

## HPLA100 - Cylindre creux thermoélastique pesant en rotation uniforme

---

### Résumé

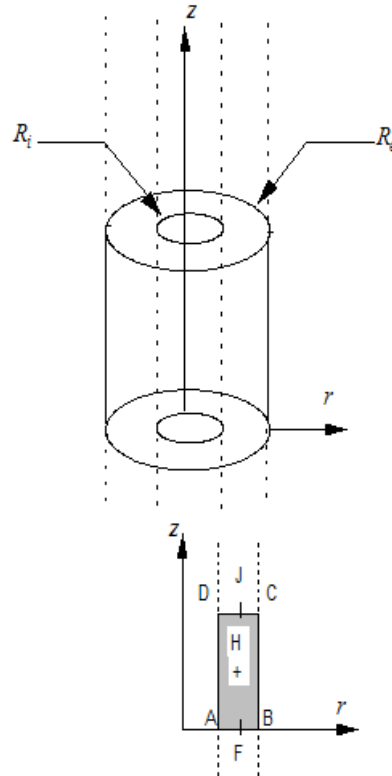
Ce test a pour but d'éprouver les seconds membres correspondants aux effets de la pesanteur, d'une dilatation thermique et de l'accélération due à une rotation uniforme. Pour les modélisations *C* et *D* (coque 3D), un calcul thermo-élastique chaîné et un calcul thermoélastoplastique sans évolution plastique ont été effectués.

On présente les résultats pour les modélisations :

- 2D axisymétrique : éléments finis isoparamétriques axisymétriques sur des mailles QUAD8,
- coques axisymétriques : éléments finis isoparamétriques axisymétriques sur des mailles SEG3 (maillage linéique de la section méridienne),
- coques 3D : éléments finis MEC3QU9H, MEC3TR7H sur des mailles QUAD9 et TRIA7, respectivement,
- plaques *DKT* : éléments finis plans DKQ, DKT sur des mailles QUAD4 et TRIA3, respectivement. On teste aussi les coques orthotropes de DEFI\_COMPOSITE pour deux couches d'un même matériau isotrope et le mot clé ELAS\_COQU de DEFI\_MATERIAU pour l'affectation de caractéristiques de plaques homogénéisées.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



Géométrie du cylindre ( $m$ ) :

|                 |              |
|-----------------|--------------|
| Rayon intérieur | $R_i = 19.5$ |
| Rayon extérieur | $R_e = 20.5$ |
| Point $F$       | $R = 20.0$   |
| Épaisseur       | $h = 1.0$    |
| Hauteur         | $L = 10.0$   |

### 1.2 Propriétés du matériau

Le matériau est homogène isotrope, thermoélastique linéaire, l'état initial est vierge.

|                           |                                                           |
|---------------------------|-----------------------------------------------------------|
| Module d'Young            | $E = 2.0 \cdot 10^5 \text{ N.mm}^{-2}$                    |
| Coefficient de Poisson    | $\nu = 0.3$                                               |
| Densité volumique         | $\rho = 8.0 \cdot 10^{-6} \text{ kg.mm}^{-3}$             |
| Coefficient de dilatation | $\alpha = 1.0 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ |

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

- Déplacement imposé :
  - $\Omega = 1.0 \text{ s}^{-1}$  selon l'axe  $OZ$
- Chargement imposé :
  - pesanteur,  $g = 10.0 \text{ m.s}^{-2}$  selon l'axe  $OZ$
  - force de traction sur la face supérieure :  $-160.0 \text{ E}^{-4} \text{ N}$  équivalent à une force répartie sur  $CD$  de  $-8.0 \text{ E}^{-4} \text{ N.mm}^{-1}$
- Dilatation thermique :  $T(\rho) - T_{ref}(\rho) = \frac{(T_s + T_i)}{2} + \frac{(T_s - T_i) \cdot (r - R)}{h}$  avec :
  - cas 1 :  $T_s = 0.5^\circ \text{C}$ ,  $T_i = -0.5^\circ \text{C}$ ,  $T_{ref} = 0.0^\circ \text{C}$
  - cas 2 :  $T_s = 0.1^\circ \text{C}$ ,  $T_i = 0.1^\circ \text{C}$ ,  $T_{ref} = 0.0^\circ \text{C}$

Ces champs de température sont calculés avec `THER_LINEAIRE`, à l'aide d'un calcul stationnaire sur le même maillage, mais avec un modèle `PLAN` afin d'avoir une solution affine dans l'épaisseur.

Les conditions aux limites en déplacement (et rotation) étant différentes selon la modélisation considérée, elles seront décrites ultérieurement (dans les paragraphes relatifs aux modélisations).

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La méthode de calcul utilisée pour la solution de référence a été déterminée par F. Voldoire (EDF R&D / AMA) et est présentée dans l'annexe.

Les résultats de référence analytiques sont :

- les déplacements et rotations,
- la contrainte axiale, les efforts généralisés (en théorie de coques),

en peaux interne et externe sur les sections  $AB$  et  $CD$ .

En 2D axisymétrique, les solutions complètes données en annexe sont telles que  $\varepsilon_{rz}=0$  où  $r$  et  $z$  sont les directions radiale et axiale du cylindre, respectivement. Pour les chargements de rotation uniforme et de dilatation thermique, les conditions aux limites sont choisies de telle sorte que les solutions ne dépendent pas de  $z$  (on a notamment  $\varepsilon_{zz}=0$ ).

Pour les coques, avec des conditions aux limites équivalentes, la rotation  $\theta_0$  autour de l'axe orthoradial est nulle pour les chargements de rotation uniforme et de dilatation thermique, ce qui n'est pas le cas du chargement de pesanteur où la rotation est constante (le cylindre se met alors en forme conique). En revanche dans tous les cas, la distorsion transverse est nulle ; ainsi les théories de Love-Kirchhoff et celles de Hencky-Mindlin fournissent la même solution de référence.

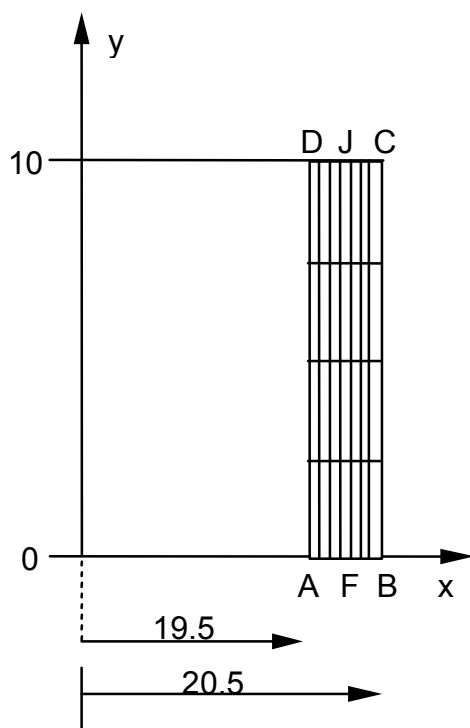
### 2.2 Grandeur de référence

$DX$  : déplacement selon l'axe  $OX$ ,  
 $DY$  : déplacement selon l'axe  $OY$ ,  
 $DZ$  : déplacement selon l'axe  $OZ$ ,  
 $NXX$  : effort normal selon l'axe  $OX$ ,  
 $NYX$  : effort normal selon l'axe  $OY$ ,  
 $MXX$  : moment autour de l'axe  $OX$ ,  
 $MYX$  : moment autour de l'axe  $OY$ ,  
 $SIXX$  : contrainte selon l'axe  $OX$ ,  
 $SIYY$  : contrainte selon l'axe  $OY$ .

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Eléments finis 2D axisymétriques



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus :

| <i>Bord</i> | <i>group_no</i> |
|-------------|-----------------|
| <i>BC</i>   | <i>BC</i>       |
| <i>DA</i>   | <i>DA</i>       |
| <i>AB</i>   | <i>BAS</i>      |
| <i>CD</i>   | <i>HAUT</i>     |

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est régulier : 4 éléments dans la hauteur, 8 dans l'épaisseur.

Nombre de nœuds : 121

Nombre de mailles et type : 32 QUAD8

### 3.3 Conditions aux limites en déplacement

#### 3.3.1 Pesanteur

Le déplacement  $DY$  est bloqué au point  $F$  seul.

#### 3.3.2 Rotation

Le déplacement  $DY$  est bloqué sur les côtés  $[AB]$  ( $GROUP\_NO = 'BAS'$ ) et sur  $[CD]$  ( $GROUP\_NO = 'HAUT'$ ).

### 3.3.3 Cas de dilatation thermique n°1

Le déplacement  $DY$  est bloqué sur toute la structure.

### 3.3.4 Cas de dilatation thermique n°2

Le déplacement  $DY$  est bloqué sur les côtés  $[AB]$  (GROUP\_NO = 'BAS') et  $[CD]$  (GROUP\_NO = 'HAUT').

