

---

## Un exemple de matrice distribuée pour PETSc

---

### Résumé :

Pour utiliser les solveurs de la librairie PETSc en parallèle, on doit fournir une matrice assemblée distribuée sur les processeurs disponibles selon un modèle de distribution imposé par PETSc (répartition par groupe de lignes contiguës). Le modèle de distribution des données *Code\_Aster* repose sur une répartition des mailles entre les processeurs. Il conduit à une matrice assemblée qui ne suit pas le modèle de distribution PETSc. On explique ici en suivant un exemple physique simple les différentes numérotations des degrés de liberté : numérotation locale et globale pour *Code\_Aster* puis numérotation PETSc.

## 1 Introduction

Le mot clé SOLVEUR 'MATR\_DISTRIBUEE' indique si la matrice du problème linéaire à résoudre est complète sur tous les processeurs (MATR\_DISTRIBUEE='NON'), ou bien répartie sur ces processeurs (MATR\_DISTRIBUEE='OUI'). Dans les deux cas, le vecteur second membre est complet sur tous les processeurs.

La répartition des mailles par processeur est définie dans le modèle. Il y a plusieurs façons possibles d'effectuer cette répartition : c'est le mot-clé PARALLELISME qui sélectionne le type de distribution.

Chaque processeur assemble les contributions élémentaires des degrés de liberté qu'il possède, c'est à dire des degrés de liberté qui appartiennent à des mailles qui lui ont été affectées. Comme on a partitionné des mailles (et non des degrés de liberté), un degré de liberté peut être possédé par plusieurs processeurs.

Chaque processeur assemble donc un bloc de la matrice totale. Chaque degré de liberté possède un indice local (sur ce processeur) et un indice global (dans le modèle global).

Lorsqu'on utilise un solveur PETSc, on lui passe un objet de type Mat, qui est une matrice distribuée avec le modèle de distribution attendu par PETSc. Cette distribution est une distribution par blocs de lignes de matrice. On effectue donc une nouvelle répartition des valeurs de la matrice entre les processeurs disponibles pour le calcul de façon à construire une matrice répartie de type PETSc. Chaque degré de liberté possède donc en plus de son indice local et de son indice globale (dans le modèle Aster) un indice global dans la matrice PETSc.

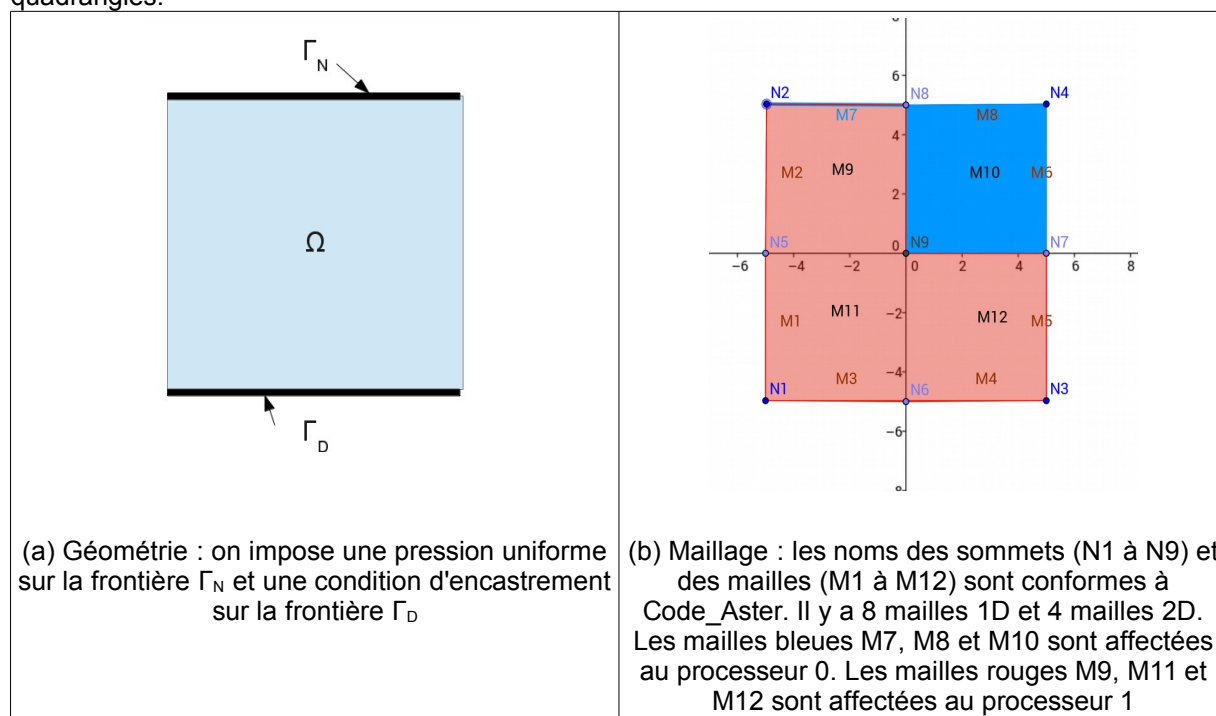
L'objet de cette documentation est d'explicitier ces différentes numérotations à partir d'un exemple simple. Elle complète la documentation [D4.01.03].

