

Élément CABLE_GAINE

Résumé :

L'élément CABLE_GAINE présenté dans ce document a pour but de modéliser des câbles de précontrainte pouvant frotter ou glisser dans leurs gaines et donc ne suivant pas totalement les déplacements du béton dans lequel ils sont plongés. Il vient donc en complément de la modélisation BARRE allié à l'opérateur DEFI_CABLE_BP qui permet de modéliser des câbles de précontrainte totalement adhérents au béton (voir [R7.01.02]).

Cet élément est très fortement inspiré de l'élément d'interface décrit dans [R3.06.13]. Il modélise l'interface du câble avec sa gaine et le câble lui-même.

Table des Matières

1 Formulation variationnelle.....	3
1.1 Énergie potentielle et minimisation.....	3
1.2 Lagrangien augmenté.....	4
1.3 Caractérisation du point selle.....	4
2 Discrétisation de l'élément fini.....	4
3 Condensation statique.....	5
4 Intégration.....	6
4.1 Adhérence parfaite.....	6
4.2 Glissement sans frottement.....	6
4.2.1 Glissement avec frottement (BPEL).....	7
5 Écriture discrétisée.....	8
5.1 Notations.....	8
5.2 Discrétisation des conditions d'optimalité.....	9
5.3 Forces internes.....	9
5.4 Matrice de rigidité.....	10
5.4.1 Cas adhérent et glissant.....	10
5.4.2 Cas frottant.....	10
6 Convergence du calcul : réglage des paramètres.....	11
6.1 Coefficient de pénalisation.....	11
6.2 Critère de convergence par valeurs de référence.....	11

1 Formulation variationnelle

1.1 Énergie potentielle et minimisation

L'énergie potentielle, dont on va chercher le minimum local, s'écrit comme la somme de l'énergie de déformation élastique (dans le câble), de l'énergie cohésive (à l'interface gaine/câble) moins le travail des efforts extérieurs :

$$E_{pot}(u) = E_{el}(u) + E_{gc}(u) - W_{ext}(u)$$

L'expression de l'énergie élastique est la suivante :

$$E_{el}(u) = \int_{\Gamma} \Phi(\varepsilon(\mathbf{u}_{cable}(s))) ds$$

où Γ est le trajet (1D) du câble, Φ est la densité d'énergie élastique et \mathbf{u}_{cable} est le déplacement du câble.

Le déplacement du câble se définit ainsi :

$$\mathbf{u}_{cable}(s) = \mathbf{u}_{gaine}(s) + g(s) \mathbf{T}(s)$$

où \mathbf{T} représente la tangente au câble, \mathbf{u}_{gaine} le déplacement de la gaine et g le déplacement relatif du câble par rapport à la gaine.

On a alors (Cf. Salençon « mécanique des milieux continus – Tome II : Élasticité – Milieux curvilignes ») :

$$\varepsilon(\mathbf{u}_{cable}(s)) = \frac{d(\mathbf{u}_{gaine} + g\mathbf{T})}{ds} \cdot \mathbf{T} = \frac{d(\mathbf{u}_{gaine})}{ds} \cdot \mathbf{T} + \frac{dg}{ds}$$

On précise que la multiplication par le vecteur tangent au câble \mathbf{T} permet de passer d'un vecteur « allongement » selon les trois directions de l'espace à un « allongement » scalaire le long du câble.

En fait pour obtenir cette expression on néglige $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$.

On définit les deux grandeurs suivantes :

$$\varepsilon_{u_{gaine}}(\mathbf{u}_{gaine}) = \frac{d(\mathbf{u}_{gaine})}{ds} \cdot \mathbf{T} \quad \text{et} \quad \varepsilon_g(g) = \frac{dg}{ds}$$

Ainsi la déformation du câble s'écrit finalement :

$$\varepsilon(\mathbf{u}_{cable}(s)) = \varepsilon_{u_{gaine}}(\mathbf{u}_{gaine}) + \varepsilon_g(g)$$

L'énergie cohésive (gaine/câble) quant à elle s'écrit :

$$E_{gc}(u) = \int_{\Gamma} \Pi(g(s)) ds$$

où Π est la densité d'énergie cohésive.

