
Éléments de Fourier pour les structures axisymétriques

Résumé

Les éléments de Fourier sont destinés à calculer la réponse de structure à géométrie axisymétrique sollicitées par des chargements non axisymétriques décomposés en séries de Fourier.

On expose dans ce document une théorie générale d'Analyse de Fourier avec couplage des modes symétriques et antisymétriques dans le cas anisotrope. Le cas des matériaux isotropes, ou orthotropes d'axe Oz , où les modes sont découplés, est étudié à part.

Les éléments de Fourier sont utilisables dans *Code_Aster* à partir de la modélisation `AXIS_FOURIER`. Les mailles supports de ces éléments sont des triangles et quadrangles de degré 1 et 2.

Table des Matières

1 Introduction.....	3
2 Analyse de Fourier anisotrope.....	3
2.1 Théorie générale.....	3
2.2 Couplage et découplage des modes symétriques et antisymétriques.....	5
2.3 Calcul des contraintes.....	6
3 Calcul de la matrice de rigidité.....	7
3.1 Cas général.....	7
3.2 Calcul de dans le cas isotrope.....	8
4 Chargements.....	11
5 Conclusion et Perspectives.....	12
6 Bibliographie.....	12
7 Description des versions du document.....	12

1 Introduction

L'analyse de Fourier est destinée à calculer la réponse de structures à géométries axisymétriques soumises à des chargements non axisymétriques. Dans ce cas, il est nécessaire de développer les chargements en séries de Fourier. Généralement la convergence est atteinte pour 4 ou 5 harmoniques, mais la rapidité de cette convergence dépend de la nature du chargement : plus le chargement est régulier et plus la série correspondante converge rapidement. Le cas le plus défavorable est celui d'une force concentrée pour laquelle la pratique montre qu'il faut aller au delà (au moins 7 harmoniques).

Dans *Code_Aster*, la décomposition du chargement en séries de Fourier est supposée avoir été faite au préalable par l'utilisateur. *Code_Aster* permet de calculer les réponses à ce chargement, harmonique par harmonique (modélisation `AXIS_FOURIER`), et globalement après recombinaison des harmoniques entre elles (opérateur `COMB_FOURIER`).

On exposera dans un premier chapitre le cadre général de l'anisotropie, en insistant sur le découplage des modes dans le cas orthotrope. Le deuxième chapitre explicite le calcul de la matrice de rigidité dans le cas isotrope.

Pour l'utilisation des éléments de Fourier dans *Code_Aster*, on renvoie à la notice d'utilisation de la modélisation Fourier [U2.07.01].

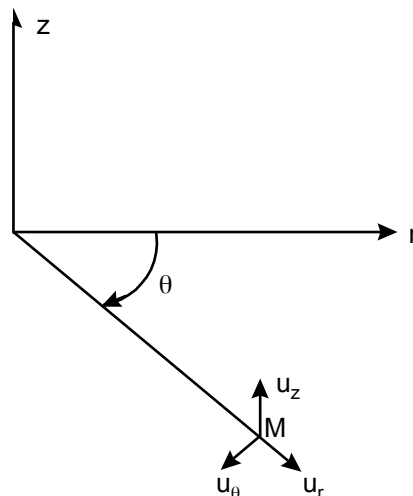
2 Analyse de Fourier anisotrope

2.1 Théorie générale

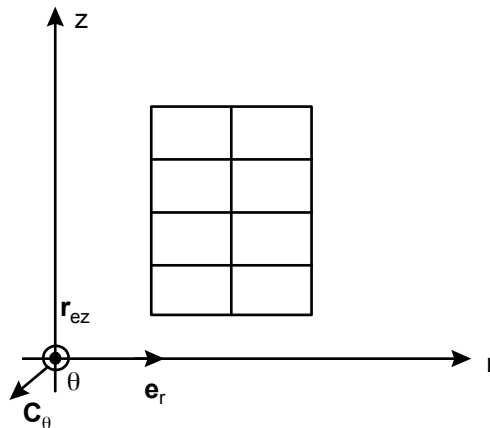
Tous les champs considérés (forces, déplacements, déformations, contraintes) sont exprimés en coordonnées cylindriques avec la convention suivante sur l'ordre des composantes :

- 1 composante radiale suivant r
- 2 composante axiale suivant z
- 3 composante tangentielle suivant θ

Exemple : $(u_r, u_z, u_\theta), (f_r, f_z, f_\theta)$



Le maillage est localisé dans le plan (r, z) , la symétrie de révolution se faisant autour de l'axe Oz . Le trièdre (r, z, θ) est orienté dans le sens direct.