## 2 Problème modèle

On considère un problème 2D d'élasticité statique, distribué sur deux processeurs.

### 2.1 Géométrie

Le domaine élastique est un carré de points extrêmes (-50,50) et (50,50). On maille ce domaine en 4 quadrangles.



## 2.2 Propriétés du matériau

- $E = 1,0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$
- $\nu = 0,3$

## 2.3 Modélisation 2D

Le modèle est affecté sur les 4 mailles quadrangulaires (groupe de mailles 2D all) et sur les 2 segments qui constituent le bord supérieur du domaine (groupe de mailles 1D up).

```
MODEL=AFPE_MODELE (MAILLAGE=MA,  
                   AFPE=_F (GROUP_MA=('all', 'up', ),  
                             PHENOMENE='MECANIQUE',  
                             MODELISATION='C_PLAN', ),  
                   PARALLELISME=_F ( DISTRIBUTION='SOUS_DOMAINE', ),  
                   );
```

On a défini également un type de répartition des mailles (par sous-domaine).

## 2.4 Conditions limites et chargement

On exerce une pression répartie sur le bord supérieur du carré, d'extrémités (-50,50) (50,50) :

```
PRESSION=AFPE_CHAR_MECA (MODELE=MODEL,  
                         PRES_REP=_F (GROUP_MA='up',  
                                       PRES=10000000000, ), ),
```

La base du carré est encadrée : on applique la condition  $DX=0$ ,  $DY=0$  sur le segment d'extrémités (-50,-50) (50,-50).

Cet encastrement est appliqué de deux façons :

- **modélisation A** : avec AFPE\_CHAR\_CINE  
ENCASTR=AFPE\_CHAR\_CINE (MODELE=MODEL,  
 MECA\_IMPO=\_F (GROUP\_NO='bottom',  
 DX=0,  
 DY=0, ), ),
- **modélisation B** : avec AFPE\_CHAR\_MECA  
ENCASTR=AFPE\_CHAR\_MECA (MODELE=MODEL,  
 DDL\_IMPO=\_F (GROUP\_NO='bottom',  
 DX=0,  
 DY=0, ), ),

## 2.5 Distribution du problème

Lors de la création du modèle, on a choisi une répartition des calculs élémentaires par sous-domaine. On précise au solveur que la matrice est distribuée :

```
MECA_STATIQUE (MODELE=MODEL,  
              CHAM_MATER=AFMAT,  
              EXCIT=( _F (CHARGE=PRESSION, ),  
                    _F (CHARGE=ENCASTR, ), ),  
              SOLVEUR=_F (METHODE='PETSC',  
                          MATR_DISTRIBUEE='OUI',  
                          ALGORITHME='GMRES', ), ),
```

Le calcul est exécuté sur 2 processeurs.

### 3 Généralités sur le système linéaire

On veut résoudre un problème d'élasticité linéaire. On rappelle sa formulation variationnelle au paragraphe 3.1.