Compte-tenu de la non dérivabilité de Π , on va utiliser une méthode de décomposition-coordination pour traiter cette minimisation. Cela consiste à introduire le glissement δ , à poser $\delta(s) = g(s)$ et à se ramener au problème de minimisation sous contrainte suivant :

$$\min_{\substack{u, \delta \\ g = \delta}} E(u, \delta)$$

avec

$$E(u, \delta) = \int_{\Gamma} \Phi(\varepsilon(u_{cable}(s))) ds + \int_{\Gamma} \Pi(\delta(s)) ds - W_{ext_{gaine}}(u_{gaine}) - W_{ext_{cable}}(g)$$

Cela va permettre de traiter séparément (décomposition) la minimisation de l'énergie cohésive au niveau local (condensation statique) alors que la minimisation de l'énergie élastique et du travail sera traitée au niveau global.

1.2 Lagrangien augmenté

Le problème de minimisation sous contraintes est traité par dualisation : on introduit le Lagrangien augmenté L et le champ de multiplicateurs λ (coordination) :

$$L(u, \delta, \lambda) = E(u, \delta) + \int_{\Gamma} \lambda(s) \cdot (g(s) - \delta(s)) ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma} (g(s) - \delta(s))^2 ds$$

avec r coefficient de pénalisation.

1.3 Caractérisation du point selle

Les conditions d'optimalité d'ordre 1 permettent d'écrire :

$$\forall \delta u_{gaine} : \int_{\Gamma} \sigma : \varepsilon_{u_{gaine}}(\delta u_{gaine}(s)) ds = W_{ext_{gaine}}(\delta u_{gaine}) \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) \quad [\text{éq. 1.1}]$$

$$\forall \delta g : \int_{\Gamma} \sigma : \varepsilon_g(\delta g(s)) ds + \int_{\Gamma} [\lambda(s) + r(g(s) - \delta(s))] \cdot \delta g(s) ds = W_{ext_{cable}}(\delta g) \quad [\text{éq. 1.2}]$$

$$\forall \delta \lambda : \int_{\Gamma} [g(s) - \delta(s)] \cdot \delta \lambda(s) ds = 0 \quad [\text{éq. 1.3}]$$

$$\forall \delta \delta : \int_{\Gamma} [t(s) - \lambda(s) - r(g(s) - \delta(s))] \cdot \delta \delta(s) ds = 0 \quad \text{avec} \quad t \in \partial \Pi(\delta) \quad [\text{éq. 1.4}]$$

2 Discrétisation de l'élément fini

Remarque préliminaire :

L'élément fini envisagé modélise l'interface du câble avec sa gaine et le câble lui-même. Il aurait été envisageable de modéliser séparément l'interface câble-gaine (avec un élément fini d'interface) et le câble lui-même (avec un élément fini de câble), néanmoins, comme on le verra par la suite la loi de comportement frottante nécessite la connaissance de la tension dans le câble, il est donc avantageux de disposer dans le même élément de l'interface et du câble. De plus, comme on le verra ci-dessous, la modélisation proposée s'appuie sur des éléments quadratiques, il n'est donc pas possible de réutiliser l'élément *BARRE* existant.

L'élément fini envisagé est linéique (appui géométrique sous forme de segments), contrairement aux éléments d'interface qui sont surfaciques ou volumiques.

Il est considéré représenter un câble plongé dans un volume (de béton) 3D . En conséquence, les degrés de liberté sont :

- les déplacements de la gaine (3 degrés de liberté) : u_{gaine}
- le déplacement longitudinal relatif du câble dans la gaine g
- et le multiplicateur de Lagrange λ .

De façon analogue aux éléments d'interface, le glissement relatif δ est discrétisé aux points de Gauss puis éliminé par condensation statique. L'interpolation adoptée est P2 pour les déplacements (de la gaine et du câble) et P1 pour le multiplicateur de Lagrange. Les éléments géométriques d'appui seront donc des SEG3. La contrainte $g = \delta$ est imposée au sens faible.