On décompose le déplacement \mathbf{u} (ou le chargement \mathbf{f}) suivant $\mathbf{u} = \mathbf{u}^s + \mathbf{u}^a$ où \mathbf{u}^s (resp. \mathbf{u}^a) désigne la partie symétrique (resp. antisymétrique) du développement en série de Fourier de \mathbf{u} par rapport à la variable θ .

On obtient :

$$\left. \begin{aligned} u_r^s &= \sum_{l=0}^{\infty} u_l^s(r, z) \cos l\theta \\ u_z^s &= \sum_{l=0}^{\infty} v_l^s(r, z) \cos l\theta \\ u_\theta^s &= \sum_{l=0}^{\infty} w_l^s(r, z) (-\sin l\theta) \end{aligned} \right\} \text{partie symétrique } u^s$$

$$\left. \begin{aligned} u_r^a &= \sum_{l=0}^{\infty} u_l^a(r, z) \sin l\theta \\ u_z^a &= \sum_{l=0}^{\infty} v_l^a(r, z) \sin l\theta \\ u_\theta^a &= \sum_{l=0}^{\infty} w_l^a(r, z) \cos l\theta \end{aligned} \right\} \text{partie antisymétrique } u^a$$

A noter le choix du signe $-$ pour u_θ^s , qui permet de simplifier les calculs ultérieurs. Si on note $\mathbf{U}_l^s = (u_l^s, v_l^s, w_l^s)$ (resp. \mathbf{U}_l^a) la l -ième composante symétrique (resp. antisymétrique) du développement en série de Fourier de \mathbf{u} , on obtient :

$$\mathbf{u} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\begin{pmatrix} \cos l\theta & & 0 \\ & \cos l\theta & \\ 0 & & -\sin l\theta \end{pmatrix} \mathbf{U}_l^s + \begin{pmatrix} \sin l\theta & & 0 \\ & \sin l\theta & \\ 0 & & \cos l\theta \end{pmatrix} \mathbf{U}_l^a \right] \quad \text{éq 2.1-1}$$

Si l'on désigne par $\boldsymbol{\varepsilon}$ le vecteur déformation linéarisé, on s'aperçoit que $\boldsymbol{\varepsilon}$ peut être décomposé en série de Fourier suivant :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\begin{matrix} \cos l\theta I_4 & & 0_{4,2} \\ & 0_{2,4} & -\sin l\theta I_2 \end{matrix} \right) \boldsymbol{\varepsilon}_l^s + \left(\begin{matrix} \sin l\theta I_4 & & 0_{4,2} \\ & 0_{2,4} & \cos l\theta I_2 \end{matrix} \right) \boldsymbol{\varepsilon}_l^a \quad \text{éq 2.1-2}$$

avec $\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \varepsilon_r, \varepsilon_z, \varepsilon_\theta, \gamma_{rz}, \gamma_{r\theta}, \gamma_{z\theta} \right\}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_l^s = B_l^s \mathbf{U}_l^s \quad \boldsymbol{\varepsilon}_l^a = B_l^a \mathbf{U}_l^a$$

avec (voir [bib1]) :

$$B_l^s = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{l}{r} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{l}{r} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \\ 0 & \frac{l}{r} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

On a $B_l^a = B_l^s \forall l$ (ceci est dû au choix du développement symétrique de \mathbf{u} en $(\cos, \cos, -\sin)$ au lieu de (\cos, \cos, \sin)). On omettra à partir de maintenant les indices a et s et on notera B_l l'opérateur permettant de calculer les déformations correspondant à l'harmonique l .