Le problème discret associé au problème continu est différent selon la méthode utilisée pour appliquer la condition limite de Dirichlet sur la base du domaine. On le décrira ultérieurement pour chaque modélisation. On regroupe dans cette section la partie commune aux modélisations A et B.

#### 3.1 Problème continu

Les contraintes vérifient l'équation  $-\nabla \cdot \sigma = 0$  dans le domaine élastique. Le déplacement  $u$  est fixé sur la frontière inférieure du domaine  $\Gamma_D$  par la condition de Dirichlet  $u = u_0$ . Ici,  $u_0 = 0$ . Sur la frontière supérieure  $\Gamma_N$ , on applique le chargement de Neumann  $\sigma \cdot n = p$ , pour une pression  $p$  uniforme.

On écrit la formulation variationnelle du problème. On définit :

- l'espace affine  $V = \{v, v \in (H^1(\Omega))^2, v = u_0 \text{ sur } \Gamma_D\}$ ,
- l'espace vectoriel associé (déplacements cinématiquement admissibles)  
 $V^0 = \{v, v \in (H^1(\Omega))^2, v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$

On cherche  $u \in V$ , tel que  $\forall v \in V^0, a(u, v) = (f, v)$ , où  $a$  est la forme bilinéaire de l'élasticité linéaire et  $f$  correspond au chargement « pression » sur  $\Gamma_N$ .

#### 3.2 Numérotation des équations de la matrice Code\_Aster globale

La description de la numérotation de la matrice (globale et locale) est faite par les objets du NUME\_DDL. Le NUME\_EQUA contient les informations globales. On rappelle rapidement le rôle des champs dont on va afficher la valeur et on renvoie à [D4.06.07] pour la description de référence.

- `.NUME.REFN` est un tableau de noms, contenant le nom du maillage, de la grandeur discrétisée et du solveur. Ici `REFN` contient :

MA	DEPL_R	GMRES
----	--------	-------

- `.NUME.NEQU` est le nombre total d'équations  $N$
- `.NUME.DELG` est un tableau de taille  $N$ , qui contient un marqueur des degrés de liberté de Lagrange avec la convention :

$$DELG(i) = \begin{cases} 0 & : \text{ddl physique} \\ -1 & : \text{Lagrange 1} \\ -2 & : \text{Lagrange 2} \end{cases}$$

- `.NUME.DEEQ` est un tableau entier de taille  $2N$ . L'équation  $i_{eq}$  est décrite par un couple d'entiers  $(i_{no}, i_{cmp})$  en positions  $(i_{eq}-1) \times 2+1$  et  $(i_{eq}-1) \times 2+2$  du tableau :
  - $i_{no} > 0$  est le numéro du nœud du maillage support du degré de liberté  $i_{eq}$ .
    - Si  $i_{cmp} > 0$ , le degré de liberté correspond à la composante  $i_{cmp}$  de la grandeur sous-jacente.
    - Si  $i_{cmp} < 0$ , alors l'équation est une des deux équations de dualisation du blocage de la composante  $i_{cmp}$  de cette grandeur sur le nœud  $i_{no} > 0$ .
  - $i_{no} = 0$  indique que l'équation  $i_{eq}$  est l'équation de dualisation d'une relation linéaire. Dans ce cas,  $i_{cmp}$  est forcément nul.
- `.NUME.PRNO` est une collection de taille  $1 +$  le nombre de charges dualisées dans le modèle. On accède à ces objets par le pointeur de noms `.LILLI`. Le premier objet de la collection contient les degrés de liberté associés au maillage (par convention `.LILLI(1) = &MAILLA`) et les objets suivants les degrés de liberté tardifs créés par dualisation. Pour chaque nœud, on trouve

- le numéro d'équation de la première composante associée à ce nœud,
- le nombre de composantes portées par ce nœud
- un vecteur d'entiers codés précisant quelles sont les composantes de la grandeur présentes sur ce nœud (voir D4.06.05 pour le système de codage)

## Remarque :

Attention, il y a un niveau supplémentaire d'indirection (vecteur `.NUEQ`) qui permet de trouver la position des valeurs des termes de la matrice dans le tableau `.VALE`. **On omet volontairement ici ce niveau** car il n'intervient pas dans l'exemple considéré. Il est seulement nécessaire pour la sous-structuration statique. En effet, on a alors besoin d'assurer que les degrés de liberté d'interface se trouvent dans la matrice après les degrés de liberté internes à un sous-domaine. Cela est nécessaire pour calculer le complément de Schur sans avoir explicitement une structure de matrice par blocs. La sous-structuration statique correspond à la commande `MACR_ELEM_STAT`. Un macro-élément est équivalent à un sous-domaine. On calcule entre autres sa rigidité et il peut être intégré comme un élément à un modèle.