Les points de Gauss choisis sont les mêmes que pour l'élément d'interface sous-intégré, soit 2 points d'intégration (contrairement aux éléments d'interface présentés dans [R3.06.13], le fait que le câble n'ait que des déplacements longitudinaux contrôlés par la rigidité du câble n'impose pas l'utilisation d'une intégration à 3 points de Gauss. Ce point a été vérifié lors des tests). La figure suivante permet de visualiser toutes ces informations.

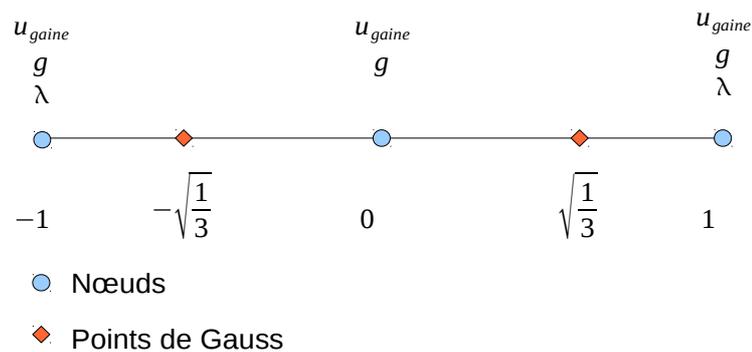


Figure 2-1: discrétisation de l'élément CABLE_GAINE

3 Condensation statique

Le champ δ disparaît de la formulation globale grâce à la condensation statique. En chaque point de collocation s_g , on a (d'après éq.1.4) :

$$t_g = \lambda_g + r(g_g - \delta_g) \in \partial \Pi(\delta_g)$$

avec $t_g = t(s_g)$, $\lambda_g = \lambda(s_g)$, $g_g = g(s_g)$ et $\delta_g = \delta(s_g)$.

Une fois le problème discrétisé, g_g et λ_g seront obtenus par interpolations avec les fonctions de formes appropriées des valeurs discrétisées aux nœuds de g et λ que l'on note $\{G\}$ et $\{\Lambda\}$.

L'intégration de la relation constitutive (cf. ci-dessous) permet de calculer δ_g en fonction de $\{G\}$ et $\{\Lambda\}$ que l'on note δ :

$$t_g = \lambda_g + r(g_g - \delta_g) \in \partial \Pi(\delta_g) \Leftrightarrow \delta_g = \hat{\delta}(g_g, \lambda_g) = \delta(\{G\}, \{\Lambda\})$$

4 Intégration

Les lois de frottement envisagées sont l'adhérence parfaite, le glissement sans frottement et un frottement de Coulomb avec un seuil permettant de retrouver les profils de tensions donnés par le BPEL (ou par l'ETCC puisque les 2 codes utilisent des formules équivalentes). Ces trois cas de figure sont utilisables avec la loi de comportement CABLE_GAINE_FROT.

L'ajout de nouvelles lois de frottement adaptées à d'autres réglementation est possible.

En un point de Gauss donné, l'intégration des lois consiste à déterminer δ_g . Pour cela, on cherche le point d'intersection entre la droite représentative de l'équation $t_g = \lambda_g + r(g_g - \delta_g)$ (courbe verte sur les figures Figure 4-1, Figure 4-2, Figure 4-3) et la courbe représentative de la dérivée de $\Pi(\delta_g)$ (courbe bleue sur les figures).

Remarque : dans les paragraphes qui suivent, on adopte une notation sur les déplacements pour ne pas alourdir les notations plutôt que sur les incréments de déplacements comme cela est réellement le cas.

4.1 Adhérence parfaite

Dans le premier cas, correspondant à l'adhérence parfaite, on a :