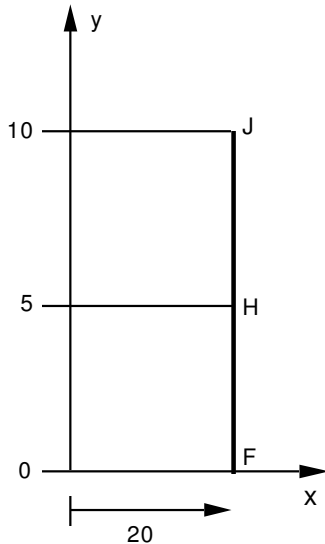
## 3.4 Résultats de la modélisation A

| Identification                             | Nœud(Maille) | Valeur testée | Référence                 |
|--------------------------------------------|--------------|---------------|---------------------------|
| Pesanteur                                  | $N78$        | $DX$ (mm)     | -2.34000 10 <sup>-8</sup> |
|                                            | $N120$       | $DY$ (mm)     | -1.185 10 <sup>-9</sup>   |
|                                            | $N13$        | $DY$ (mm)     | 1.2150 10 <sup>-9</sup>   |
|                                            | $N78(M13)$   | $SIYY$ (MPa)  | 8.0000 10 <sup>-4</sup>   |
| Rotation<br>uniforme - force<br>centrifuge | $N120$       | $DX$ (mm)     | -2.94240 10 <sup>-7</sup> |
|                                            | $N13$        | $DX$ (mm)     | 2.88010 10 <sup>-7</sup>  |
|                                            | $N120(M1)$   | $SIYY$ (MPa)  | 9.94880 10 <sup>-4</sup>  |
|                                            | $N13(M32)$   | $SIYY$ (MPa)  | 9.26310 10 <sup>-4</sup>  |
| Dilatation cas 1                           | $N120$       | $DX$ (mm)     | 1.056145 10 <sup>-6</sup> |
|                                            | $N13$        | $DX$ (mm)     | 1.110317 10 <sup>-6</sup> |
|                                            | $N120(M1)$   | $SIYY$ (MPa)  | 1.4321427                 |
| Dilatation cas 2                           | $N120$       | $DX$ (mm)     | 2.53500 10 <sup>-5</sup>  |
|                                            | $N120(M1)$   | $SIYY$ (MPa)  | -2.00000 10 <sup>-1</sup> |

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Éléments de coque axisymétrique



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus. On choisit la théorie de coques de Love-Kirchhoff (pour cela on prend un coefficient de cisaillement transverse de  $10^6$ ). On néglige la correction de métrique dans l'épaisseur. L'épaisseur est de  $1\text{ mm}$ .

| noeud    | GROUP_NO      |
|----------|---------------|
| <i>J</i> | <i>GRNO13</i> |
| <i>H</i> | <i>GRNO14</i> |
| <i>F</i> | <i>GRNO6</i>  |

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 21

Nombre de mailles et type : 10 SEG3

### 4.3 Conditions aux limites en déplacement et rotation

#### 4.3.1 Pesanteur

Le déplacement  $DY$  est bloqué au point  $F$  seul (*GRNO6*).

#### 4.3.2 Rotation

Le déplacement  $DY$  est bloqué au point  $F$  (*GRNO6*) au point  $J$  (*GRNO13*).  
La rotation autour de l'axe  $Z$  est nulle en ces deux points.

#### 4.3.3 Cas de dilatation thermique n°1

Le déplacement  $DY$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $Z$  sont bloqués sur toute la structure ( $\text{GROUP\_NO} = \text{'GRNO15'}$ ).

## 4.3.4 Cas de dilatation thermique n°2

Le déplacement  $DY$  est bloqué au point  $F$  (GROUP\_NO = 'GRNO06') et au point  $J$  (GROUP\_NO = 'GRNO13'). La rotation autour de l'axe  $Z$  est nulle sur les mêmes groupes de nœuds.

## 4.4 Résultats de la modélisation B

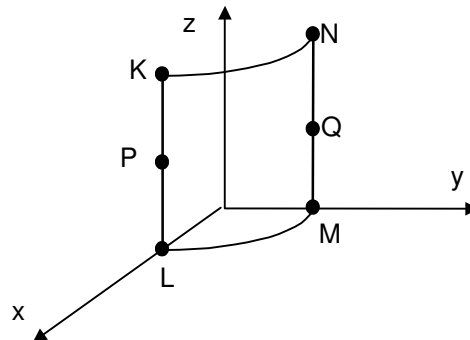
| Identification                     | Nœud (Maille)          | Valeur testée | Référence                |
|------------------------------------|------------------------|---------------|--------------------------|
| <b>Pesanteur</b>                   | $J$                    | $DX (mm)$     | $-2.40000 \cdot 10^{-8}$ |
|                                    | $H$                    | $DY (mm)$     | $5.00000 \cdot 10^{-9}$  |
|                                    | $H$                    | $DRZ$         | $2.40000 \cdot 10^{-9}$  |
|                                    | $J (M10)$              | $NXX (N)$     | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
|                                    | $J (M10)$ Peau interne | $SIXX (MPa)$  | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
| <b>Rotation - force centrifuge</b> | $F$                    | $DX (mm)$     | $2.91200 \cdot 10^{-7}$  |
|                                    | $F (M1)$               | $NXX (N)$     | $9.60000 \cdot 10^{-4}$  |
|                                    | $F (M1)$ Peau interne  | $SIXX (MPa)$  | $9.60000 \cdot 10^{-4}$  |
| <b>Dilatation cas 1</b>            | $F (M1)$               | $MXX (N.mm)$  | $-2.38095 \cdot 10^{-1}$ |
|                                    | $F (M1)$ Peau interne  | $SIXX (Mpa)$  | 1.428571                 |
| <b>Dilatation cas 2</b>            | $F$                    | $DX (mm)$     | $26.0000 \cdot 10^{-6}$  |
|                                    | $F (M1)$               | $NXX (N)$     | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                                    | $F (M1)$ Peau interne  | $SIXX (MPa)$  | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation d'un quart de cylindre.

Éléments de coque 3D : QUAD9



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus.

| <i>point</i> | <i>nœud</i>  |
|--------------|--------------|
| <i>K</i>     | <i>NO72</i>  |
| <i>L</i>     | <i>NO1</i>   |
| <i>M</i>     | <i>NO33</i>  |
| <i>N</i>     | <i>NO39</i>  |
| <i>P</i>     | <i>NO186</i> |
| <i>Q</i>     | <i>NO190</i> |

Le facteur de correction de cisaillement  $A_{CIS}$  vaut  $5/6$  (théorie de coques de Reissner).

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds externes : 121

Nombre de mailles et types : 32 QUAD9 + 8 SEG3

### 5.3 Conditions aux limites en déplacement et rotation

#### 5.3.1 Pesanteur

Le déplacement  $DZ$  est bloqué sur le groupe de nœuds  $LM$ .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$ .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

## 5.3.2 Rotation

Le déplacement  $DZ$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Y$  sont bloqués sur les groupes de nœuds  $KNSANSKN$  et  $LMSANSLM$ .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$ .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $Y$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KETL$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $X$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $METN$ .

## 5.3.3 Cas de dilatation thermique n°1

Le déplacement  $DZ$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Y$  sont bloqués sur les groupes de nœuds  $KNSANSKN$  et  $LMSANSLM$ .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$ .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $Y$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KETL$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $X$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $METN$ .

## 5.3.4 Cas de dilatation thermique n°2

Le déplacement  $DZ$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Y$  sont bloqués sur les groupes de nœuds  $KNSANSKN$  et  $LMSANSLM$ .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$ .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $Y$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KETL$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $X$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $METN$ .

## 5.4 Résultats de la modélisation C

| Identification                 | Nœud (maille)          | Valeur testée         | Référence                |
|--------------------------------|------------------------|-----------------------|--------------------------|
| Pesanteur                      | $K$                    | $DX \text{ (mm)}$     | $-2.40000 \cdot 10^{-8}$ |
|                                | $N$                    | $DY \text{ (mm)}$     | $-2.40000 \cdot 10^{-8}$ |
|                                | $P$                    | $DZ \text{ (mm)}$     | $5.00000 \cdot 10^{-9}$  |
|                                | $Q$                    | $DZ \text{ (mm)}$     | $5.00000 \cdot 10^{-9}$  |
|                                | $P$                    | $DRY$                 | $2.40000 \cdot 10^{-9}$  |
|                                | $Q$                    | $DRX$                 | $2.40000 \cdot 10^{-9}$  |
|                                | $K (M4)$               | $NY Y \text{ (N)}$    | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
|                                | $N (M32)$              | $NY Y \text{ (N)}$    | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
|                                | $K (M4)$ Peau interne  | $SIYY \text{ (MPa)}$  | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
|                                | $N (M32)$ Peau interne | $SIYY \text{ (MPa)}$  | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
| Rotation – force<br>centrifuge | $L$                    | $DX \text{ (mm)}$     | $2.91200 \cdot 10^{-7}$  |
|                                | $M$                    | $DY \text{ (mm)}$     | $2.91200 \cdot 10^{-7}$  |
|                                | $L (M1)$               | $NY Y \text{ (N)}$    | $9.60000 \cdot 10^{-4}$  |
|                                | $M (M29)$              | $NY Y \text{ (N)}$    | $9.60000 \cdot 10^{-4}$  |
|                                | $L (M1)$ Peau interne  | $SIYY \text{ (MPa)}$  | $9.84600 \cdot 10^{-4}$  |
|                                | $M (M29)$ Peau interne | $SIYY \text{ (MPa)}$  | $9.84600 \cdot 10^{-4}$  |
| Dilatation cas 1               | $L (M1)$               | $MY Y \text{ (N.mm)}$ | $-2.38095 \cdot 10^{-1}$ |
|                                | $M (M29)$              | $MY Y \text{ (N.mm)}$ | $-2.38095 \cdot 10^{-1}$ |
|                                | $L (M1)$ Peau interne  | $SIYY \text{ (MPa)}$  | 1.428571                 |
|                                | $M (M29)$ Peau interne | $SIYY \text{ (MPa)}$  | 1.428571                 |
| Dilatation cas 2               | $L$                    | $DX \text{ (mm)}$     | $25.9946 \cdot 10^{-6}$  |
|                                | $M$                    | $DY \text{ (mm)}$     | $25.9946 \cdot 10^{-6}$  |
|                                | $L (M1)$               | $NY Y \text{ (N)}$    | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                                | $M (M29)$              | $NY Y \text{ (N)}$    | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                                | $L (M1)$ Peau interne  | $SIYY \text{ (MPa)}$  | $-1.97800 \cdot 10^{-1}$ |
|                                | $M (M29)$ Peau interne | $SIYY \text{ (MPa)}$  | $-2.97800 \cdot 10^{-1}$ |

## 5.5 Remarques

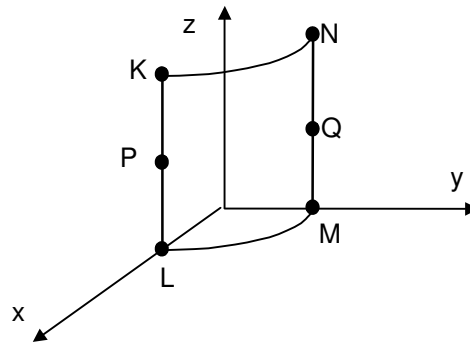
Résultats satisfaisants et identiques pour les calculs avec MECA\_STATIQUE et STAT\_NON\_LINE.

## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation d'un quart de cylindre.

Eléments de coque 3D : TRIA7



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus.

| <i>point</i> | <i>nœud</i>  |
|--------------|--------------|
| <i>K</i>     | <i>NO72</i>  |
| <i>L</i>     | <i>NO1</i>   |
| <i>M</i>     | <i>NO33</i>  |
| <i>N</i>     | <i>NO39</i>  |
| <i>P</i>     | <i>NO186</i> |
| <i>Q</i>     | <i>NO190</i> |

Le facteur de correction de cisaillement  $A_{CIS}$  vaut  $5/6$  (théorie de coques Reissner).

### 6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds externes : 153

Nombre de mailles et types : 64 TRIA7 + 8 SEG3

### 6.3 Conditions aux limites en déplacement et rotation

#### 6.3.1 Pesanteur

Le déplacement  $DZ$  est bloqué sur le groupe de nœuds  $LM$ .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$ .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

#### 6.3.2 Rotation

Le déplacement  $DZ$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Y$  sont bloqués sur les groupes de nœuds  $KNSANSKN$  et  $LMSANSLM$ .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$ .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $Y$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KETL$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $X$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $METN$ .

### 6.3.3 Cas de dilatation thermique n°1

Le déplacement  $DZ$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Y$  sont bloqués sur les groupes de nœuds  $KNSANSKN$  et  $LMSANSLM$ .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$ .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $Y$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KETL$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $X$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $METN$ .

### 6.3.4 Cas de dilatation thermique n°2

Le déplacement  $DZ$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Y$  sont bloqués sur les groupes de nœuds  $KNSANSKN$  et  $LMSANSLM$ .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$ .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $Y$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KETL$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $X$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $METN$ .

## 6.4 Valeurs testées

| Identification                     | Nœud (maille)               | Valeur testée     | Référence                |
|------------------------------------|-----------------------------|-------------------|--------------------------|
| <b>Pesanteur</b>                   | <i>K</i>                    | <i>DX (mm)</i>    | $-2.40000 \cdot 10^{-8}$ |
|                                    | <i>N</i>                    | <i>DY (mm)</i>    | $-2.40000 \cdot 10^{-8}$ |
|                                    | <i>P</i>                    | <i>DZ (mm)</i>    | $5.00000 \cdot 10^{-9}$  |
|                                    | <i>Q</i>                    | <i>DZ (mm)</i>    | $5.00000 \cdot 10^{-9}$  |
|                                    | <i>P</i>                    | $-DRY$            | $2.40000 \cdot 10^{-9}$  |
|                                    | <i>Q</i>                    | <i>DRX</i>        | $2.40000 \cdot 10^{-9}$  |
|                                    | <i>K (M60)</i>              | <i>NYI (N)</i>    | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
|                                    | <i>N (M56)</i>              | <i>NYI (N)</i>    | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
|                                    | <i>K (M60) Peau interne</i> | <i>SIYY (MPa)</i> | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
|                                    | <i>N (M56) Peau interne</i> | <i>SIYY (MPa)</i> | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
| <b>Rotation – force centrifuge</b> | <i>L</i>                    | <i>DX (mm)</i>    | $2.91200 \cdot 10^{-7}$  |
|                                    | <i>M</i>                    | <i>DY (mm)</i>    | $2.91200 \cdot 10^{-7}$  |
|                                    | <i>L (M25)</i>              | <i>NYI (N)</i>    | $9.60000 \cdot 10^{-4}$  |
|                                    | <i>M (M53)</i>              | <i>NYI (N)</i>    | $9.60000 \cdot 10^{-4}$  |
|                                    | <i>L (M25) Peau interne</i> | <i>SIYY (MPa)</i> | $9.84600 \cdot 10^{-4}$  |
|                                    | <i>M (M53) Peau interne</i> | <i>SIYY (MPa)</i> | $9.84600 \cdot 10^{-4}$  |
| <b>Dilatation cas 1</b>            | <i>L (M25)</i>              | <i>MYI (N.mm)</i> | $-2.38095 \cdot 10^{-1}$ |
|                                    | <i>M (M53)</i>              | <i>MYI (N.mm)</i> | $-2.38095 \cdot 10^{-1}$ |
|                                    | <i>L (M25) Peau interne</i> | <i>SIYY (MPa)</i> | 1.428571                 |
|                                    | <i>M (M53) Peau interne</i> | <i>SIYY (MPa)</i> | 1.428571                 |
| <b>Dilatation cas 2</b>            | <i>L</i>                    | <i>DX (mm)</i>    | $26.0000 \cdot 10^{-6}$  |
|                                    | <i>M</i>                    | <i>DY (mm)</i>    | $26.0000 \cdot 10^{-6}$  |
|                                    | <i>L (M25)</i>              | <i>NYI (N)</i>    | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                                    | <i>M (M53)</i>              | <i>NYI (N)</i>    | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                                    | <i>L (M25) Peau interne</i> | <i>SIYY (MPa)</i> | $-1.97800 \cdot 10^{-1}$ |
|                                    | <i>M (M53) Peau interne</i> | <i>SIYY (MPa)</i> | $-1.97800 \cdot 10^{-1}$ |

## 6.5 Remarques

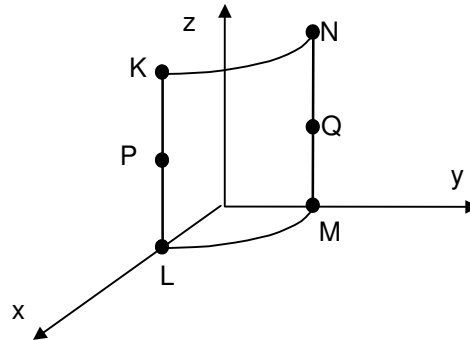
Résultats satisfaisants et identiques pour les calculs avec MECA\_STATIQUE et STAT\_NON\_LINE.

## 7 Modélisation E

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation d'un quart de cylindre.

Éléments de plaque DKQ : QUAD4



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus.

| point    | noeud        |
|----------|--------------|
| <i>K</i> | <i>NO160</i> |
| <i>L</i> | <i>NO203</i> |
| <i>M</i> | <i>NO11</i>  |
| <i>N</i> | <i>NO1</i>   |
| <i>P</i> | <i>NO226</i> |
| <i>Q</i> | <i>NO6</i>   |

### 7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 231

Nombre de mailles et types : 200 QUAD4 + 80 SEG2

### 7.3 Conditions aux limites en déplacement et rotation

#### 7.3.1 Pesanteur

Le déplacement  $DZ$  est bloqué sur le groupe de nœuds  $LM$ .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$ .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

#### 7.3.2 Cas de dilatation thermique n°1

Le déplacement  $DZ$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Y$  sont bloqués sur les groupes de nœuds  $KNSANSKN$  et  $LMSANSLM$ .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$ .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $Y$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KETL$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $X$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $METN$ .

## 7.3.3 Cas de dilatation thermique n°2

Le déplacement  $DZ$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Y$  sont bloqués sur les groupes de nœuds  $KNSANSKN$  et  $LMSANSLM$ .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$ .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $Y$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KETL$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $X$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $METN$ .

