{K_0+\alpha_k R^+}\right)^n \exp\left[\alpha\left(\frac{F^+}{K_0+\alpha_k R^+}\right)^{n+1}\right]}$$

$$\frac{\partial f}{\partial(\Delta\boldsymbol{\sigma})}=-\Delta t\left(\frac{F}{K_0+\alpha_k R}\right)^{n-1}\exp\left[\alpha\left(\frac{F}{K_0+\alpha_k R}\right)^{n+1}\right]\frac{1}{K_0+\alpha_k R}\left[n+\alpha(n+1)\left(\frac{F}{K_0+\alpha_k R}\right)^{n+1}\right]\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial(\Delta\mathbf{X_i})}=-\Delta t\left(\frac{F}{K_0+\alpha_k R}\right)^{n-1}\exp\left[\alpha\left(\frac{F}{K_0+\alpha_k R}\right)^{n+1}\right]\frac{1}{K_0+\alpha_k R}\left[n+\alpha(n+1)\left(\frac{F}{K_0+\alpha_k R}\right)^{n+1}\right]\frac{\partial F}{\partial\mathbf{X_i}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial(\Delta R)}=\Delta t\left(\frac{F}{K_0+\alpha_k R}\right)^{n-1}\exp\left[\alpha\left(\frac{F}{K_0+\alpha_k R}\right)^{n+1}\right]\frac{1}{K_0+\alpha_k R}$$

$$\times\left[n+\alpha(n+1)\left(\frac{F}{K_0+\alpha_k R}\right)^{n+1}\right]\left(\alpha_R+\alpha_k\frac{F}{K_0+\alpha_k R}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial(\Delta p)}=1,\quad \frac{\partial g}{\partial(\Delta q)}=0,\quad \frac{\partial g}{\partial(\Delta\boldsymbol{\xi})}=0$$

termes liés à l'écrouissage isotrope :

$$\boxed{r(\Delta Y)=\Delta R-b(Q^+-R^+)\Delta p-\gamma_r|Q_r^+-R^+|^{m_r}\operatorname{sgn}(Q_r^+-R^+)\Delta t}$$

$$\frac{\partial r}{\partial(\Delta\boldsymbol{\sigma})}=\mathbf{0}$$

$$\frac{\partial r}{\partial(\Delta\mathbf{X_i})}=\mathbf{0}$$

$$\frac{\partial r}{\partial(\Delta p)}=-b(Q-R)$$

$$\frac{\partial r}{\partial(\Delta R)}=1+b\Delta p+\gamma_r m_r|Q_r-R|^{m_r-1}\Delta t$$

$$\frac{\partial r}{\partial(\Delta q)}=-b\Delta p\,Q'(q)-\gamma_r m_r|Q_r-R|^{m_r-1}\,Q_r'(q)\Delta t$$

$$\text{avec}\quad\begin{cases}Q'(q)=2\mu(Q_m-Q_0)e^{-2muq}\\ Q_r'(q)=Q'(q)\left[1-2\mathrm{Q}_r^*\left(\dfrac{Q_m-Q}{Q_m^2}\right)\right]\end{cases}$$

$$\frac{\partial r}{\partial(\Delta\boldsymbol{\xi})}=\mathbf{0}$$

termes liés à la taille du domaine relatif à l'effet de mémoire :

$\boxed{h(\Delta Y)=\Delta q-\eta\langle\mathbf{n}:\mathbf{n}^*\rangle^+\Delta p}$ avec $\mathbf{n}^*=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi}}{(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi})_{eq}}$

Ici, on fait une approximation, en considérant que $\langle\mathbf{n}:\mathbf{n}^*\rangle^+=(\mathbf{n}:\mathbf{n}^*)^+$.

$$\frac{\partial h}{\partial(\Delta\boldsymbol{\sigma})}=-\eta\Delta p\frac{1}{(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi})_{eq}}[\frac{\partial^2 F}{\partial\boldsymbol{\sigma}^2}:(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi})+\Delta p\frac{\partial^2 F}{\partial\boldsymbol{\sigma}^2}:\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$$
$$-\frac{3}{2}\frac{\Delta p}{[(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi})_{eq}]^2}\left(\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi})\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\boldsymbol{\sigma}^2}:(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi})\right)]$$
$$\frac{\partial h}{\partial(\Delta\mathbf{X_i})}=-\eta\Delta p\frac{1}{(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi})_{eq}}[\frac{\partial^2 F}{\partial\mathbf{X_i}\partial\boldsymbol{\sigma}}:(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi})+\Delta p\frac{\partial^2 F}{\partial\mathbf{X_i}\partial\boldsymbol{\sigma}}:\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$$
$$-\frac{3}{2}\frac{\Delta p}{[(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi})_{eq}]^2}\left(\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi})\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_i\partial\boldsymbol{\sigma}}:(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi})\right)]$$
$$\frac{\partial h}{\partial(\Delta p)}=-\eta\frac{1}{(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi})_{eq}}[\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi})+\Delta p\left(\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)-\frac{3}{2}\frac{\Delta p}{[(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi})_{eq}]^2}\left(\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi})\right)^2]$$
$$\frac{\partial h}{\partial(\Delta R)}=0$$
$$\frac{\partial h}{\partial(\Delta q)}=1$$
$$\frac{\partial h}{\partial(\Delta\boldsymbol{\xi})}=\frac{\eta}{(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi})_{eq}}\Delta p\left[\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}+\frac{3}{2}(\mathbf{n}:\mathbf{n}^*)\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi}}{(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi})_{eq}}\right]$$