## 3.3 Numérotation des équations de la matrice Aster locale

On se place maintenant dans le cas où la matrice `Code_Aster` est assemblée par deux processeurs.

Dans notre exemple, le processeur 0 possède les mailles M7, M8 et M10 et le processeur 1 les mailles M9, M11 et M12. Chaque processeur assemble les contributions élémentaires correspondant aux mailles qu'il possède. Les caractéristiques de ces matrices locales sont définies dans le `.NUML` du `NUME_DDL`. Les tableaux `.NUML.NULG` et `.NUML.NUGL` sont inverses l'un de l'autre. Ils contiennent la correspondance entre la numérotation locale à chaque processeur des degrés de liberté et la numérotation globale. Ainsi, si  $i_l$  est le numéro local d'un degré de liberté et  $i_g$  son numéro global, on a :

$$\text{NULG}(i_l) = i_g, \text{NUGL}(i_g) = i_l$$

Si le degré de liberté  $i_g$  n'est pas présent sur un processeur,  $\text{NUGL}(i_g) = 0$ .

## 4 Le système linéaire pour la modélisation A

Les conditions limites sont appliquées par élimination. On explique le principe de l'élimination dans le paragraphe 4.1, et on donne les valeurs des différents descripteurs de la matrice dans le paragraphe 4.2.

### 4.1 Le système discret

Le système discret s'écrit  $KU = F$  où la matrice de rigidité  $K$  est de taille  $N \times N$ .

On partitionne l'ensemble des indices des degrés de liberté  $S = [1 : N]$ , en deux sous-ensembles :

- $D$  pour les indices des degrés de liberté fixés par la condition limite de Dirichlet (encastrement). Ici,  $D = \{1, 2, 5, 6, 11, 12\}$ , ce qui correspond à fixer  $DX, DY$  sur les nœuds  $N1, N3, N6$  et  $U_0 = 0$ .
- $I$  pour les indices des degrés de liberté non contraints, inconnus :  $I = S \setminus D$

On applique cette partition au système qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} K_{II} & K_{ID} \\ K_{DI} & K_{DD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_I \\ U_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } U_D = U_0.$$

On remplace ce système par :

$$\begin{pmatrix} K_{II} & 0_{ID} \\ 0_{DI} & Id_{DD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_I \\ U_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f - K_{ID} U_0 \\ U_0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui correspond aux mises à jours suivantes à faire sur la matrice et le second membre :

$$\begin{aligned} F_I &\leftarrow f - K_{ID} U_0 \\ F_D &\leftarrow U_0 \\ K_{DD} &\leftarrow Id_{DD} \\ K_{ID} &\leftarrow 0_{ID} \\ K_{DI} &\leftarrow 0_{DI} \end{aligned}$$

## 4.2 Les descripteurs de la matrice

### Matrice globale

Il n'y a pas de degré de liberté de Lagrange : le tableau `.NUME.DELG` est rempli de 0. Le tableau `.NUME.DEEQ` est de taille  $2N = 36$ . Voilà son contenu (1<sup>ère</sup> ligne) et son interprétation (2<sup>ème</sup> ligne) :

1	1	1	2	2	1	2	2	...	9	1	9	2
N1	DX	N1	DY	N2	DX	N2	DY	...	N9	DX	N9	DY

La collection `.PRNO` n'a qu'un objet : les seuls degrés de liberté sont les degrés de liberté physiques associés aux nœuds du maillage. Voilà son contenu nœud par nœud :