$$\Pi(\delta_g) = I_{R^+}(\delta_g) + I_{R^-}(\delta_g)$$

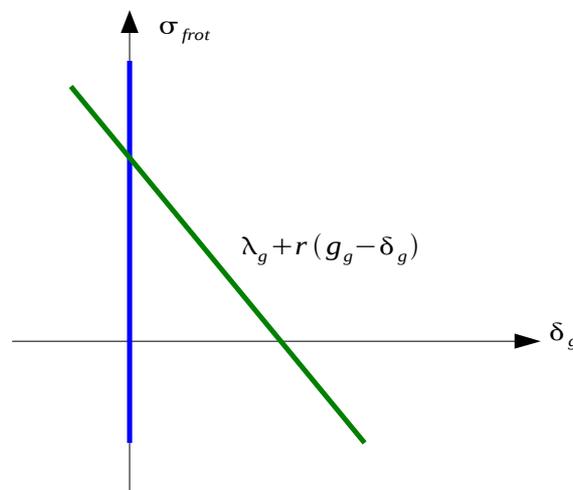


Figure 4-1: Interprétation graphique de l'intégration de la loi d'adhérence parfaite

La solution est : $\delta_g = 0$

4.2 Glissement sans frottement

Dans le second cas, glissement sans frottement, on a :

$$\Pi(\delta_g) = 0$$

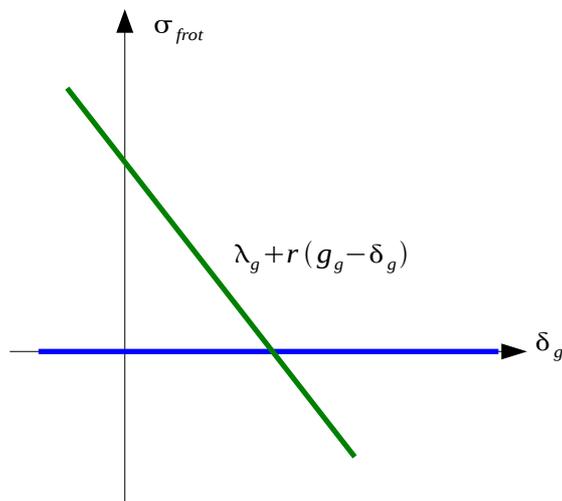


Figure 4-2: Interprétation graphique de l'intégration de la loi de glissement parfaite

La solution vérifie :

$$0 = \lambda_g + r(g_g - \delta_g)$$

d'où

$$\delta_g = g_g + \frac{\lambda_g}{r}$$

4.2.1 Glissement avec frottement (BPEL)

Cette loi permet de prendre en compte le frottement rectiligne et le frottement courbe. Les tensions imposées par le BPEL sont retrouvés en choisissant le seuil de la loi de Coulomb σ_c comme suit :

$$\sigma_c = -\left(\varphi + f \frac{\partial \alpha}{\partial s}\right) N$$

avec les notations de [R7.01.02] §2.2.2 que l'on rappelle :

- f le coefficient de frottement du câble sur le béton en partie courbe, en rad^{-1} ,
- φ le coefficient de frottement par unité de longueur, en m^{-1} ,
- α la déviation angulaire cumulée.

et avec N l'effort normal.

En effet, en considérant que le câble glisse sur toute sa longueur lors de la mise en tension et en notant s l'abscisse curviligne le long du câble, l'équilibre du câble s'écrit :

$$\frac{dN}{ds} = -\left(\varphi + f \frac{\partial \alpha}{\partial s}\right) N$$

d'où par intégration :

$$N = N_0 \exp(-(\varphi s + f \alpha(s)))$$

On reconnaît alors l'expression de la tension du câble en présence de frottement rectiligne du BPEL ([R7.01.02] §2.2.2).

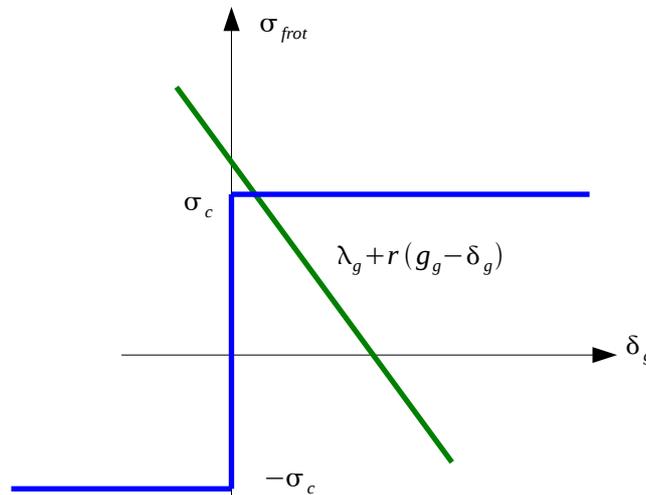


Figure 4-3: Interprétation graphique de l'intégration de la loi de frottement BPEL