2.2 Couplage et découplage des modes symétriques et antisymétriques

En reprenant les notations précédentes, on a :

$$\mathbf{u} = \sum_l \begin{pmatrix} \cos l \theta I_2 & 0_{2,1} \\ 0_{1,2} & -\sin l \theta \end{pmatrix} \mathbf{u}_l^s + \sum_l \begin{pmatrix} \sin l \theta I_2 & 0_{2,1} \\ 0_{1,2} & \cos l \theta \end{pmatrix} \mathbf{u}_l^a$$

ce qui s'écrit, en introduisant des matrices M_l^s et M_l^a :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sum_l (M_l^s \mathbf{U}_l^s + M_l^a \mathbf{U}_l^a) \\ \mathbf{u}_l &= M_l^s \mathbf{U}_l^s + M_l^a \mathbf{U}_l^a \end{aligned}$$

On en déduit que : $\boldsymbol{\varepsilon}_l = M_l^{rs} \boldsymbol{\varepsilon}_l^s + M_l^{ra} \boldsymbol{\varepsilon}_l^a$

$$\text{avec } M_l^{rs} = \begin{pmatrix} \cos l \theta I_4 & 0_{4,2} \\ 0_{2,4} & -\sin l \theta I_2 \end{pmatrix}$$

$$M_l^{ra} = \begin{pmatrix} \sin l \theta I_4 & 0_{4,2} \\ 0_{2,4} & \cos l \theta I_2 \end{pmatrix}$$

Calcul de l'énergie de déformation

$$\begin{aligned}
 W_l &= \int_0^{2\pi} \int_s {}^t \varepsilon_l D \varepsilon_l ds d\theta \quad \text{avec } ds = r dr dz \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_s {}^t \varepsilon_l^s {}^t M_l^s DM_l^s \varepsilon_l^s ds + \int_0^{2\pi} d\theta \int_s {}^t \theta_l^a {}^t M_l^a DM_l^a \varepsilon_l^a ds \\
 &\quad + \int_0^{2\pi} d\theta \int_s {}^t \varepsilon_l^a {}^t M_l^a DM_l^a \varepsilon_l^s ds + \int_0^{2\pi} d\theta \int_s {}^t \varepsilon_l^s {}^t M_l^s DM_l^s \varepsilon_l^a ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Puisque } M_l^a DM_l^s &= \begin{pmatrix} \sin l \theta I_4 & 0 \\ 0 & \cos l \theta I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & D_3 \\ {}^t D_3 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos l \theta I_4 & 0 \\ 0 & -\sin l \theta I_2 \end{pmatrix} \\
 M_l^a DM_l^s &= \begin{pmatrix} D_1 \sin l \theta \cos l \theta & -D_3 (\sin l \theta)^2 \\ {}^t D_3 (\cos l \theta)^2 & -D_2 \sin l \theta \cos l \theta \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

et que $\int_0^{2\pi} \sin l \theta \cos l \theta d\theta = 0$, si $D_3 = 0$ il n'y a donc pas de terme $({}^t \varepsilon_l^a, \varepsilon_l^s)$ ou $({}^t \varepsilon_l^s, \varepsilon_l^a)$ dans W . Il n'y a alors pas de couplage (U^a, U^s) ou (U^s, U^a) .

2.3 Calcul des contraintes

De même que ε, σ peut être décomposé en séries de Fourier suivant :

$$\sigma = \sum_l (M_l^s \sigma_l^s + M_l^a \sigma_l^a)$$

De la loi de Hooke $\sigma = D \varepsilon$, on déduit :

$$s = \sum_l \begin{pmatrix} \cos l \theta D_1 & -\sin l \theta D_3 \\ \cos l \theta D_3^t & -\sin l \theta D_2 \end{pmatrix} \varepsilon_l^s + \begin{pmatrix} \sin l \theta D_1 & \cos l \theta D_3 \\ \sin l \theta D_3^t & \cos l \theta D_2 \end{pmatrix} \varepsilon_l^a$$

Soit, en faisant apparaître les matrices M_l^s et M_l^a :