1	2	6	0	0	0	0	# nœud N1
3	2	6	0	0	0	0	# nœud N2
5	2	6	0	0	0	0	# nœud N3
7	2	6	0	0	0	0	# nœud N4
9	2	6	0	0	0	0	# nœud N5
11	2	6	0	0	0	0	# nœud N6
13	2	6	0	0	0	0	# nœud N7
15	2	6	0	0	0	0	# nœud N8
17	2	6	0	0	0	0	# nœud N9

Ainsi la première équation posée sur le nœud N3 du maillage porte le numéro d'équation 5. Il y a 2 équations posées sur ce nœud. Pour coder les composantes de la grandeur `DEPL_R` on utilise un vecteur de taille 5. Ce vecteur a comme valeurs (6 0 0 0 0).

Seul le premier terme est non nul : il vaut  $6 = 2^1 + 2^2$ .

Cela qui signifie que les composantes sélectionnées de la grandeur sont les deux premières dans l'ordre du catalogue, c'est à dire les composantes `DX` et `DY`.

### 4.2.1 Matrice distribuée

On reporte ensuite les valeurs du `.NUML` pour les processeurs 0 et 1.

	P0		P1	
. NUML . NEQU	10		16	
	<i>il</i>	<i>ig</i>	<i>il</i>	<i>ig</i>
. NUML . NULG	1	15	1	3
	2	16	2	4
	3	3	3	9
	4	4	4	10
	5	7	5	17
	6	8	6	18
	7	17	7	15
	8	18	8	16
	9	13	9	1
	10	14	10	2
			11	11
			12	12
			13	5
			14	6
			15	13
			16	14

La correspondance inverse est donnée par le tableau . NUML . NUGL :

	P0		P1	
. NUML . NUGL	<i>ig</i>	<i>il</i>	<i>ig</i>	<i>il</i>
. NUML . NUGL	1	0	1	9
	2	0	2	10
	3	3	3	1
	4	4	4	2
	5	0	5	13
	6	0	6	14
	7	5	7	0
	8	6	8	0
	9	0	9	3
	10	0	10	4
	11	0	11	11
	12	0	12	12
	13	9	13	15
	14	10	14	16
	15	1	15	7
	16	2	16	8
	17	7	17	5
	18	8	18	6

Grâce au .DEEQ on peut retrouver quels nœuds sont supports des degrés de liberté sur chaque processeur :

.NUML.NEQU	P0			P1		
	10			16		
	<i>il</i>	<i>ig</i>	Noeud	<i>il</i>	<i>ig</i>	Noeud
.NUML.NULG	1	15	8	1	3	2
	2	16	8	2	4	2
	3	3	2	3	9	5
	4	4	2	4	10	5
	5	7	4	5	17	9
	6	8	4	6	18	9
	7	17	9	7	15	8
	8	18	9	8	16	8
	9	13	7	9	1	1
	10	14	7	10	2	1
				11	11	6
				12	12	6
				13	5	3
				14	6	3
				15	13	7
				16	14	7

On voit que les composantes sur un même nœud sont numérotées de façon contiguës.

**Remarque :**

Lorsque la matrice est distribuée, les équations de blocage cinématiques sont multipliées par le nombre de processeurs utilisés pour le calcul. La contrainte  $U=U_0$  est remplacée sur  $p$  processeurs par  $pU=pU_0$ . Dans la routine `asmchc`, on met des 1 sur la diagonale de la matrice et cette opération est effectuée sur tous les processeurs. Ces termes s'accumulent dans la matrice globale.

## 5 Le système linéaire pour la modélisation B

Les conditions limites sont dualisées. La méthode de (double) dualisation est décrite dans la documentation [R3.03.01]. On précise le système discret au paragraphe 5.1 et la valeur des descripteurs de la matrice au paragraphe 5.2.

### 5.1 Le système discret

La condition limite sur  $\Gamma_D$  est imposée comme une contrainte sur les déplacements, par des multiplicateurs de Lagrange. On note :

- $U$  les degrés de liberté « physiques » ;
- $\Lambda$  les multiplicateurs de Lagrange.