Pour écrire la solution, il y a 3 cas de figure :

- si $|(\lambda_g + r g_g)| \leq \sigma_c$: $\delta_g = 0$
- si $\lambda_g + r g_g > \sigma_c$: $\delta_g = g_g + \frac{\lambda_g - \sigma_c}{r}$
- si $\lambda_g + r g_g < -\sigma_c$: $\delta_g = g_g + \frac{\lambda_g + \sigma_c}{r}$

Le cas où l'effort normal N est négatif ne doit normalement pas se produire pour les problèmes de câbles de précontraintes. Cependant il peut arriver d'avoir des valeurs très légèrement négatives. On fait le choix d'adopter le comportement glissant dans un tel cas de figure.

Remarque 1 : en introduisant une telle dépendance du glissement à la tension dans le câble, la contribution de la variation de cette tension au glissement $\frac{\partial \delta_g}{\partial N}$ induit une matrice non symétrique.

Remarque 2 : Afin que le frottement courbe soit pris en compte au niveau élémentaire, il est impératif que la courbure du câble soit retranscrite dans les éléments le constituant, c'est-à-dire que les trois nœuds des mailles SEG3 ne doivent pas être alignés.

5 Écriture discrétisée

5.1 Notations

On rappelle que les éléments CABLE_GAINE possèdent 3 nœuds et que seuls les nœuds extrémités possèdent des degrés de liberté de Lagrange (cf. Figure 2-1).

- Les fonctions de forme des déplacements sont notées n_m avec $m \in \{1, 2, 3\}$.
- Les fonctions de forme des multiplicateurs de Lagrange sont notées l_p avec $p \in \{1, 2\}$.

On note (les quantités sont évaluées en chaque point de Gauss) :

- s_g l'abscisse curviligne
- ω_g le poids des points de Gauss
- σ_g le tenseur des contraintes
- N_g^3 matrice des valeurs des fonctions de forme au point de Gauss g discrétisant les déplacements de la gaine (3 composantes)

$$N_g^3 = \begin{pmatrix} n_1(s_g) & 0 & 0 & n_2(s_g) & 0 & 0 & n_3(s_g) & 0 & 0 \\ 0 & n_1(s_g) & 0 & 0 & n_2(s_g) & 0 & 0 & n_3(s_g) & 0 \\ 0 & 0 & n_1(s_g) & 0 & 0 & n_2(s_g) & 0 & 0 & n_3(s_g) \end{pmatrix}$$

- N_g^1 matrice des valeurs des fonctions de forme au point de Gauss g discrétisant les déplacements relatifs du câble (1 composante) :

$$N_g^1 = (n_1(s_g) \quad n_2(s_g) \quad n_3(s_g))$$

- T_g le vecteur tangent au point de Gauss g
- ∇N_g^1 les dérivées des fonctions de forme discrétisant les déplacements relatifs du câble
- ∇N_g^3 les dérivées des fonctions de forme discrétisant les déplacements de la gaine
- On pose également pour simplifier les notations : $B_g = T_g^T \nabla N_g^3$
- L_g matrice des valeurs des fonctions de forme discrétisant le multiplicateur de Lagrange au point de Gauss $L_g = (l_1(s_g) \quad l_2(s_g))$

- $\{U\}$ les déplacements nodaux (gaine + câble)
- $\{U_{ga}\}$ les déplacements nodaux de la gaine
- $\{G_c\}$ le déplacement relatif nodal du câble
- $\{\Lambda\}$ le multiplicateur de Lagrange nodal
- $\{F_{ext}^{ga}\}$ le vecteur force extérieure nodal, dual des déplacements de la gaine
- $\{F_{ext}^c\}$ le vecteur force extérieure nodal, dual du déplacement relatif nodal de câble
- A la section du câble