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \sum_l M_l^s \left[\begin{pmatrix} D_1 & 0_{4,2} \\ 0_{2,4} & D_2 \end{pmatrix} \varepsilon_l^s + \begin{pmatrix} 0_{4,4} & D_3 \\ -D_3^t & 0_{2,2} \end{pmatrix} \varepsilon_l^a \right] \\
 &\quad + M_l^a \left[\begin{pmatrix} 0_{4,4} & -D_3 \\ D_3^t & 0_{2,2} \end{pmatrix} \varepsilon_l^s + \begin{pmatrix} D_1 & 0_{4,2} \\ 0_{2,4} & D_2 \end{pmatrix} \varepsilon_l^a \right]
 \end{aligned}$$

En posant $D^s = \begin{pmatrix} D_1 & 0_{4,2} \\ 0_{2,4} & D_2 \end{pmatrix}$ et $D^a = \begin{pmatrix} 0_{4,4} & D_3 \\ -D_3^t & 0_{2,2} \end{pmatrix}$, on en déduit les parties symétrique et antisymétrique de la contrainte relative à l'harmonique l :

$$\begin{cases} \sigma_l^s = D^s \varepsilon_l^s + D^a \varepsilon_l^a = D^s B_l u_l^s + D^a B_l u_l^a \\ \sigma_l^a = -D^a \varepsilon_l^s + D^s \varepsilon_l^a = -D^a B_l u_l^s + D^s B_l u_l^a \end{cases} \quad \text{éq 2.3-1}$$

Remarque :

Dans le cas de l'orthotropie par rapport à Oz , on a $D^a = 0$ et [éq 2.1-1] se réduit à :

$$\begin{cases} \sigma_l^s = D^s B_l u_l^s \\ \sigma_l^a = D^s B_l u_l^a \end{cases}$$

C'est-à-dire que si les déplacements sont symétriques (ou antisymétriques), les contraintes le sont aussi.

3 Calcul de la matrice de rigidité

3.1 Cas général

Soient \mathbf{u} et ε deux champs cinématiquement admissibles quelconques. En appliquant le principe des travaux virtuels à l'élément de volume v , on peut écrire :

$$\int_v ({}^t \delta \varepsilon \cdot \mathbf{s}) dv = \int_v ({}^t \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) dv$$

Après décomposition en série de Fourier et intégration par rapport à θ , on obtient, pour des champs $\varepsilon_l^s, \varepsilon_l^a, u_l^s, u_l^a$ C.A. quelconques et pour toute harmonique l :

$$\int_{s_l} ({}^t \delta \varepsilon_l^s \cdot \sigma_l^s + {}^t \delta \varepsilon_l^a \cdot \sigma_l^a) ds_l = \int_{s_l} ({}^t \delta u_l^s \cdot f_l^s + {}^t \delta u_l^a \cdot f_l^a) ds_l$$

Soit, en utilisant [éq 2.3-1] et en posant :

$$\begin{aligned} K_l^s &= \int_{s_l} {}^t B_l D^s B_l ds_l \\ K_l^a &= \int_{s_l} {}^t B_l D^s B_l ds_l = K_l^s = K_l \\ K_l^{as} &= \int_{s_l} {}^t B_l D^a B_l ds_l \end{aligned}$$

On obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} K_l u_l^s + K_l^{as} u_l^a = f_l^s \\ {}^t K_l^{as} u_l^s + K_l u_l^a = f_l^a \end{cases} \quad \text{éq 3-1}$$

où ${}^t K_l^{as} = -K_l^{as}$ on voit que si $D_a \neq 0$, le découplage des modes en harmoniques symétriques et antisymétriques n'est plus possible. Par contre, si $D_a = 0$ (orthotropie par rapport à Oz) alors $K_l^{as} = 0$ et [éq 3-1] se réduit à :

$$\begin{cases} K_l u_l^s = f_l^s \\ K_l u_l^a = f_l^a \end{cases}$$

En prenant pour vecteurs déplacement (resp. force) correspondant à l'harmonique l les vecteurs :

$$U = \begin{pmatrix} \frac{u_r}{r} \\ \frac{u_z}{r} \\ \frac{u_\theta}{r} \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \frac{W_J}{r} & \overset{\text{noeud } J}{\tilde{0}} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \frac{W_J}{r} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \frac{W_J}{r} & \dots \\ \dots & \frac{\partial W_J}{\partial r} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \frac{\partial W_J}{\partial r} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \frac{\partial W_J}{\partial r} & \dots \\ \dots & \frac{\partial W_J}{\partial z} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \frac{\partial W_J}{\partial z} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \frac{\partial W_J}{\partial z} & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_r(J) \\ u_z(J) \\ u_\theta(J) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