## 7.4 Résultats de la modélisation E

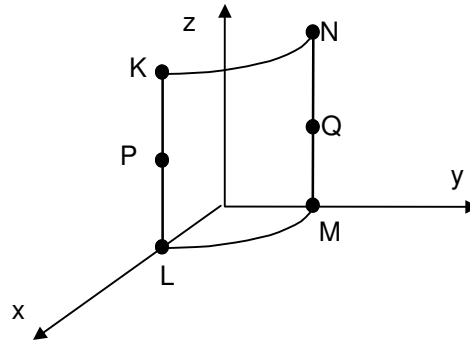
| Identification   | Nœud (maille)           | Valeur testée | Référence                |
|------------------|-------------------------|---------------|--------------------------|
| Pesanteur        | $K$                     | $DX (mm)$     | $-2.40000 \cdot 10^{-8}$ |
|                  | $N$                     | $DY (mm)$     | $-2.40000 \cdot 10^{-8}$ |
|                  | $P$                     | $DZ (mm)$     | $5.00000 \cdot 10^{-9}$  |
|                  | $Q$                     | $DZ (mm)$     | $5.00000 \cdot 10^{-9}$  |
|                  | $P$                     | $-DRY$        | $2.40000 \cdot 10^{-9}$  |
|                  | $Q$                     | $DRX$         | $2.40000 \cdot 10^{-9}$  |
|                  | $K (M181)$              | $NYN (N)$     | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
|                  | $N (M200)$              | $NYN (N)$     | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
|                  | $K (M181)$ Peau interne | $SIYY (MPa)$  | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
|                  | $N (M200)$ Peau interne | $SIYY (MPa)$  | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
| Dilatation cas 1 | $L (M1)$                | $MYY (N.mm)$  | $-2.38095 \cdot 10^{-1}$ |
|                  | $M (M20)$               | $MYY (N.mm)$  | $-2.38095 \cdot 10^{-1}$ |
|                  | $L (M1)$ Peau interne   | $SIYY (MPa)$  | 1.428571                 |
|                  | $M (M20)$ Peau interne  | $SIYY (MPa)$  | 1.428571                 |
| Dilatation cas 2 | $L$                     | $DX (mm)$     | $26.0000 \cdot 10^{-6}$  |
|                  | $M$                     | $DY (mm)$     | $26.0000 \cdot 10^{-6}$  |
|                  | $L (M1)$                | $NYN (N)$     | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                  | $M (M20)$               | $NYN (N)$     | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                  | $L (M1)$ Peau interne   | $SIYY (MPa)$  | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                  | $M (M20)$ Peau interne  | $SIYY (MPa)$  | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |

## 8 Modélisation F

### 8.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation d'un quart de cylindre.

Eléments de plaque DKT : TRIA3



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus.

| point    | noeud        |
|----------|--------------|
| <i>K</i> | <i>NO1</i>   |
| <i>L</i> | <i>NO11</i>  |
| <i>M</i> | <i>NO161</i> |
| <i>N</i> | <i>NO227</i> |
| <i>P</i> | <i>NO6</i>   |
| <i>Q</i> | <i>NO215</i> |

### 8.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 231

Nombre de mailles et type : 400 TRIA3 + 80 SEG2

### 8.3 Conditions aux limites en déplacement et rotation

#### 8.3.1 Pesanteur

Le déplacement  $DZ$  est bloqué sur le groupe de nœuds  $LM$ .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$ .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

#### 8.3.2 Cas de dilatation thermique n°1

Le déplacement  $DZ$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Y$  sont bloqués sur les groupes de nœuds  $KNSANSKN$  et  $LMSANSLM$ .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$ .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $Y$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KETL$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $X$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $METN$ .

### 8.3.3 Cas de dilatation thermique n°2

Le déplacement  $DZ$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Y$  sont bloqués sur les groupes de nœuds  $KNSANSKN$  et  $LMSANSLM$ .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$ .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $Y$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KETL$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $X$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $METN$ .

## 8.4 Résultats de la modélisation F

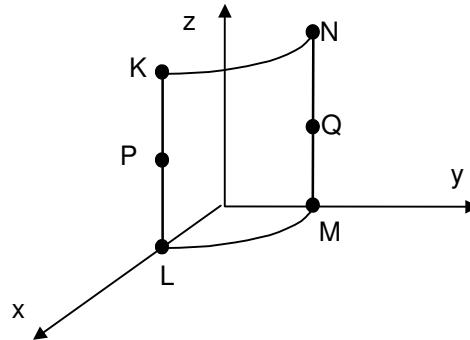
| Identification          | Noeud (maille)          | Valeur testée | Référence                |
|-------------------------|-------------------------|---------------|--------------------------|
| <b>Pesanteur</b>        | $K$                     | $DX (mm)$     | $-2.40000 \cdot 10^{-8}$ |
|                         | $N$                     | $DY (mm)$     | $-2.40000 \cdot 10^{-8}$ |
|                         | $P$                     | $DZ (mm)$     | $5.00000 \cdot 10^{-9}$  |
|                         | $Q$                     | $DZ (mm)$     | $5.00000 \cdot 10^{-9}$  |
|                         | $-DRX$                  | $-DRY$        | $2.40000 \cdot 10^{-9}$  |
|                         | $DRX$                   | $DRX$         | $2.40000 \cdot 10^{-9}$  |
|                         | $K (M362)$              | $NYI (N)$     | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
|                         | $N (M400)$              | $NYI (N)$     | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
|                         | $L (M362)$ Peau interne | $SIYY (MPa)$  | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
|                         | $N (M400)$ Peau interne | $SIYY (MPa)$  | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
| <b>Dilatation cas 1</b> | $L (M1)$                | $MYY (N.mm)$  | $-2.38095 \cdot 10^{-1}$ |
|                         | $M (M39)$               | $MYY (N.mm)$  | $-2.38095 \cdot 10^{-1}$ |
|                         | $L (M1)$ Peau interne   | $SIXX (MPa)$  | 1.428571                 |
|                         | $M (M39)$ Peau interne  | $SIXX (MPa)$  | 1.428571                 |
| <b>Dilatation cas 2</b> | $L$                     | $DX (mm)$     | $26.0000 \cdot 10^{-6}$  |
|                         | $M$                     | $DY (mm)$     | $26.0000 \cdot 10^{-6}$  |
|                         | $L (M1)$                | $NYI (N)$     | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                         | $M (M39)$               | $NYI (N)$     | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                         | $L (M1)$ Peau interne   | $SIYY (MPa)$  | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                         | $M (M39)$ Peau interne  | $SIYY (MPa)$  | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |

## 9 Modélisation G

### 9.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation d'un quart de cylindre.

Eléments de plaque DKT : TRIA3. La modélisation utilise une plaque bi-couche dont les caractéristiques d'orthotropie sont celles du matériau défini au § 1.2 .



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus.

| point    | noeud        |
|----------|--------------|
| <i>K</i> | <i>NO1</i>   |
| <i>L</i> | <i>NO11</i>  |
| <i>M</i> | <i>NO161</i> |
| <i>N</i> | <i>NO227</i> |
| <i>P</i> | <i>NO6</i>   |
| <i>Q</i> | <i>NO215</i> |

### 9.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 231

Nombre de mailles et types : 400 TRIA3 + 80 SEG2

### 9.3 Conditions aux limites en déplacement et rotation

#### 9.3.1 Pesanteur

Le déplacement  $DZ$  est bloqué sur le groupe de nœuds  $LM$  .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$  .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$  .

#### 9.3.2 Cas de dilatation thermique n°1

Le déplacement  $DZ$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Y$  sont bloqués sur les groupes de nœuds  $KNSANSKN$  et  $LMSANSLM$  .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$  .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $Y$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KETL$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $X$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $METN$ .

### 9.3.3 Cas de dilatation thermique n°2

Le déplacement  $DZ$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Y$  sont bloqués sur les groupes de nœuds  $KNSANSKN$  et  $LMSANSLM$ .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$ .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $Y$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KETL$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $X$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $METN$ .

## 9.4 Résultats de la modélisation G

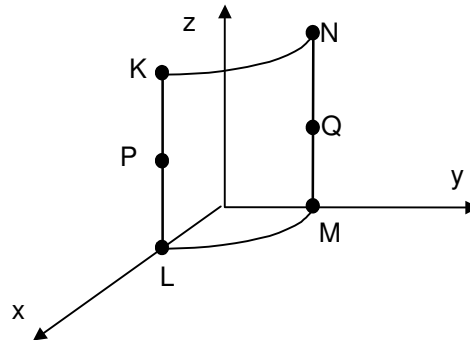
| Identification   | Nœud (maille)            | Valeur testée | Référence                |
|------------------|--------------------------|---------------|--------------------------|
| Pesanteur        | $K$                      | $DX$          | $-2.40000 \cdot 10^{-8}$ |
|                  | $N$                      | $DY$          | $-2.40000 \cdot 10^{-8}$ |
|                  | $P$                      | $DZ$          | $5.0 \cdot 10^{-9}$      |
|                  | $Q$                      | $DZ$          | $5.0 \cdot 10^{-9}$      |
|                  | $P$                      | $-DRY$        | $2.40000 \cdot 10^{-9}$  |
|                  | $Q$                      | $DRX$         | $2.40000 \cdot 10^{-9}$  |
|                  | $K (M362)$               | $NYY$         | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
|                  | $N (M400)$               | $NYY$         | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
|                  | $K (M362)$               | $SIYY$        | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
|                  | $N (M400)$               | $SIYY$        | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
| Dilatation cas 1 | $L (M1)$                 | $MYY$         | $-2.38095 \cdot 10^{-1}$ |
|                  | $M (M39)$                | $MYY$         | $-2.38095 \cdot 10^{-1}$ |
|                  | $L (M1)$ , peau interne  | $SIXX$        | $1.428571$               |
|                  | $L (M1)$ , peau externe  | $SIXX$        | $-1.428571$              |
|                  | $M (M39)$ , peau interne | $SIXX$        | $1.428571$               |
|                  | $M (M39)$ , peau externe | $SIXX$        | $-1.428571$              |
| Dilatation cas 2 | $L$                      | $DX$          | $26.0 \cdot 10^{-6}$     |
|                  | $M$                      | $DY$          | $26.0 \cdot 10^{-6}$     |
|                  | $L (M1)$                 | $NYY$         | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                  | $M (M39)$                | $NYY$         | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                  | $L (M1)$                 | $SIYY$        | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                  | $M (M39)$                | $SIYY$        | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |

## 10 Modélisation H

## 10.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation d'un quart de cylindre.

Eléments de plaque `DKQ` : `QUAD4`. La modélisation utilise une plaque bi-couche dont les caractéristiques d'orthotropie sont celles du matériau défini au § 1.2 .