On résout un système linéaire augmenté, de la forme :

$$\begin{pmatrix} K_{UU} & C_{U\Lambda}^T \\ C_{\Lambda U} & D_{\Lambda\Lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ u_0 \end{pmatrix}$$

où  $C_{\Lambda U}$  est la matrice des contraintes.



## 5.2 Les descripteurs de la matrice assemblée

### 5.2.1 Matrice globale

Le nombre d'équations du problème est  $N = \text{.NUME.NEQU} = 30$ .

#### Calcul du nombre total de degrés de liberté :

Il y a 9 nœuds et chaque nœud porte les composantes  $DX$  et  $DY$  de la grandeur  $DEPL\_R$ , soit au total 18 équations portant sur 18 degrés de liberté "physiques".

A ces degrés de liberté "physiques", on ajoute des degrés de liberté de type "Lagrange" qui permettent de prendre en compte par dualisation la condition limite d'encastrement. Il y a 3 nœuds encastres dans le problème. Sur chaque nœud encasté, on bloque deux composantes  $DX$  et  $DY$ . Pour chaque composante bloquée, on utilise 2 multiplicateurs de Lagrange. Au total, on définit donc pour ce problème  $3 \times 2 \times 2 = 12$  degrés de liberté de type Lagrange.

#### Valeurs du NUME\_EQUA :

Dans le `.PRNO`, le premier objet décrit les nœuds du maillage, qui portent des degrés de liberté physique (comme dans la modélisation A) :

3	2	6	0	0	0	0	# nœud 1
7	2	6	0	0	0	0	# nœud 2
11	2	6	0	0	0	0	# nœud 3
15	2	6	0	0	0	0	# nœud 4
17	2	6	0	0	0	0	# nœud 5
21	2	6	0	0	0	0	# nœud 6
25	2	6	0	0	0	0	# nœud 7
27	2	6	0	0	0	0	# nœud 8
29	2	6	0	0	0	0	# nœud 9

Le second décrit l'encastrement :

1	1	134217728	0	0	0	0
5	1	134217728	0	0	0	0
2	1	134217728	0	0	0	0
6	1	134217728	0	0	0	0
9	1	134217728	0	0	0	0
13	1	134217728	0	0	0	0
10	1	134217728	0	0	0	0
14	1	134217728	0	0	0	0
19	1	134217728	0	0	0	0
23	1	134217728	0	0	0	0
20	1	134217728	0	0	0	0
24	1	134217728	0	0	0	0

Chaque nœud porte une seule composante qui est déterminée par l'entier  $134217728=2^{27}$ , c'est donc la composante `LAGR` dont il s'agit (multiplicateur de Lagrange).

Le `.DEEQ` donne pour chaque équation le nœud support du degré de liberté et la composante de la grandeur. On affiche ses valeurs dans le tableau suivant. Lorsque le degré de liberté est un degré de liberté physique,  $(DX, DY)$  indique quelle composante de la grandeur il discrétise. Pour les degrés de liberté de type Lagrange,  $(Lag\ DX, Lag\ DY)$  indique quelle composante est bloquée par le multiplicateur de Lagrange.

.NUME.DEEQ			
	<i>ino</i>	<i>icmp</i>	Commentaire
1	1	-2	Lag DY
2	1	-1	Lag DX
3	1	1	DX
4	1	2	DY
5	1	-2	Lag DY
6	1	-1	Lag DX
7	2	1	DX
8	2	2	DY
9	3	-2	Lag DY
10	3	-1	Lag DX
11	3	1	DX
12	3	2	DY
13	3	-2	Lag DY
14	3	-1	Lag DX
15	4	1	DX
16	4	2	DY
17	5	1	DX
18	5	2	DY
19	6	-2	Lag DY
20	6	-1	Lag DX
21	6	1	DX
22	6	2	DY
23	6	-2	Lag DY
24	6	-1	Lag DX
25	7	1	DX
26	7	2	DY
27	8	1	DX
28	8	2	DY
29	9	1	DX
30	9	2	DY

**Remarque :**

Les deux degrés de liberté de Lagrange qui permettent de bloquer une composante sur un degré de liberté physique doivent être numérotés de façon à encadrer le degré de liberté physique : l'un doit se trouver avant et l'autre après. Dans Code\_Aster, l'algorithme de numérotation assure cette contrainte mais les degrés de liberté de Lagrange ne sont pas forcément numérotés au plus près de la composante bloquée. C'est le cas sur cet exemple mais ce n'est pas une obligation.

