SSNV232 – Essai triaxial drainé avec la loi de Mohr-Coulomb

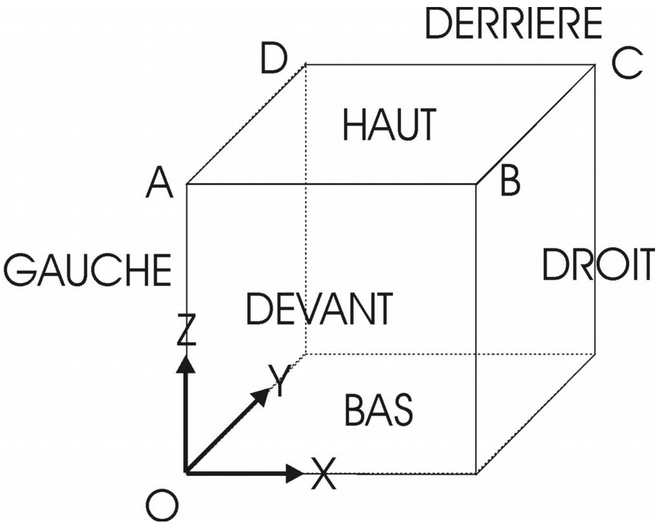
Résumé

On réalise un *calcul triaxial en mécanique pure* (équivalent à des conditions hydrauliques drainées) avec *la loi de Mohr-Coulomb*. Les solutions calculées sont comparées à une solution analytique. Ce test comporte deux modélisations :

- une modélisation sur un point matériel (`SIMU_POINT_MAT`) ;
- une modélisation 3D (`STAT_NON_LINE`) ;

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



L'essai triaxial est effectué sur un seul élément fini isoparamétrique de forme cubique $CUB8$. La longueur de chaque arête vaut 1. Les différentes facettes de ce cube sont des groupes de mailles nommés $HAUT$, BAS, $DEVANT$, $DERRIERE$, $DROIT$ et $GAUCHE$. Le groupe de mailles *SYM* contient par ailleurs les groupes de mailles BAS, $DEVANT$ et $GAUCHE$; le groupe de mailles $COTE$ les groupes de mailles $DERRIERE$ et $DROIT$.

1.2 Propriétés de matériaux

Les propriétés élastiques sont :

- module de compressibilité isotrope : $K=516,2\,MPa$
- module de cisaillement : $\mu=238,2\,MPa$

Les paramètres de la loi de Mohr-Coulomb sont :

- angle de frottement : $\varphi=33\,°$
- angle de dilatance : $\psi=27\,°$
- cohésion : $c_0=1\,kPa$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Un essai triaxial consiste à imposer à l'éprouvette une variation de charge verticale tout en maintenant la pression latérale constante. Il peut être drainé (la pression interstitielle de fluide ne varie pas au cours de l'essai) ou non-drainé (on ferme le robinet : la pression interstitielle de fluide évolue dans l'échantillon). On s'intéresse ici au cas drainé, plus simple, car ne faisant pas intervenir l'influence de la pression interstitielle du fluide et *modélisable de ce fait par un calcul mécanique pur*.
Dans le modèle considéré (cas de la modélisation **B**), l'élément cubique représente un huitième de l'échantillon. Les conditions limites sont donc les suivantes :

- Les conditions de symétrie :
  - $u_z=0$ sur le groupe de maille BAS
  - $u_x=0$ sur le groupe de maille $GAUCHE$
  - $u_y=0$ sur le groupe de maille $DEVANT$
- Les conditions de pression latérale :
  - $P_n=1$ sur le groupe de maille $COTE$
- Les conditions de chargement :

- $P_n=1$ sur le groupe de maille $HAUT$ (phase 1)
- $u_z=-1$ sur le groupe de maille $HAUT$ (phase 2)

Le chargement s'effectue en deux phases :

- Initialisation. Chargement isotrope entre $t\in[-2;0]\,secondes$:

la pression p sur les groupes de mailles $COTE$ et $HAUT$ varie de 0 à $p=P_0=50\,kPa$, la pression de préconsolidation isotrope à l'état intial ;

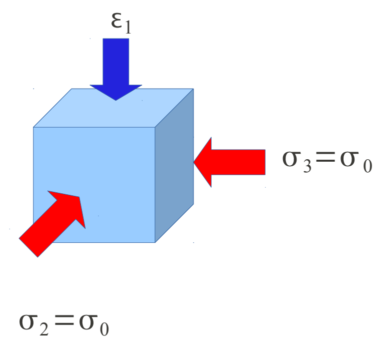
- test triaxial proprement dit :

déplacement imposé sur le groupe de mailles $HAUT$ avec t variant entre $t\in[0-30]\,secondes$ et u_z variant entre $u_z\in[0;-0{,}3]\,mm$. La déformation verticale ε_{zz} totale est de $0{,}03\,\%$;