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus.

| point    | noeud        |
|----------|--------------|
| <i>K</i> | <i>NO160</i> |
| <i>L</i> | <i>NO203</i> |
| <i>M</i> | <i>NO11</i>  |
| <i>N</i> | <i>NO1</i>   |
| <i>P</i> | <i>NO226</i> |
| <i>Q</i> | <i>NO6</i>   |

## 10.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds externes : 231

Nombre de mailles et types : 200 `QUAD4` + 80 `SEG2`

## 10.3 Conditions aux limites en déplacement et rotation

### 10.3.1 Pesanteur

Le déplacement  $DZ$  est bloqué sur le groupe de nœuds  $LM$  .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$  .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$  .

### 10.3.2 Cas de dilatation thermique n°1

Le déplacement  $DZ$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Y$  sont bloqués sur les groupes de nœuds  $KNSANSKN$  et  $LMSANSLM$  .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$  .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$  .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $Y$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KETL$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $X$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $METN$ .

### 10.3.3 Cas de dilatation thermique n°2

Le déplacement  $DZ$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Y$  sont bloqués sur les groupes de nœuds  $KNSANSKN$  et  $LMSANSLM$ .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$ .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $Y$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KETL$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $X$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $METN$ .

## 10.4 Résultats de la modélisation H

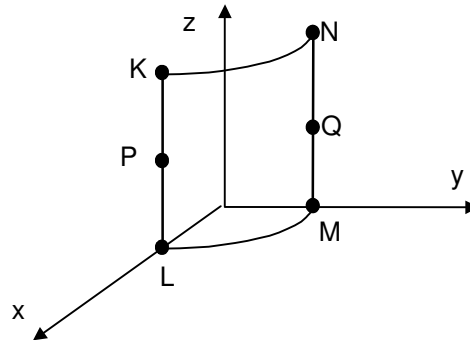
| Identification          | Noeud (maille)           | Valeur testée | Référence                |
|-------------------------|--------------------------|---------------|--------------------------|
| <b>Pesanteur</b>        | $K$                      | $DX (mm)$     | $-2.40000 \cdot 10^{-8}$ |
|                         | $N$                      | $DY (mm)$     | $-2.40000 \cdot 10^{-8}$ |
|                         | $P$                      | $DZ (mm)$     | $5.00000 \cdot 10^{-9}$  |
|                         | $Q$                      | $DZ (mm)$     | $5.00000 \cdot 10^{-9}$  |
|                         | $P$                      | $-DRX$        | $2.40000 \cdot 10^{-9}$  |
|                         | $Q$                      | $DRX$         | $2.40000 \cdot 10^{-9}$  |
|                         | $K (M181)$               | $NYY (N)$     | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
|                         | $N (M200)$               | $NYY (N)$     | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
|                         | $K (M181)$               | $SIYY (Pa)$   | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
|                         | $N (M200)$               | $SIYY (Pa)$   | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
| <b>Dilatation cas 1</b> | $L (M1)$                 | $MYY (N.mm)$  | $-2.38095 \cdot 10^{-1}$ |
|                         | $M (M20)$                | $MYY (N.mm)$  | $-2.38095 \cdot 10^{-1}$ |
|                         | $L (M1)$ , peau interne  | $SIYY (Pa)$   | 1.428571                 |
|                         | $L (M1)$ , peau externe  | $SIYY (Pa)$   | -1.428571                |
|                         | $M (M20)$ , peau interne | $SIYY (Pa)$   | 1.428571                 |
|                         | $M (M20)$ , peau externe | $SIYY (Pa)$   | -1.428571                |
| <b>Dilatation cas 2</b> | $L$                      | $DX (mm)$     | $26.0000 \cdot 10^{-6}$  |
|                         | $M$                      | $DY (mm)$     | $26.0000 \cdot 10^{-6}$  |
|                         | $L (M1)$                 | $NYY (N)$     | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                         | $M (M20)$                | $NYY (N)$     | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                         | $L (M1)$                 | $SIYY (Pa)$   | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                         | $M (M20)$                | $SIYY (Pa)$   | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |

## 11 Modélisation I

### 11.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation d'un quart de cylindre.

Eléments de plaque DKQ : QUAD4. Affectation de caractéristiques de plaques homogénéisées correspondant au matériau du § 1.2 .



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus.

| point    | noeud        |
|----------|--------------|
| <i>K</i> | <i>NO160</i> |
| <i>L</i> | <i>NO203</i> |
| <i>M</i> | <i>NO11</i>  |
| <i>N</i> | <i>NO1</i>   |
| <i>P</i> | <i>NO226</i> |
| <i>Q</i> | <i>NO6</i>   |

### 11.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds externes : 231

Nombre de mailles et types : 200 QUAD4 + 80 SEG2

### 11.3 Conditions aux limites en déplacement et rotation

#### 11.3.1 Pesanteur

Le déplacement  $DZ$  est bloqué sur le groupe de nœuds  $LM$  .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$  .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$  .

#### 11.3.2 Cas de dilatation thermique n°1

Le déplacement  $DZ$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Y$  sont bloqués sur les groupes de nœuds  $KNSANSKN$  et  $LMSANSLM$  .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$  .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $Y$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KETL$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $X$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $METN$ .

## 11.3.3 Cas de dilatation thermique n°2

Le déplacement  $DZ$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Y$  sont bloqués sur les groupes de nœuds  $KNSANSKN$  et  $LMSANSLM$ .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$ .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $Y$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KETL$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $X$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $METN$ .

## 11.4 Résultats de la modélisation I

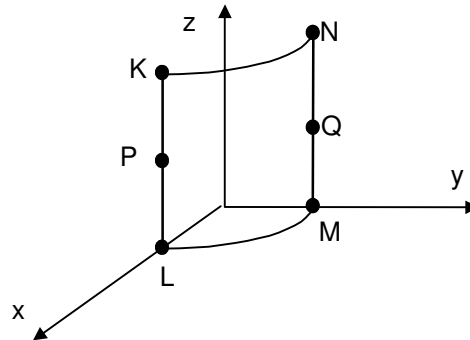
| Identification          | Noeud (maille)           | Valeur testée | Référence                |
|-------------------------|--------------------------|---------------|--------------------------|
| <b>Pesanteur</b>        | $K$                      | $DX (mm)$     | $-2.40000 \cdot 10^{-8}$ |
|                         | $N$                      | $DY (mm)$     | $-2.40000 \cdot 10^{-8}$ |
|                         | $P$                      | $DZ (mm)$     | $5.00000 \cdot 10^{-9}$  |
|                         | $Q$                      | $DZ (mm)$     | $5.00000 \cdot 10^{-9}$  |
|                         | $P$                      | $-DRX$        | $2.40000 \cdot 10^{-9}$  |
|                         | $Q$                      | $DRX$         | $2.40000 \cdot 10^{-9}$  |
|                         | $K (M181)$               | $NYN (N)$     | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
|                         | $N (M200)$               | $NYN (N)$     | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
| <b>Dilatation cas 1</b> | $L (M1)$                 | $MYN (N.mm)$  | $-2.38095 \cdot 10^{-1}$ |
|                         | $M (M20)$                | $MYN (N.mm)$  | $-2.38095 \cdot 10^{-1}$ |
|                         | $L (M1)$ , peau interne  | $SIYN (Pa)$   | 1.428571                 |
|                         | $M (M20)$ , peau interne | $SIYN (Pa)$   | 1.428571                 |
| <b>Dilatation cas 2</b> | $L$                      | $DX (mm)$     | $26.0000 \cdot 10^{-6}$  |
|                         | $M$                      | $DY (mm)$     | $26.0000 \cdot 10^{-6}$  |
|                         | $L (M1)$                 | $NYN (N)$     | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                         | $M (M20)$                | $NYN (N)$     | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                         | $L (M1)$                 | $SIYN (Pa)$   | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                         | $M (M20)$                | $SIYN (Pa)$   | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |

## 12 Modélisation J

### 12.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation d'un quart de cylindre.

Eléments de plaque DKT : TRIA3. Affectation de caractéristiques de plaques homogénéisées correspondant au matériau du § 1.2 .



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus.

| point    | noeud        |
|----------|--------------|
| <i>K</i> | <i>NO1</i>   |
| <i>L</i> | <i>NO11</i>  |
| <i>M</i> | <i>NO161</i> |
| <i>N</i> | <i>NO227</i> |
| <i>P</i> | <i>NO6</i>   |
| <i>Q</i> | <i>NO215</i> |

### 12.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 231

Nombre de mailles et types : 400 TRIA3 + 80 SEG2

### 12.3 Conditions aux limites en déplacement et rotation

#### 12.3.1 Pesanteur

Le déplacement  $DZ$  est bloqué sur le groupe de nœuds  $LM$  .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$  .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$  .

#### 12.3.2 Cas de dilatation thermique n°1

Le déplacement  $DZ$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Y$  sont bloqués sur les groupes de nœuds  $KNSANSKN$  et  $LMSANSLM$  .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$  .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $Y$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KETL$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $X$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $METN$ .

## 12.3.3 Cas de dilatation thermique n°2

Le déplacement  $DZ$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Y$  sont bloqués sur les groupes de nœuds  $KNSANSKN$  et  $LMSANSLM$ .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$ .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $Y$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KETL$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $X$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $METN$ .