5.2 Discrétisation des conditions d'optimalité

Les équations 1.1, 1.2 et 1.3 (l'éq. 1.4 étant traitée au niveau de la loi de comportement) qui caractérisent le point selle se discrétisent sous la forme :

$$\begin{aligned} \sum \omega_g (B_g^T : \sigma_g) &= \{F_{ext}^{ga}\} \\ \sum \omega_g [[\nabla N_g^1]^T : \sigma_g + [N_g^1]^T \cdot [[L_g] \{\Lambda\} + r [N_g^1] \{G_c\} - r \delta (\{G_c\}, \{\Lambda\})]] &= \{F_{ext}^c\} \\ \sum \omega_g [[L_g]^T \cdot [[N_g^1] \{G_c\} - \delta (\{G_c\}, \{\Lambda\})]] &= \{0\} \end{aligned}$$

5.3 Forces internes

On introduit les notations :

$$(f_u^g) = (B_g^T : \sigma_g)$$

$$\begin{aligned}(f_{g_c}^g) &= [\nabla N_g^1]^T : \sigma_g + [N_g^1]^T \cdot [[L_g]\{\Lambda\} + r[N_g^1]\{G_c\} - r\delta(\{G_c\}, \{\Lambda\})] \\ (f_{\lambda}^g) &= [L_g]^T \cdot [[N_g^1]\{G_c\} - \delta(\{G_c\}, \{\Lambda\})]\end{aligned}$$

Les contributions aux forces, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $m \in \{1, 2, 3\}$ et $p \in \{1, 2\}$, s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}(f_u)_{i,m} &= \sum_g \omega_g (f_{u_{\text{gaine}}}^g)_{i,m} \\ (f_{g_c})_m &= \sum_g \omega_g (f_{u_{\text{cable}}}^g)_m \\ (f_{\lambda})_p &= \sum_g \omega_g (f_{\lambda}^g)_p\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}(f_u^g)_{i,m} &\text{ est la composante } (3(m-1)+i) \text{ de } (f_u^g), \\ (f_{g_c}^g)_m &\text{ est la composante } m \text{ de } (f_{g_c}^g) \text{ et} \\ (f_{\lambda}^g)_p &\text{ est la composante } p \text{ de } (f_{\lambda}^g)\end{aligned}$$

5.4 Matrice de rigidité

On rappelle les notations en un point de Gauss :

- le déplacement relatif du câble : $g_g = N_g^1\{G_c\}$
- la déformation du câble : $\varepsilon_g = B_g\{U_{ga}\} + (\nabla N_g^1)\{G_c\}$
- le multiplicateur de Lagrange : $\lambda_g = (L_g)\{\Lambda\}$

En posant $\tau_g = \lambda_g + r g_g$, les deux paragraphes qui suivent donnent les contributions à la matrice tangente pour les cas adhérent et glissant et pour le cas frottant.

5.4.1 Cas adhérent et glissant

Dans les cas adhérent et glissant, la matrice tangente est symétrique (minimisation d'un point selle) :

$$\begin{aligned}K_{uu} &= \sum_g \omega_g B_g^T \frac{d\sigma}{d\varepsilon} B_g \\ K_{u_{g_c}} &= (K_{g_c, u})^T = \sum_g \omega_g B_g^T \frac{d\sigma}{d\varepsilon} (\nabla N_g^1) \\ K_{u\lambda} &= (K_{\lambda, u})^T = 0 \\ K_{g_c, g_c} &= \sum_g \omega_g [(\nabla N_g^1)^T \frac{d\sigma}{d\varepsilon} (\nabla N_g^1) + (N_g^1)^T r (N_g^1) - (N_g^1)^T r^2 \frac{d\delta_g}{d\tau_g}(N_g^1)] \\ K_{g_c, \lambda} &= (K_{\lambda, g_c})^T = \sum_g \omega_g [(N_g^1)^T (L_g) + (N_g^1)^T r \frac{d\delta_g}{d\tau_g}(L_g)] \\ K_{\lambda\lambda} &= \sum_g \omega_g [-(L_g)^T \frac{d\delta_g}{d\tau_g}(L_g)]\end{aligned}$$

On précise que $\frac{d\delta_g}{d\tau_g}$ est obtenu à partir de la loi de comportement de frottement.