1.4 Solution analytique

Les chargements appliqués appliqués sur l'échantillon cubique sont représentés ci-dessous :

- $\varepsilon_1=F(t)$
- $\sigma_2=\sigma_3=\sigma_0$



Le comportement de l'échantillon est régi par la loi de Mohr-Coulomb, qui s'exprime comme suit :

$$\begin{cases} f(\sigma_1,\sigma_3)=|\sigma_1-\sigma_3|+(\sigma_1+\sigma_3)\sin\phi-2c_0\cos\phi\leq 0 \\ \sigma_1\geq\sigma_2=\sigma_3 \end{cases} \quad \textbf{(1.4-1)}$$

Tableau 1.4-1

Elle est associée au potentiel d'écoulement plastique :

$$g(\sigma_1,\sigma_3)=|\sigma_1-\sigma_3|+(\sigma_1+\sigma_3)\sin\psi-2c_0\cos\psi \quad \textbf{(1.4-2)}$$

de sorte que, en notant $t=\sin\psi$ et $\xi=signe(\sigma_1-\sigma_3)$, la loi d'écoulement s'écrit :

$$\begin{cases} f(\sigma_1,\sigma_3)\geq 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial\sigma_1}=\dot{\varepsilon}_1^p=\dot{\lambda}(t+\xi) \\ \dfrac{\partial g}{\partial\sigma_2}=\dot{\varepsilon}_2^p=\dot{\varepsilon}_3^p=\dot{\lambda}(t-\xi) \end{cases} \quad \textbf{(1.4-3)}$$

où $\dot{\lambda}$ représente le multiplicateur plastique.

Les deux inconnues du problème sont donc : σ_1 (ou ε_3) et $\dot{\lambda}$.

1.4.1 Résolution en régime élastique

L'équation **1.4-1** est satisfaite. On a alors :

$$\boxed{\begin{cases}\sigma_1=\overbrace{\left(K+\frac{4}{3}G\right)}^{E}\varepsilon_1^e+2\left(K-\frac{2}{3}G\right)\varepsilon_3^e\\ \sigma_3=\left(K-\frac{2}{3}G\right)\varepsilon_1^e+\left(K-\frac{2}{3}G\right)\varepsilon_3^e+\left(K+\frac{4}{3}G\right)\varepsilon_3^e\\ \quad=\underbrace{\left(K-\frac{2}{3}G\right)}_{C}\varepsilon_1^e+2\underbrace{\left(K+\frac{G}{3}\right)}_{D}\varepsilon_3^e\end{cases}} \quad \textbf{(1.4.1-1)}$$

Sachant que $\sigma_3=\sigma_0$, on déduit directement de **1.4.1-1** que :

$$\boxed{\dot{\varepsilon}_3^e=-\frac{C}{D}\dot{\varepsilon}_1^e} \quad \textbf{(1.4.1-2)}$$

1.4.2 Résolution en régime plastique

L'équation **1.4-3** est satisfaite.

Soit $\sigma^p=\sigma^e$ la prédiction élastique donnée par les équations **1.4.1-1**, la contrainte finale σ^+ s'écrit :

$$\boxed{\sigma^+=\mathbb{C}.\varepsilon^+=\sigma^p-\dot{\lambda}\,\mathbb{C}.\vec{n}_g} \quad \textbf{(1.4.2-1)}$$

où $\mathbb{C}=\begin{bmatrix}E & 2C\\ C & D\end{bmatrix}$ représente le tenseur d'élasticité linéaire et $\vec{n}_g=(t+\xi,\ \ t-\xi)$.

On calcule le multiplicateur plastique en écrivant $f(\sigma^+)=0$, soit :

$$(s+\xi)\left(K+\frac{4}{3}G\right)\varepsilon_1^++2(s+\xi)\left(K-\frac{2}{3}G\right)\varepsilon_3^+\ +$$
$$(s-\xi)\left(K-\frac{2}{3}G\right)\varepsilon_1^++2(s-\xi)\left(K+\frac{G}{3}\right)\varepsilon_3^+\quad=2c_0\cos\phi$$

$$\Leftrightarrow\underbrace{2\left(Ks+G\left(\xi+\frac{s}{3}\right)\right)}_{A}\varepsilon_1^++\underbrace{2\left(2Ks-G\left(\xi+\frac{s}{3}\right)\right)}_{B}\varepsilon_3^+=2c_0\cos\phi \quad \textbf{(1.4.2-2)}$$