## 12.4 Résultats de la modélisation J

| Identification          | Nœud (maille)            | Valeur testée | Référence                |
|-------------------------|--------------------------|---------------|--------------------------|
| <b>Pesanteur</b>        | $K$                      | $DX (mm)$     | $-2.40000 \cdot 10^{-8}$ |
|                         | $N$                      | $DY (mm)$     | $-2.40000 \cdot 10^{-8}$ |
|                         | $P$                      | $DZ (mm)$     | $5.0 \cdot 10^{-9}$      |
|                         | $Q$                      | $DZ (mm)$     | $5.0 \cdot 10^{-9}$      |
|                         | $P$                      | $-DRY$        | $2.40000 \cdot 10^{-9}$  |
|                         | $Q$                      | $DRX$         | $2.40000 \cdot 10^{-9}$  |
|                         | $K (M362)$               | $NYN (N)$     | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
|                         | $N (M400)$               | $NYN (N)$     | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
| <b>Dilatation cas 1</b> | $L (M1)$                 | $MYN (N.mm)$  | $-2.38095 \cdot 10^{-1}$ |
|                         | $M (M39)$                | $MYN (N.mm)$  | $-2.38095 \cdot 10^{-1}$ |
|                         | $L (M1)$ , peau interne  | $SIYN (Pa)$   | $1.428571$               |
|                         | $M (M39)$ , peau interne | $SIYN (Pa)$   | $1.428571$               |
| <b>Dilatation cas 2</b> | $L$                      | $DX (mm)$     | $26.0 \cdot 10^{-6}$     |
|                         | $M$                      | $DY (mm)$     | $26.0 \cdot 10^{-6}$     |
|                         | $L (M1)$                 | $NYN (N)$     | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                         | $M (M39)$                | $NYN (N)$     | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                         | $L (M1)$                 | $SIYN (Pa)$   | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                         | $M (M39)$                | $SIYN (Pa)$   | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |

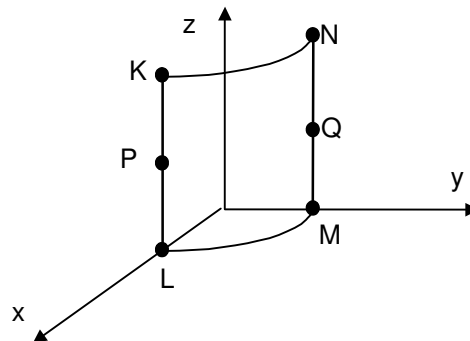
## 13 Modélisation K

### 13.1 Caractéristiques de la modélisation

Identique à la modélisation E avec des éléments  $DKQG$  (modélisation  $DKTG$ ) .

Cette modélisation a pour but de tester la prise en compte de la température pour les éléments  $DKQG$  .

Éléments de plaque  $DKQG$  : QUAD4



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus.

| point    | noeud        |
|----------|--------------|
| <i>K</i> | <i>NO160</i> |
| <i>L</i> | <i>NO203</i> |
| <i>M</i> | <i>NO11</i>  |
| <i>N</i> | <i>NO1</i>   |
| <i>P</i> | <i>NO226</i> |
| <i>Q</i> | <i>NO6</i>   |

### 13.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 231

Nombre de mailles et types : 200 QUAD4 + 80 SEG2

### 13.3 Conditions aux limites en déplacement et rotation

#### 13.3.1 Pesanteur

Le déplacement  $DZ$  est bloqué sur le groupe de nœuds  $LM$  .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$  .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$  .

#### 13.3.2 Cas de dilatation thermique n°1

Le déplacement  $DZ$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Y$  sont bloqués sur les groupes de nœuds  $KNSANSKN$  et  $LMSANSLM$  .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$  .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $Y$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KETL$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $X$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $METN$ .

### 13.3.3 Cas de dilatation thermique n°2

Le déplacement  $DZ$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Y$  sont bloqués sur les groupes de nœuds  $KNSANSKN$  et  $LMSANSLM$ .

Le déplacement  $DY$  ainsi que les rotations autour des axes  $X$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KL$ .

Le déplacement  $DX$  ainsi que les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $MN$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $Y$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $KETL$ .

Le déplacement  $DZ$  ainsi que la rotation autour de l'axe  $X$  sont bloqués sur le groupe de nœuds  $METN$ .

## 13.4 Résultats de la modélisation K

| Identification          | Nœud (maille) | Valeur testée | Référence                |
|-------------------------|---------------|---------------|--------------------------|
| <b>Pesanteur</b>        | $K$           | $DX (mm)$     | $-2.40000 \cdot 10^{-8}$ |
|                         | $N$           | $DY (mm)$     | $-2.40000 \cdot 10^{-8}$ |
|                         | $P$           | $DZ (mm)$     | $5.00000 \cdot 10^{-9}$  |
|                         | $Q$           | $DZ (mm)$     | $5.00000 \cdot 10^{-9}$  |
|                         | $P$           | $-DRY$        | $2.40000 \cdot 10^{-9}$  |
|                         | $Q$           | $DRX$         | $2.40000 \cdot 10^{-9}$  |
|                         | $K (181)$     | $NYI (N)$     | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
|                         | $N (M200)$    | $NYI (N)$     | $8.00000 \cdot 10^{-4}$  |
| <b>Dilatation cas 1</b> | $L (M1)$      | $MYI (N.mm)$  | $-2.38095 \cdot 10^{-1}$ |
|                         | $M (M20)$     | $MYI (N.mm)$  | $-2.38095 \cdot 10^{-1}$ |
| <b>Dilatation cas 2</b> | $L$           | $DX (mm)$     | $26.0000 \cdot 10^{-6}$  |
|                         | $M$           | $DY (mm)$     | $26.0000 \cdot 10^{-6}$  |
|                         | $L (M1)$      | $NYI (N)$     | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |
|                         | $M (M20)$     | $NYI (N)$     | $-2.00000 \cdot 10^{-1}$ |

## 14 Synthèse des résultats

---

Les très bons résultats obtenus pour les modélisations  $A$  et  $B$  s'expliquent par le fait que les solutions de référence appartiennent à l'espace engendré par les éléments finis choisis. Seules subsistent les erreurs d'arrondi numérique.

Des résultats satisfaisants ont été obtenus pour les modélisations de plaques et de coques dans l'espace  $C, D, E, F, G, H, I, J$  et  $K$ . Pour ces dernières, un calcul thermo-élastique chaîné a été effectué. Les résultats avec la modélisation  $DKT$  ( $E, F, G, H, I, J$ ) montrent que les éléments quadrangle ont un meilleur comportement que les éléments triangle. Il est nécessaire d'avoir une discrétisation suffisamment fine avec ces éléments plans de façon à pouvoir modéliser correctement la géométrie circulaire de la coque cylindrique. En effet, discrétiser la géométrie du cylindre par facettes planes ou paraboliques n'est pas conforme et induit une flexion parasite qui diminue avec la finesse de maillage. Ainsi une multiplication du nombre d'éléments par deux sur la hauteur de la structure fait chuter l'erreur maximale relative de 5,48% (cas présenté ici) à 2,8%. Les résultats avec la modélisation  $COQUE\_3D$  ( $C$  et  $D$ ) sont très bons sauf pour la pesanteur avec l'élément triangle.

Les calculs avec la modélisation  $DKTG$  ( $K$ ) donnent les mêmes résultats qu'avec la modélisation  $DKT$ .

## 15 Annexe

### 15.1 Chargement de rotation uniforme autour de $OZ$

#### 15.1.1 Modèle 2D axisymétrique

La densité de force centrifuge est :  $\rho \Omega^2 r e_r$ .

On envisage les conditions aux limites suivantes :

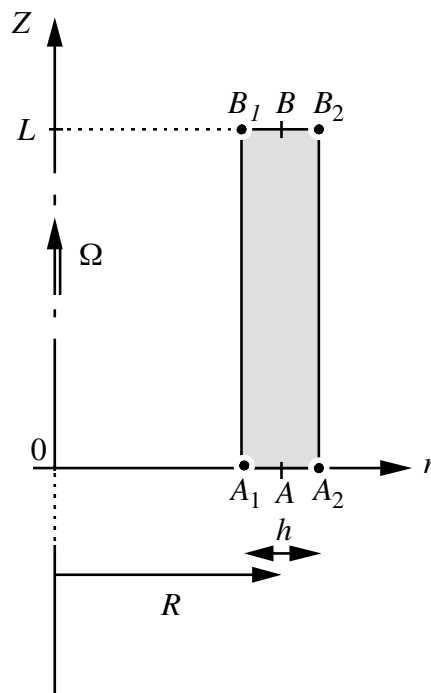
$$u_z(r, z) = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } z = L$$

On postule le déplacement sous la forme :

$$\begin{aligned} u_r &= u(r) \\ u_z &= u_\theta = 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\varepsilon_{rr} = u' ; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} ; \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{r\theta} = 0$$



Géométrie du cylindre creux :

$$\begin{aligned} R &= 20 \text{ mm} \\ h &= 1 \text{ mm} \end{aligned}$$

Les contraintes élastiques s'expriment :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)u' + \nu \frac{u}{r} \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\frac{u}{r} + \nu u' \right] \\ \sigma_{zz} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \frac{u}{r} + u' \right]\end{aligned}$$

L'équation d'équilibre radial s'écrit :

$$(r \sigma_{rr})_{,r} - \sigma_{\theta\theta} = -\rho \Omega^2 r^2$$

Ainsi :

$$\left( \frac{(ru)'}{r} \right)' = \frac{-(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} \rho \Omega^2 r \quad \text{éq 1.1-1}$$