## 5.2.2 Matrice distribuée

La partition est la même que dans la modélisation A. Les degrés de liberté de Lagrange sont tous affectés au processeur 0. On décrit la numérotation de la matrice dans le tableau suivant :

. NUML . NEQU	P0			P1		
	28			16		
	<i>il</i>	NULG <i>ig</i>	DELG	<i>il</i>	NULG <i>ig</i>	DELG
1	27	0		1	7	0
2	28	0		2	8	0
3	7	0		3	17	0
4	8	0		4	18	0
5	15	0		5	29	0
6	16	0		6	30	0
7	29	0		7	27	0
8	30	0		8	28	0
9	25	0		9	3	0
10	26	0		10	4	0
11	3	0		11	21	0
12	4	0		12	22	0
13	1	-1		13	11	0
14	5	-2		14	12	0
15	11	0		15	25	0
16	12	0		16	26	0
17	9	-1				
18	13	-2				
19	21	0				
20	22	0				
21	19	-1				
22	23	-2				
23	2	-1				
24	6	-2				
25	10	-1				
26	14	-2				
27	20	-1				
28	24	-2				

Dans ce tableau, la valeur -1 indique qu'il s'agit d'un Lagrange 1 et la valeur -2 qu'il s'agit d'un Lagrange 2.

**Remarque :**

Le `.DEEQ` permet aussi de savoir sur quels degrés de liberté sont des multiplicateurs de Lagrange, mais pas s'il s'agit d'un Lagrange 1 ou 2. La valeur -1 indique que l'on bloque la composante `DX` et la valeur -2 que l'on bloque la composante `DY`. Pour reconstruire toute l'information, il faut utiliser les deux objets (`.DELG` et `.DEEQ`).

## 6 Construction de la matrice PETSc

### 6.1 Modèle de données PETSc

PETSc propose un type de données Mat. Ce type de données suppose, en parallèle, que la matrice est répartie sur les processeurs disponibles par groupe de lignes contiguës.

Il faut donc redistribuer la matrice `Code_Aster`. On construit une nouvelle numérotation globale pour PETSc. Dans cette numérotation, un degré de liberté qui n'appartient qu'à un processeur est affecté à ce processeur et un degré de liberté partagé par plusieurs processeurs appartient au processeur de rang inférieur.

**Remarque :**

PETSc stocke la matrice en entier (pas de stockage symétrique).  
PETSc utilise la convention C d'indication des tableaux (de 0 à N-1 pour un tableau de taille N).

### 6.2 Descripteur de matrice pour la modélisation B

La correspondance entre la numérotation locale de la matrice et sa numérotation globale pour PETSc est donnée par le tableau `NUML.NLGP`. On indique dans le tableau suivant les trois numérotations pour la modélisation B :  $i_l$  est l'indice local,  $i_g$  l'indice global par la numérotation `Code_Aster` et  $i_{gp}$  l'indice global pour PETSc.

. NUML . NEQU	P0			P1		
	28			16		
	NULG	NLGP		NULG	NLGP	
	<i>il</i>	<i>ig</i>	<i>igp</i>	<i>il</i>	<i>ig</i>	<i>igp</i>
1	27	1	1	7	3	
2	28	2	2	8	4	
3	7	3	3	17	29	
4	8	4	4	18	30	
5	15	5	5	29	7	
6	16	6	6	30	8	
7	29	7	7	27	1	
8	30	8	8	28	2	
9	25	9	9	3	11	
10	26	10	10	4	12	
11	3	11	11	21	19	
12	4	12	12	22	20	
13	1	13	13	11	15	
14	5	14	14	12	16	
15	11	15	15	25	9	
16	12	16	16	26	10	
17	9	17				
18	13	18				
19	21	19				
20	22	20				
21	19	21				
22	23	22				
23	2	23				
24	6	24				
25	10	25				
26	14	26				
27	20	27				
28	24	28				