<u>termes liés au centre du domaine relatif à l'effet de mémoire :</u>

$$\boxed{c(\Delta Y)=\Delta \boldsymbol{\xi}-\sqrt{\frac{3}{2}}(1-\eta)\langle \mathbf{n}:\mathbf{n}^*\rangle^+ \Delta p\,(\mathbf{n}^*)^+}$$

Ici, on fait une approximation, en considérant que $\langle \mathbf{n}:\mathbf{n}^*\rangle^+=(\mathbf{n}:\mathbf{n}^*)^+$.

$$\frac{\partial c}{\partial(\Delta \boldsymbol{\sigma})}=-\frac{3}{2}(1-\eta)\frac{\Delta p}{(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})_{eq}}[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}:(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})\right)\otimes\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})}{(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})_{eq}}+\Delta p(\mathbf{n}:\mathbf{n}^*)\frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}$$

$$-3\frac{\Delta p}{\left[(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})_{eq}\right]^2}(\mathbf{n}:\mathbf{n}^*)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}:(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})\right)\otimes(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})+\Delta p\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})}{(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})_{eq}}\otimes\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}\right)]$$

$$\frac{\partial c}{\partial(\Delta \mathbf{X_i})}=-\frac{3}{2}(1-\eta)\frac{\Delta p}{(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})_{eq}}[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{X_i}\partial \boldsymbol{\sigma}}:(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})\right)\otimes\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})}{(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})_{eq}}+\Delta p(\mathbf{n}:\mathbf{n}^*)\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{X_i}\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$-3\frac{\Delta p}{\left[(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})_{eq}\right]^2}(\mathbf{n}:\mathbf{n}^*)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{X_i}\partial \boldsymbol{\sigma}}:(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})\right)\otimes(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})+\Delta p\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})}{(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})_{eq}}\otimes\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{X_i}\partial \sigma}\right)]$$

$$\frac{\partial c}{\partial(\Delta p)}=-\frac{3}{2}(1-\eta)\frac{1}{(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})_{eq}}[(\mathbf{n}:\mathbf{n}^*)(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})+\frac{\Delta p}{(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})_{eq}}\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})$$

$$+\Delta p(\mathbf{n}:\mathbf{n}^*)\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}-3\frac{\Delta p}{(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})_{eq}}(\mathbf{n}:\mathbf{n}^*)^2(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})]$$

$$\frac{\partial c}{\partial(\Delta R)}=0$$

$$\frac{\partial c}{\partial(\Delta q)}=0$$

$$\frac{\partial c}{\partial(\Delta \boldsymbol{\xi})}=\mathbf{I_d}+\frac{3}{2}(1-\eta)\frac{\Delta p}{(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})_{eq}}\left[\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\otimes\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})}{(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})_{eq}}+(\mathbf{n}:\mathbf{n}^*)\mathbf{I_d}-3(\mathbf{n}:\mathbf{n}^*)\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})}{(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})_{eq}}\otimes\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})}{(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})_{eq}}\right]$$

$$=\mathbf{I_d}+\frac{3}{2}(1-\eta)\frac{\Delta p}{(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p}-\boldsymbol{\xi})_{eq}}\left[(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}^*)+(\mathbf{n}:\mathbf{n}^*)I_d-3(\mathbf{n}:\mathbf{n}^*)(\mathbf{n}^*\otimes\mathbf{n}^*)\right]$$

7.2 Calcul de la rigidité tangente

Le schéma itératif de Newton global (pour assurer l'équilibre) nécessite de connaître l'opérateur tangent du système assemblé en fin de chaque incrément. On note l'opérateur tangent $\mathbf{M_c}=\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$. Il est possible de déterminer cet opérateur à partir des termes de la jacobienne J du système local, déjà calculés précédemment (voir §7.1).