**Note :**

$$\frac{u}{r} + u' = \frac{(ru)'}{r}$$

D'où la solution générale :

$$u(r) = \frac{-(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} \rho \Omega^2 \frac{r^3}{8} + Ar + \frac{B}{r} \quad \text{éq 1.1-2}$$

Les contraintes sont alors :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r) &= \frac{-3-2\nu}{1-\nu} \rho \Omega^2 \frac{r^2}{8} + \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( A - (1-2\nu) \frac{B}{r^2} \right) \\ \sigma_{\theta\theta}(r) &= \frac{-1+2\nu}{1-\nu} \rho \Omega^2 \frac{r^2}{8} + \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( A - (1-2\nu) \frac{B}{r^2} \right) \\ \sigma_{zz}(r) &= \frac{-\nu}{1-\nu} \rho \Omega^2 \frac{r^2}{2} + \frac{2\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} A\end{aligned} \quad \text{éq 1.1-3}$$

Les conditions aux limites en contraintes sont :

$$\sigma_{rr} = 0 \quad \text{en } r = R \pm \frac{h}{2}$$

On note :

$$x = \frac{h}{2R}$$

On obtient grâce à [éq 1.1-3] :

$$B = \frac{(3-2\nu)(1+\nu)}{8(1-\nu)E} \rho \Omega^2 R^4 (1-x^2)^2$$

puis :

$$A = \frac{(3-2\nu)(1+\nu)(1-2\nu)}{4(1-\nu)E} \rho \Omega^2 R^2 (1-x^2)$$

**Application numérique :**

$$\rho = 8.10^{-6} \text{ kg/mm}^3$$

$$\Omega = 1 \text{ s}^{-1}$$

$$E = 2.105 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } A &= 7.13588.10^{-9} \text{ mm}^2 \\ B &= 3.561258.10^{-6} \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

**Note :**

$$\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} \rho \frac{\Omega^2}{8} = 3.714286 \text{ E-12 mm}^2$$

$$\frac{\nu}{1-\nu} \rho \frac{\Omega^2}{2} = 1.714286 \text{ E-6 MPa.mm}^2$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \bullet \text{ en peau interne : } & \begin{cases} u_r = 2.9424 \text{ E}^{-7} \text{ mm} \\ \sigma_{zz} = 0.99488 \text{ E}^{-3} \text{ Mpa} \end{cases} \\ \bullet \text{ en peau externe : } & \begin{cases} u_r = 2.8801 \text{ E}^{-7} \text{ mm} \\ \sigma_{zz} = 0.92631 \text{ E}^{-3} \text{ Mpa} \end{cases} \end{aligned}$$

## 15.1.2 Modèle coque axisymétrique

La force centrifuge équivaut à une **pression répartie** :

$$p = \rho \Omega^2 h R \left( 1 + \frac{h^2}{12R^2} \right)$$

La solution est membranaire, l'équilibre normal s'écrit :

$$N_{\theta\theta} = pR$$

La déformation membranaire est :  $E_{\theta\theta} = \frac{w}{R}$ , alors que  $E_{\theta\theta} = 0 = K_{\theta\theta} = K_{zz}$ .

En élasticité :

$$N_{\theta\theta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} E_{\theta\theta} ; N_{zz} = \nu N_{\theta\theta} ; M_{\alpha\beta} = 0$$

D'où la solution (flèche et effort normal circonférentiel) :

$$w = \frac{(1-\nu^2)\rho\Omega^2}{E} R^3 \left(1 + \frac{h^2}{12R^2}\right) ; N_{\theta\theta} = \rho\Omega^2 R^2 h \left(1 + \frac{h^2}{12R^2}\right)$$

La contrainte axiale vaut :

$$\sigma_{zz} = \nu \rho \Omega^2 R^2 \left(1 + \frac{h^2}{12R^2}\right) \quad (\text{constante dans l'épaisseur})$$

Si on ne tient pas compte de la correction de métrique, il faut ôter le terme  $\left(1 + \frac{h^2}{12R^2}\right)$  dans les expressions précédentes.

**Application numérique** (sans correction de métrique) :

$$\begin{aligned} p &= 1,600000 \cdot 10^{-4} \text{ MPa} \\ w &= 2,912000 \cdot 10^{-7} \text{ mm} \\ N_{zz} &= 0,96000 \cdot 10^{-3} \text{ N/mm} \\ \sigma_{zz} &= 0,96000 \cdot 10^{-3} \text{ MPa} \end{aligned}$$

## 15.2 Chargement de pesanteur

### 15.2.1 Modèle 2D axisymétrique

La densité de force est :  $-\rho g e_z$  (pesanteur verticale).

On envisage les conditions aux limites suivantes :

$$U_z(r, z)=0 \text{ en } r=R \text{ et } z=0 \text{ (cercle d'appui)}$$

avec la traction uniforme :  $\sigma_{zz}(r, z)=\rho g L$  en  $z=L$ , équilibrant le poids.

On postule la solution élastique du type :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

de sorte que :

$$\varepsilon_{rr}=\varepsilon_{\theta\theta}=-\nu \varepsilon_{zz}=-\nu u_{z,z}=-\nu \frac{\sigma_{zz}}{E} ; \varepsilon_{rz}=0=\varepsilon_{r\theta}=\varepsilon_{\theta z}$$

On observe ainsi :

$$u_{r,r}=\frac{u_r}{r} \Leftrightarrow u_r(r, z)=-\nu A'(z)r$$

Puis :

$$\begin{aligned} -\nu A'(z) &= \varepsilon_{rr} = -\nu \varepsilon_{zz} \Leftrightarrow u_{z,z}(r, z) = A'(z) \\ &\Leftrightarrow u_r(r, z) = A(z) + B \end{aligned}$$

De  $\varepsilon_{rz}=0$ , on tire :

$$B'(r) - \nu r A''(z) = 0$$

soit :

$$A''(z) = cste = \alpha ; \quad B'(r) = \alpha \nu r$$

Des conditions aux limites en effort, on obtient :

$$A(z) = \frac{\rho g z^2}{2E} + \beta ; \quad B(r) = \nu \frac{\rho g r^2}{2E}$$

Enfin,  $\beta$  vérifie :  $\beta = -\nu \rho g \frac{R^2}{2E}$

Ainsi :

$$u_r(r, z) = \frac{-\nu \rho g z r}{E} ; \quad u_z(r, z) = \frac{\rho g}{2E} (z^2 + \nu (r^2 - R^2)) \quad \text{éq 2.1-1}$$

$$\sigma_{zz}(r, z) = \rho g z$$

## Application numérique

$$g = 10 \text{ N/kg}$$

$$\rho = 8.10^{-6} \text{ kg/mm}^3$$

$$R = 20 \text{ mm}$$

$$L = 10 \text{ mm}$$

$$E = 2.10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$h = 1 \text{ mm}$$

- en peau interne : 
$$\begin{cases} u_r(L) = -2.34000 E^{-8} \text{ mm} \\ \sigma_{zz}(L) = 8.0000 E^{-4} \text{ Mpa} \\ u_z(O) = -1.185000 E^{-9} \text{ mm} \end{cases}$$
- en peau externe : 
$$\begin{cases} u_r(L) = -2.46000 E^{-8} \text{ mm} \\ \sigma_{zz}(L) = 8.0000 E^{-4} \text{ Mpa} \\ u_z(O) = 1.215000 E^{-9} \text{ mm} \end{cases}$$

## 15.2.2 Modèle coque axisymétrique

Une traction verticale est exercée en  $z = L$  :

$$F = \rho g h L$$

La pesanteur conduit à une force verticale :

$$f = -\rho g h e_z$$

La condition aux limites sur le cercle d'appui est :  $u_z(z) = 0$  en  $z = 0$

La solution est membranaire, l'équilibre vertical s'écrit :

$$N_{zz,z} = \rho g h$$

De plus :  $N_{\theta\theta} = 0$ . En élasticité, on déduit alors :

$$E_{\theta\theta} = \frac{w}{R} = \frac{-\nu N_{zz}}{Eh} = \frac{-\nu \rho g z}{E}$$

$$E_{zz} = u_{z,z} = \frac{N_{zz}}{Eh} \Rightarrow u_z(z) = \frac{\rho g}{2E} z^2$$

La contrainte axiale est :

$$\sigma_{zz} = \rho g z \quad (\text{constante dans l'épaisseur})$$

**Application numérique :**

$$F = 8.10^{-4} \text{ N.mm}^{-1}$$

$$w(L) = -2.4000.10^{-8} \text{ mm}$$

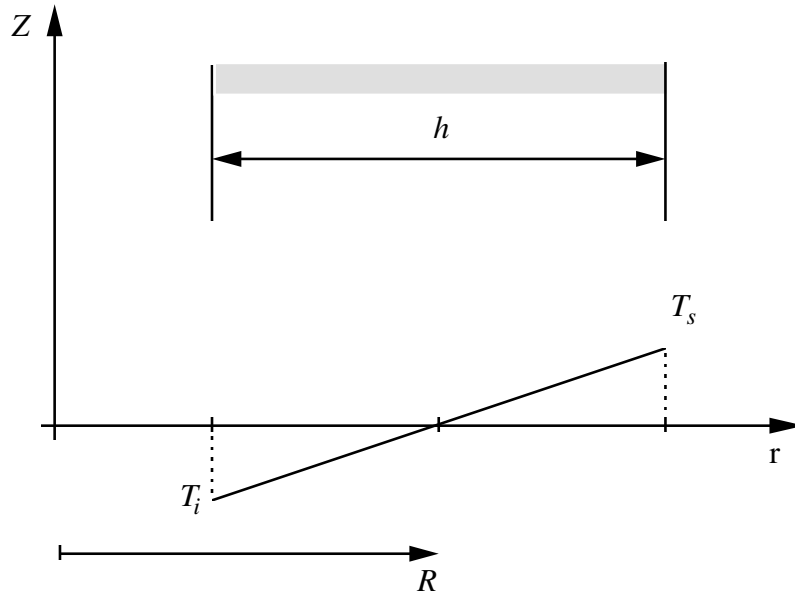
$$N_{zz}(L) = 8.0000.10^{-4} \text{ N.mm}^{-1}$$

$$\sigma_{zz}(L) = 8.0000.10^{-4} \text{ N.mm}^{-1}$$

## 15.3 Chargement thermomécanique

### 15.3.1 Modèle 2D axisymétrique

$$T(r) - T_{réf}(r) = \frac{T_s + T_i}{2} + \frac{(T_s - T_i)}{h}(r - R) \quad \text{éq 3.1.-1}$$