On note $(P) = (P_1, \dots, P_N)$ où N est le nombre de nœuds de l'élément.

$$\text{Alors } K_l = \int_{s_l} {}^t P {}^t B_l' D B_l' P ds_l$$

K_l est symétrique et formée de blocs $(K_l)^{I,J} 3 \times 3$:

$$(K_l)^{I,J} = \int_{s_l} {}^t P_I {}^t B_l' D B_l' P_J ds_l$$

Le calcul des blocs $(K_l)^{I,J}$ est explicité ci-dessous :

$${}^t B'_I D B'_I = \begin{bmatrix} DI+I^2 D3 & 0 & -l(DI+D3) & D2 & 0 & lD3 & 0 & D2 & 0 \\ 0 & I^2 D3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & lD3 \\ -l(DI+D3) & 0 & I^2 DI+D3 & -lD2 & 0 & -D3 & 0 & -lD2 & 0 \\ D2 & 0 & -lD2 & DI & 0 & 0 & 0 & D2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D3 & 0 & D3 & 0 & 0 \\ lD3 & 0 & -D3 & 0 & 0 & D3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D3 & 0 & D3 & 0 & 0 \\ D2 & 0 & -lD2 & D2 & 0 & 0 & 0 & DI & 0 \\ 0 & lD3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D3 \end{bmatrix}$$

$${}^t P_I {}^t B'_I D B'_I P_J = (K_{ij}^{I,J})_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} K_{11}^{I,J} & K_{12}^{I,J} & K_{13}^{I,J} \\ K_{21}^{I,J} & K_{22}^{I,J} & K_{23}^{I,J} \\ K_{31}^{I,J} & K_{32}^{I,J} & K_{33}^{I,J} \end{bmatrix} \quad \text{avec}$$

$$K_{11}^{I,J} = \left(\frac{DI+I^2 D3}{r^2} \right) W_I W_J + DI \frac{\partial W_I}{\partial r} \frac{\partial W_J}{\partial r} + D3 \frac{\partial W_I}{\partial z} \frac{\partial W_J}{\partial z} + \frac{D2}{r} \left(W_I \frac{\partial W_J}{\partial r} + W_J \frac{\partial W_I}{\partial r} \right)$$

$$K_{22}^{I,J} = \left(\frac{I^2 D3}{r^2} \right) W_I W_J + D3 \frac{\partial W_I}{\partial r} \frac{\partial W_J}{\partial r} + DI \frac{\partial W_I}{\partial z} \frac{\partial W_J}{\partial z}$$

$$K_{33}^{I,J} = \left(\frac{I^2 DI+D3}{r^2} \right) W_I W_J + D3 \left(\frac{\partial W_I}{\partial r} \frac{\partial W_J}{\partial r} + \frac{\partial W_I}{\partial z} \frac{\partial W_J}{\partial z} \right) - \frac{D3}{r} \left(W_I \frac{\partial W_J}{\partial r} + \frac{\partial W_I}{\partial r} W_J \right)$$

$$K_{12}^{I,J} = D2 \frac{\partial W_I}{\partial r} \frac{\partial W_J}{\partial z} + D3 \frac{\partial W_I}{\partial z} \frac{\partial W_J}{\partial r} + \frac{D2}{r} W_I \frac{\partial W_J}{\partial z}$$

$$K_{21}^{I,J} = D3 \frac{\partial W_I}{\partial r} \frac{\partial W_J}{\partial z} + D2 \frac{\partial W_I}{\partial z} \frac{\partial W_J}{\partial r} + \frac{D2}{r} W_J \frac{\partial W_I}{\partial z}$$