5.4.2 Cas frottant

Dans le cas frottant, il y a une dépendance du glissement à la tension dans le câble. Les expressions suivantes s'en trouvent modifiées :

$$K_{g,u} = \sum_g \omega_g [(\nabla N_g^1)^T \frac{d\sigma}{d\varepsilon} B_g - r (N_g^1)^T \frac{\partial \delta_g}{\partial N} A \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} B_g]$$

$$K_{\lambda u} = \sum_g \omega_g [-(L_g)^T \frac{\partial \delta_g}{\partial N} A \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} B_g]$$

$$K_{g,g_c} = \sum_g \omega_g [(\nabla N_g^1)^T \frac{d\sigma}{d\varepsilon} (\nabla N_g^1) + (N_g^1)^T r (N_g^1) - (N_g^1)^T r^2 \frac{d\delta_g}{d\tau_g} (N_g^1) - (N_g^1)^T r \frac{\partial \delta_g}{\partial N} A \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} (\nabla N_g^1)]$$

$$K_{\lambda g_c} = \sum_g \omega_g [(L_g)^T (N_g^1) + (L_g)^T r \frac{d\delta_g}{d\tau_g} (N_g^1) - (L_g)^T \frac{\partial \delta_g}{\partial N} A \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} (\nabla N_g^1)]$$

(Les autres expressions sont inchangés par rapport à 5.4.1)
On constate que la matrice n'est plus symétrique.

6 Convergence du calcul : réglage des paramètres

La convergence d'un calcul avec les éléments CABLE_GAINE est parfois difficile à obtenir compte-tenu des différents ordre de grandeur en présence. C'est la raison pour laquelle il faut bien choisir le coefficient de pénalisation r et préférer un critère de convergence par valeurs de référence (mot-clé RESI_REFE_RELTA). Les deux paragraphes suivants donnent des conseils d'utilisation sur ces points.

6.1 Coefficient de pénalisation

Lors de l'écriture du Lagrangien augmenté, le coefficient r dit coefficient de pénalisation a été introduit. Pour choisir la valeur de r (PENA_LAGR dans la loi cohésive CABLE_GAINE_FROT), dont on rappelle que la solution convergée ne dépend pas, ou pour expliciter la construction de la force de référence utilisée dans le critère RESI_REFE_RELTA (voir § suivant), il est nécessaire de mener une rapide analyse dimensionnelle.

Pour le choix de r , on voit dans les équations précédentes qu'il est judicieux qu'il soit de l'ordre de grandeur de $\frac{\lambda}{u}$.

u est l'ordre de grandeur des déplacements attendus.

λ est la force de frottement par unité de longueur, i.e. la contrainte de cisaillement (frottement) intégrée sur le périmètre du câble. Si l'on prend une contrainte σ^{ref} typique attendue dans le béton au voisinage du câble, λ sera de l'ordre $2\pi r_{cable} \sigma^{ref}$.

Pour obtenir la meilleure convergence possible, il faut choisir r de l'ordre de grandeur de

$$2\pi r_{cable} \frac{\sigma^{ref}}{u^{ref}}$$

6.2 Critère de convergence par valeurs de référence

L'utilisation d'un critère de convergence par valeur est souvent nécessaire pour aller au bout du calcul. Pour cela il faut activer le mot-clé RESI_REFE_RELTA dans le mot-clé facteur CONVERGENCE de STAT_NON_LINE ou CALC_PRECONT. Dans le cas de l'élément CABLE_GAINE, ce mot-clé doit être accompagné de trois autres :

- une force de référence (mot-clé EFFORT_REFE) : tension attendue dans le câble,
- un déplacement de référence (mot-clé DEPL_REFE) : un déplacement typique de la structure,
- une contrainte de référence (mot-clé SIGM_REFE) : l'ordre de grandeur des contraintes attendues au voisinage du câble (la contrainte typique du béton sauf cas particulier), cette contrainte permet de

construire une référence pour λ en utilisant la section A du câble sous la forme :

$$\lambda^{ref} = \sigma^{ref} * \sqrt{A}$$