On postule le déplacement sous la forme :

$$u_r = u(r) \quad ; \quad u_z = u_\theta = 0$$

avec les conditions aux limites idoines. Ainsi, les contraintes élastiques s'expriment :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)u' + \nu \frac{u}{r} \right] - \frac{\alpha E}{1-2\nu} (T - T_{réf}) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{u}{r} + \nu u' \right] - \frac{\alpha E}{1-2\nu} (T - T_{réf}) \\ \sigma_{zz} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \frac{u}{r} + u' \right] - \frac{\alpha E}{1-2\nu} (T - T_{réf}) \end{aligned} \quad \text{éq 1.1-3}$$

L'équation d'équilibre radial  $(r, \sigma_{rr})_{,r} - \sigma_{\theta\theta} = 0$  donne :

$$\left( \frac{ru}{r} \right)' = \frac{\alpha(1+\nu')}{(1-\nu)} (T - T_{réf})' \quad \text{éq 3.1-2}$$

D'où la solution générale :

$$u(r) = \frac{\alpha(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{(T_s - T_i)}{h} \frac{r^2}{3} + Ar + \frac{B}{r} \quad \text{éq 3.1-3}$$

Les contraintes sont alors :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r) &= \frac{\alpha E (T_s - T_i)}{h} \left( \frac{R}{1-2\nu} - \frac{r}{3(1-\nu)} \right) - \frac{\alpha E}{1-2\nu} (T_s - T_i) + \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( A - (1-2\nu) \frac{B}{r^2} \right) \\ \sigma_{\theta\theta}(r) &= \frac{\alpha E (T_s - T_i)}{h} \left( \frac{R}{1-2\nu} - \frac{2r}{3(1-\nu)} \right) - \frac{\alpha E}{1-2\nu} (T_s - T_i) + \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( A - (1-2\nu) \frac{B}{r^2} \right) \\ \sigma_{zz}(r) &= \frac{\alpha E (T_s - T_i)}{h} \left( \frac{R}{1-2\nu} - \frac{r}{3(1-\nu)} \right) - \frac{\alpha E}{1-2\nu} (T_s - T_i) + \frac{2\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} A\end{aligned}\quad \text{éq 3.1-4}$$

Les conditions aux limites en efforts sont : en  $r = R \pm \frac{h}{2}$ ,  $\sigma_{rr} = 0$ . On note :  $x = \frac{h}{2R}$ . On obtient grâce à [éq 3.1-4] :

$$B = \frac{\alpha (T_s - T_i)}{6h(1-\nu)} (1+\nu) R^3 (1-x^2)^2$$

puis :

$$A = \alpha (1+\nu) \left[ \frac{-(T_s - T_i) R}{6h(1-\nu)} (3 - (1-2\nu)x^2) + \frac{(T_s + T_i)}{2} \right]$$

## Application numérique :

$$F = 8.10^{-4} \text{ N.mm}^{-1}$$

$$w(L) = -2.4000.10^{-8} \text{ mm}$$

$$N_{zz}(L) = 8.0000.10^{-4} \text{ N.mm}^{-1}$$

$$\sigma_{zz}(L) = 8.0000.10^{-4} \text{ N.mm}^{-1}$$

$$\text{D'où : } A = -0.18569881.10^{-3} \text{ mm}^2$$

$$B = 0.02473096 \text{ mm}^2$$

**Note :**

$$\frac{\alpha(1+\nu)}{1-\nu} \frac{T_s - T_i}{3h} = 0.61904762 \text{ E-5}$$

- en peau interne :  $\begin{cases} u_r = 1.056145 \text{ E}^{-6} \text{ mm} \\ \sigma_{zz} = 1.4321427 \text{ Mpa} \end{cases}$
- en peau externe :  $\begin{cases} u_r = 1.110317 \text{ E}^{-6} \text{ mm} \\ \sigma_{zz} = -1.4250001 \text{ Mpa} \end{cases}$

$$\sigma_{zz} = 1.449319 \text{ Mpa}$$

ou

$$\sigma_{zz} = 1.428671 \text{ Mpa} \text{ ( sans correction métrique )}$$

Dans le cas où l'on prend  $T_s = T_i = 0.1^\circ C$  :

$$A = 0,00130000 \cdot 10^{-3}$$

$$B = 0,0 \text{ mm}^2$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \bullet \text{ en peau interne : } & \begin{cases} u_r = 25.350000 E^{-6} \text{ mm} \\ \sigma_{zz} = -0.200000 \text{ Mpa} \end{cases} \\ \bullet \text{ en peau externe : } & \begin{cases} u_r = 26.650000 E^{-6} \text{ mm} \\ \sigma_{zz} = -0.200000 \text{ Mpa} \end{cases} \end{aligned}$$

## 15.3.2 Modèle coque axisymétrique

Pour le champ de température dans l'épaisseur donné par [éq 3.1-1], on obtient l'expression suivante de la loi de comportement :

$$\begin{aligned} N_{\theta\theta} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (E_{\theta\theta} + \nu E_{zz}) - \frac{\alpha E h}{1-\nu} \left[ \frac{T_s + T_i}{2} + \frac{T_s - T_i}{12} \frac{h}{R} \right] \\ N_{zz} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\nu E_{\theta\theta} + E_{zz}) - \frac{\alpha E h}{1-\nu} \left[ \frac{T_s + T_i}{2} + \frac{T_s - T_i}{12} \frac{h}{R} \right] \end{aligned} \quad \text{éq 3.2-1}$$

et :

$$\begin{aligned} M_{\theta\theta} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (K_{\theta\theta} + \nu K_{zz}) - \frac{\alpha E h^2}{12(1-\nu)} \left[ \frac{T_s + T_i}{2} \frac{h}{R} + T_s - T_i \right] \\ M_{zz} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\nu K_{\theta\theta} + K_{zz}) - \frac{\alpha E h^2}{12(1-\nu)} \left[ \frac{T_s + T_i}{2} \frac{h}{R} + T_s - T_i \right] \end{aligned} \quad \text{éq 3.2-2}$$

D'après ces expressions, les termes thermiques en  $\frac{h}{R}$  sont à négliger si l'on ne considère pas la correction de métrique dans l'épaisseur, c'est-à-dire dans le cas des modèles habituels.

Dans notre situation :

$$\begin{aligned} E_{\theta\theta} &= \frac{w}{R} \\ E_{zz} &= 0 \\ K_{\theta\theta} &= K_{zz} = 0 \end{aligned}$$

L'équilibre normal à la coque s'écrit :

$$N_{\theta\theta} = 0$$

d'où la flèche :

$$w = \alpha (1 + \nu) \left[ \frac{T_s + T_i}{2} + \frac{T_s + T_i}{12} \frac{h}{R} \right] R$$

et :

$$N_{zz} = \alpha E h \left[ \frac{T_s + T_i}{2} + \frac{T_s + T_i}{12} \frac{h}{R} \right]$$

$$M_{zz} = \frac{-\alpha E h^2}{12(1 - \nu)} \left[ (T_s - T_i) + \frac{T_s + T_i}{2} \frac{h}{R} \right]$$

Comme le second membre de dilatation ne tient pas compte de la correction de métrique, les termes en  $h/R$  ci-dessus sont négligés.

## Application numérique

$$R = 20 \text{ mm}$$

$$h = 1 \text{ mm}$$

$$\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$T_s = T_i = 0.5 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\nu = 0.3$$

$$E = 2.10^5 \text{ N/mm}^2$$

D'où :

$$M_{zz} = -0.2380952 \text{ N}$$

$$\sigma_{zz} = 1.449319 \text{ Mpa}$$

• en peau interne :

ou

$$\sigma_{zz} = 1.428671 \text{ Mpa ( sans correction métrique )}$$

Dans le cas où l'on prend  $T_s = T_i = 0,1 \text{ } ^\circ\text{C}$  :

$$w = 26.000000.10^{-6} \text{ mm}$$

$$N_{zz} = -0.2 \text{ N.mm}^{-1}$$

$$M_{zz} = -0.001190476 \text{ N}$$

$$\sigma_{zz} = -0.2122466 \text{ Mpa}$$

• en peau interne :

ou

$$\sigma_{zz} = -0.200000 \text{ Mpa ( sans correction métrique )}$$

\* Les contraintes dans l'épaisseur avec correction de métrique sont données par :

$$\sigma_{zz}(x_3) = \frac{N_{zz} - \frac{M_{zz}}{R}}{h(1 - \frac{h^2}{12R^2})} + (M_{zz} - N_{zz} \frac{h^2}{12R}) \frac{12x_3}{h^3(1 - \frac{h^2}{12R^2})}$$