En effet, le système $\phi(\Delta Y)=0$ est vérifié en fin d'incrément et pour une petite variation de ϕ , en considérant cette fois ε comme variable, le système reste à l'équilibre et donc on vérifie $d\,\phi=0$. Par différentiation, on obtient :

Pour le système (S1) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial(\Delta \varepsilon)} d(\Delta \varepsilon)+\frac{\partial \phi}{\partial(\Delta \sigma)} d(\Delta \sigma)+\frac{\partial \phi}{\partial(\Delta \mathrm{X_i})} d(\Delta \mathrm{X_i}) +\frac{\partial \phi}{\partial(\Delta p)} d(\Delta p)+\frac{\partial \phi}{\partial(\Delta R)} d(\Delta R)=0$$

Pour le système (S2) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial(\Delta \varepsilon)} d(\Delta \varepsilon)+\frac{\partial \phi}{\partial(\Delta \sigma)} d(\Delta \sigma)+\frac{\partial \phi}{\partial(\Delta \mathrm{X_i})} d(\Delta \mathrm{X_i}) +\frac{\partial \phi}{\partial(\Delta p)} d(\Delta p)+\frac{\partial \phi}{\partial(\Delta R)} d(\Delta R)+\frac{\partial \phi}{\partial(\Delta q)} d(\Delta q)+\frac{\partial \phi}{\partial(\Delta \xi)} d(\Delta \xi)=0$$

Dans la suite, la présentation se limite au système (S1), mais la démarche est identique pour le système (S2).

On ré-écrit le système en mettant les termes en ε dans le membre de droite :

$$\frac{\partial \phi}{\partial(\Delta \sigma)} d(\Delta \sigma)+\frac{\partial \phi}{\partial(\Delta \mathrm{X_i})} d(\Delta \mathrm{X_i})+\frac{\partial \phi}{\partial(\Delta p)} d(\Delta p)+\frac{\partial \phi}{\partial(\Delta R)} d(\Delta R)=-\frac{\partial \phi}{\partial(\Delta \varepsilon)} d(\Delta \varepsilon)$$

Avec les notations définies précédemment, ce système s'écrit sous forme matricielle :

$$J\,.\,d(\Delta Y)=-\frac{\partial \phi}{\partial(\Delta \varepsilon)} d(\Delta \varepsilon)\ .$$

Or $\frac{\partial \phi}{\partial(\Delta \varepsilon)}=\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial(\Delta \varepsilon)} \\ \frac{\partial k_i}{\partial(\Delta \varepsilon)} \\ \frac{\partial f}{\partial(\Delta \varepsilon)} \\ \frac{\partial r}{\partial(\Delta \varepsilon)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\mathbf{H} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ où $\mathbf{H}$ représente le module élastique.

D'où $\mathbf{J}\,.\,d(\Delta \mathrm{Y})=\begin{pmatrix} \mathbf{H}\, d(\Delta \varepsilon) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

L'idée consiste ensuite à écrire ce système par blocs, en séparant $d(\Delta\boldsymbol{\sigma})$ des autres variables $\mathbf{Z}=\left(d(\Delta\mathbf{X_i}),d(\Delta p),d(\Delta R)\right)^t$, ce qui donne :

$$\begin{bmatrix}\mathbf{J}_{\sigma\sigma} & \mathbf{J}_{\sigma\mathbf{Z}}\\ \mathbf{J}_{\sigma\mathbf{Z}} & \mathbf{J}_{\mathbf{ZZ}}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}d(\Delta\boldsymbol{\sigma})\\ \mathbf{Z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{H}\,\mathbf{d}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon})\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

En calculant le complément de Schur de $\mathbf{J}_{\mathbf{ZZ}}$, on trouve que :

$$\left[\mathbf{J}_{\sigma\sigma}-\mathbf{J}_{\sigma\mathbf{Z}}(\mathbf{J}_{\mathbf{ZZ}})^{-1}\mathbf{J}_{\mathbf{Z}\sigma}\right]d(\Delta\boldsymbol{\sigma})=\mathbf{H}\,d(\Delta\boldsymbol{\varepsilon})\ ,$$

d'où l'expression de l'opérateur tangent :

$$\mathbf{M_c}=\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{d(\Delta\boldsymbol{\sigma})}{d(\Delta\varepsilon)}=\left[\mathbf{J}_{\sigma\sigma}-\mathbf{J}_{\sigma\mathbf{Z}}(\mathbf{J}_{\mathbf{ZZ}})^{-1}\mathbf{J}_{\mathbf{Z}\sigma}\right]^{-1}\mathbf{H}$$

Remarque :

Puisque $\mathbf{J}$ *n'est pas symétrique, l'opérateur tangent* $\mathbf{M_c}$ *ne l'est pas non plus. Il est toutefois symétrisé dans Code_Aster.*