$$K_{13}^{I,J} = -\frac{l}{r^2} (DI+D3) W_I W_J - \frac{l}{r} D2 W_J \frac{\partial W_I}{\partial r} + \frac{l}{r} D3 W_I \frac{\partial W_J}{\partial r}$$

$$K_{31}^{I,J} = -\frac{l}{r^2} (DI+D3) W_I W_J - \frac{l}{r} D2 W_I \frac{\partial W_J}{\partial r} + \frac{l}{r} D3 W_J \frac{\partial W_I}{\partial r}$$

$$K_{23}^{I,J} = -\frac{l}{r} D2 \frac{\partial W_I}{\partial z} W_J + \frac{l}{r} D3 W_I \frac{\partial W_J}{\partial z}$$

$$K_{32}^{I,J} = -\frac{l}{r} D2 W_I \frac{\partial W_J}{\partial z} + \frac{l}{r} D3 \frac{\partial W_I}{\partial z} W_J$$

Les blocs $K^{I,J}$ ne sont pas symétriques sauf pour $I=J$ (sur la diagonale de K). On remarque en fait que les blocs $K^{I,J}$ peuvent s'écrire pour tout harmonique ($l=0$ compris).

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{11}^{I,J} = K0_{11}^{I,J} + l^2 \frac{D3}{r^2} W_I W_J \\ K_{22}^{I,J} = K0_{22}^{I,J} + l^2 \frac{D3}{r^2} W_I W_J \\ K_{33}^{I,J} = K0_{33}^{I,J} + l^2 \frac{D1}{r^2} W_I W_J \\ K_{12}^{I,J} = K0_{12}^{I,J} \\ K_{21}^{I,J} = K0_{21}^{I,J} \\ K_{13}^{I,J} = -l K0_{13}^{I,J} \\ K_{31}^{I,J} = -l K0_{31}^{I,J} \\ K_{23}^{I,J} = -l K0_{23}^{I,J} \\ K_{32}^{I,J} = -l K0_{32}^{I,J} \end{array} \right.$$

où les blocs $K0^{I,J}$ sont indépendants de l'harmonique l .

4 Chargements

On suppose que le chargement a été décomposé suivant la même base que les déplacements, soit :

$$\mathbf{f} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\begin{pmatrix} \cos l \theta & & 0 \\ & \cos l \theta & \\ 0 & & -\sin l \theta \end{pmatrix} \mathbf{F}_l^s + \begin{pmatrix} \sin l \theta & & 0 \\ & \sin l \theta & \\ 0 & & \cos l \theta \end{pmatrix} \mathbf{F}_l^a \right]$$

Il n'y a pas couplage pour une même harmonique entre les parties symétrique et antisymétrique du chargement du fait de l'orthogonalité des fonctions trigonométriques $\sin l \theta$ et $\cos l \theta$, ceci pour tous les types de chargement. Ceci veut dire en particulier que les forces nodales équivalentes sont les mêmes pour les harmoniques symétrique et antisymétrique si les amplitudes F_l^s et F_l^a sont les mêmes.

Pour la nature des chargements admissibles avec la modélisation Fourier, on renvoie à la notice d'utilisation [U2.01.07].

5 Conclusion et Perspectives

Actuellement, on suppose que la décomposition du chargement a été faite au préalable par l'utilisateur, c'est-à-dire que $\left\{ F_l^s, F_l^a \right\}_{l \geq 0}$ est connu. Cette décomposition pourrait être réalisée par un opérateur de *Code_Aster* qui projetterait le chargement sur les modes de Fourier.

Pour l'instant, seul le cas non anisotrope est implanté, c'est-à-dire qu'il n'y a jamais couplage des modes. L'extension à l'anisotropie peut constituer un développement ultérieur.

6 Bibliographie

- 1 DUVAUT G. : "Mécanique des milieux continus" p282
- 2 ASKA HS. : "Structures axisymétriques en séries de Fourier", mai 1982, ISD

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
5	X.Desroches EDF- R&D/AMA	Texte initial