ce qui donne, en remplaçant :

$$\boxed{\begin{cases}\varepsilon_1^+=\varepsilon_1^e-\dot{\lambda}(t+\xi)\\ \varepsilon_3^+=\varepsilon_3^e-\dot{\lambda}(t-\xi)\end{cases}} \textbf{(1.4.2-3)}$$

dans **1.4.2-2**, on obtient :

$$\dot{\lambda}\underbrace{\left[A(t+\xi)+B(t-\xi)\right]}_{BB}=-2c_0\cos\phi+A\varepsilon_1^e+B\varepsilon_3^e=f(\sigma^e)$$, soit :

$$\boxed{\dot{\lambda}=\frac{f\left(\sigma^e\right)}{BB}}$$ **(1.4.2-4)**

1.4.3 Correction du déséquilibre

On doit vérifier $\sigma_3^+=\sigma_0$.
On suppose une petite variation virtuelle δ de la solution. On cherche l'expression de $\delta\sigma_3^+$, soit :

$$\delta\sigma_3^+=C\,\delta\varepsilon_1^e+E\,\delta\varepsilon_3^e-\delta\dot{\lambda}\,C\left(t+\xi\right)-\delta\dot{\lambda}\,E\left(t-\xi\right)$$ **(1.4.3-1)**

Sachant que $\dot{\lambda}$ est donné par **1.4.2-4**, on a :

$$\delta\dot{\lambda}=\frac{A}{BB}\delta\varepsilon_1^e+\frac{B}{BB}\delta\varepsilon_3^e$$ **(1.4.3-2)**

que l'on reporte dans **1.4.3-1**. Cela donne alors :

$$\delta\sigma_3^+=\left[C-A\frac{C\left(t+\xi\right)+E\left(t-\xi\right)}{BB}\right]\delta\varepsilon_1^e+\left[D-B\frac{C\left(t+\xi\right)+E\left(t-\xi\right)}{BB}\right]\delta\varepsilon_3^e$$ **(1.4.3-3)**

Au cours du processus de Newton, on recherche une nouvelle valeur de $\delta\varepsilon_3$ sachant que $\delta\varepsilon_1=0$ (c'est le chargement imposé, qui ne peut pas être faux). Cette valeur est telle que le déséquilibre $\sigma_0-\sigma_3^+$ soit corrigé, soit :

$$\frac{\partial\sigma_3^+}{\partial\varepsilon_3}\delta\varepsilon_3=\sigma_0-\sigma_3^+$$

soit, en utilisant **1.4.3-3** :

$$\boxed{\delta\varepsilon_3=\frac{\sigma_0-\sigma_3^+}{D-B\dfrac{C\left(t+\xi\right)+E\left(t-\xi\right)}{BB}}}$$ **(1.4.3-4)**

1.4.4 Processus de résolution de Newton

Le processus de résolution s'écrit comme suit :

Au pas de temps t tel que $\varepsilon_1=F\left(t\right)$:

1 Calculer σ_1^p et σ_3^p à l'aide de **1.4.2-2** et **1.4.2-1**

2 Tant que $\left|\sigma_0-\sigma_3^+\right|>\epsilon$, effectuer :

| **3** Si $f\left(\sigma_1^p,\sigma_3^p\right)<0$, alors **OK**.
$\sigma_1^+=\sigma_1^p$ et $\sigma_3^+=\sigma_3^p$ et aller à **5**

| **4** Si $f\left(\sigma_1^p,\sigma_3^p\right)\geq 0$, alors **NOOK** :
Calculer $\dot{\lambda}$ à l'aide de **1.4.2-4**

	Calculer ε_1^+ et ε_3^+ à l'aide de **1.4.2-3** Calculer σ_1^+ et σ_3^+ à l'aide de **1.4.1-1**
5	Calculer $\delta\varepsilon_3$ à l'aide de **1.4.2-4** Mettre à jour ε_3^+ , σ_1^+ et σ_3^+ et aller à **2**

Tableau 1.4.4-1 : Procédure de résolution pour le test triaxial avec la loi de Mohr-Coulomb.

Le calcul de la solution analytique est appelé par la fonction `Triaxial_DR` contenue dans le fichier `bibpyt/Contrib/essai_triaxial.py` .

1.4.5 Matrice tangente cohérente

A des fins de vérifications, il est possible d'exhiber la matrice tangente cohérente du problème.
En complément à l'équation 1.4.3-3, on obtient également pour $\delta\sigma_1^+$ l'expression suivante :

$$\delta\sigma_1^+=\left[E-A\frac{E(t+\xi)+C(t-\xi)}{BB}\right]\delta\varepsilon_1^e+\left[C-B\frac{E(t+\xi)+C(t-\xi)}{BB}\right]\delta\varepsilon_3^e \quad \textbf{(1.4.5-1)}$$

L'expression de la matrice tangente cohérente $DSDE$ s'écrit donc :

$$DSDE=\begin{bmatrix} E-A\dfrac{E(t+\xi)+C(t-\xi)}{BB} & C-B\dfrac{E(t+\xi)+C(t-\xi)}{BB} \\ C-A\dfrac{C(t+\xi)+E(t-\xi)}{BB} & E-B\dfrac{C(t+\xi)+E(t-\xi)}{BB} \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.4.5-2)}$$

1.5 Résultats

Les solutions sont post-traitées au point C pour les termes de contraintes verticale σ_{zz} et horizontale σ_{xx}, ainsi que ceux de déformation volumique plastique ε_v^p et de déformation déviatorique plastique $|\varepsilon_d^p|=\sqrt{\frac{3}{2}\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon_v^p}{3}I\right):\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon_v^p}{3}I\right)}$.

2 Modélisation A

2.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation **A** est effectuée sur un point matériel, à l'aide de `SIMU_POINT_MAT`.

Le pas de temps est de $\Delta t=0,1\,sec$, soit 300 incréments temporels.

Une légère dissymétrie de $\epsilon=10^{-6}$ est introduite sur le chargement horizontal afin d'éviter une singularité trop marquée de la matrice tangente lors de l'entrée en plasticité :

$$\begin{cases}\sigma_{xx}=\sigma_0\\ \sigma_{yy}=\sigma_0\left(1+10^{-6}\right)\end{cases}$$

2.2 Grandeurs testées et résultats

2.2.1 Valeurs testées

Les solutions sont calculées au point C et comparées à la solution analytique à l'instant final $t=30\,sec$. Elles sont données en termes de contraintes verticale σ_{zz} et horizontale σ_{xx} , de déformation volumique plastique ε_v^p et de déformation déviatorique plastique $|\varepsilon_d^p|=\sqrt{\frac{3}{2}\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon_v^p}{3}I\right):\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon_v^p}{3}I\right)}$, et récapitulées dans le tableau suivant :

$t=30\,sec$	Solution analytique	Erreur relative admissible [%]
σ_{zz}	$-1{,}732895416041E+5$	1,E-1
σ_{xx}	50000.	1,E-1
ε_v^p	1,6784502547224E-4	1,E-1
$\lvert\varepsilon_d^p\rvert$	3,3099447556585E-4	1,E-1

Tableau 2.2.1-1 : Validation des résultats pour la modélisation A

2.2.2 Commentaires

L'écart à la solution analytique est très faible (inférieur à $10^{-3}\%$).

3 Modélisation B

3.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation **B** est effectuée en 3D, à l'aide de `STAT_NON_LINE`.

Le pas de temps est de $\Delta t=0,1\,sec$, soit 300 incréments temporels. Le redécoupage automatique du pas de temps est activé.

Une légère dissymétrie de $\epsilon=10^{-3}$ est introduite sur le chargement horizontal afin d'éviter une singularité trop marquée de la matrice tangente lors de l'entrée en plasticité :

$$\begin{cases}\sigma_{xx}=\sigma_0\\ \sigma_{yy}=\sigma_0\left(1+10^{-3}\right)\end{cases}$$

3.2 Grandeurs testées et résultats

3.2.1 Valeurs testées

Les solutions sont calculées au point C et comparées à la solution analytique à l'instant final $t=30\,sec$. Elles sont données en termes de contraintes verticale σ_{zz} et horizontale σ_{xx} , de déformation volumique plastique ε_v^p et de déformation déviatorique plastique $|\varepsilon_d^p|=\sqrt{\frac{3}{2}\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon_v^p}{3}I\right):\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon_v^p}{3}I\right)}$, et récapitulées dans le tableau suivant :

$t=30\,sec$	Solution analytique	Erreur relative admissible [%]
σ_{zz}	$-1,732895416041E+5$	1,E-1
σ_{xx}	50000.	1,E-1
ε_v^p	1,6784502547224E-4	1,E-1
$\lvert\varepsilon_d^p\rvert$	3,3099447556585E-4	1,E-1

Tableau 3.2.1-1 : Validation des résultats pour la modélisation B

3.2.2 Commentaires

L’écart à la solution de référence est très faible (inférieur à $10^{-5}\%$).