

FORMA04 - Travaux pratiques de la formation « Utilisation avancée » : contact de Hertz

Résumé :

Ce TP traite du contact de Hertz, un des rares cas non triviaux de contact pour lequel on dispose d'une solution analytique.

Le modèle est constitué de deux demi-sphères que l'on vient mettre en contact l'une contre l'autre.

Ce test simple permettra d'illustrer la mise en données du contact, les différentes manières de résoudre le problème et enfin les outils à disposition pour post-traiter un calcul de contact.

Table des matières

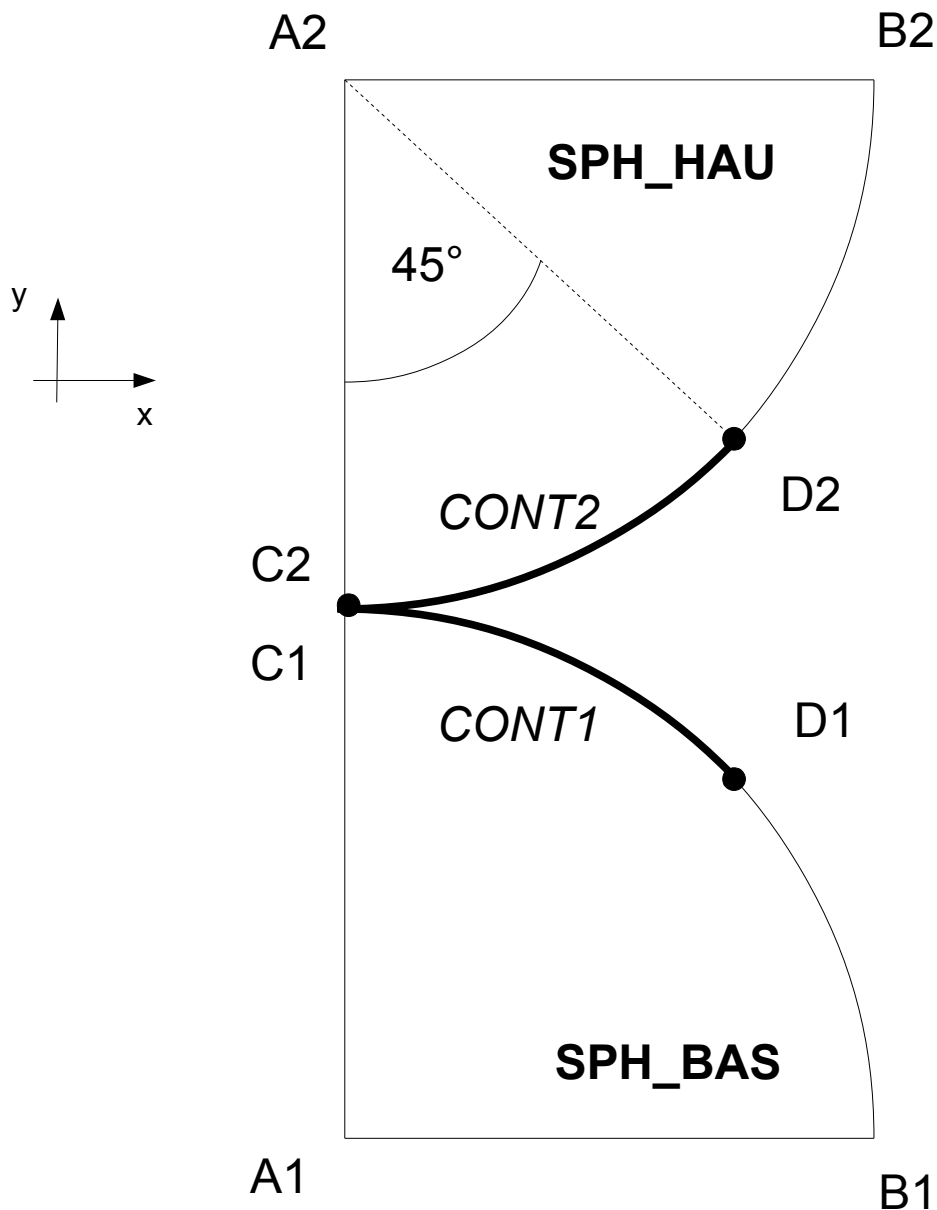
1	Problème de référence.....	3
1.1	Géométrie.....	3
1.2	Propriétés des matériaux.....	3
1.3	Conditions aux limites et chargements.....	4
2	Solution de référence.....	5
2.1	Méthode de calcul.....	5
2.2	Grandeurs et résultats de référence.....	5
2.3	Incertitudes sur la solution.....	5
2.4	Références.....	5
3	Modélisation A.....	6
3.1	Mise en œuvre du TP.....	6
3.1.1	Géométrie.....	6
	Bien lire l'énoncé en entier avant de commencer.....	6
3.1.2	Maillage.....	6
3.1.3	Fichier de commandes.....	7
3.1.4	Pression de Hertz.....	8
3.1.5	Contrainte de Von Mises.....	8
3.2	Grandeurs testées et résultats.....	9
4	Modélisation B.....	10
4.1	Mise en œuvre du TP.....	10
4.1.1	Formulation continue.....	10
4.2	Grandeurs testées et résultats.....	10
5	Modélisation C.....	11
5.1	Mise en œuvre du TP.....	11
5.1.1	Réalisation de la géométrie.....	11
5.1.2	Réalisation du maillage.....	11
5.2	Grandeurs testées et résultats.....	12

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

Le modèle est constitué de deux demi-sphères. On choisit de traiter le problème en **axisymétrique**, on ne modélisera donc que des quarts de disque. Les données géométriques sont les suivantes :

- Rayon des sphères : $R = 50 \text{ mm}$



1.2 Propriétés des matériaux

Le matériau est élastique linéaire :

- Module d'Young : $E = 20000 \text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson : $\nu = 0.3$

1.3 Conditions aux limites et chargements

- Déplacement suivant DX bloqué sur l'axe $A1A2$ (cette condition est implicite en axisymétrique, on l'impose néanmoins pour les points qui ne seraient pas parfaitement sur l'axe)
- Déplacement suivant DY imposé :
 - +2 mm sur $A1B1$
 - 2 mm sur $A2B2$

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

En 1881, Hertz a établi sous certaines hypothèses une solution au problème qui porte son nom[1]. Ainsi en supposant un contact sans frottement et pour lequel la demi-largeur de contact a est très petite devant le rayon des sphères R ($a \ll R$), la pression de contact aux points $C1$ et $C2$ vaut [2] :

$$P_0 = -\frac{E}{\pi(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2h}{R}} \quad \text{éq 2.1-1}$$

où h correspond à l'écrasement imposé, qui vaut ici 4 mm .

La demi-largeur de contact a s'exprime en fonction de l'écrasement imposé et du rayon des sphères :

$$a = \sqrt{\frac{Rh}{2}} \quad \text{éq 2.1-2}$$

La surface de contact est un disque de rayon a , la distribution de pression en fonction du rayon r dans cette zone est la suivante :

$$\text{Si } r \leq a \text{ alors } P(r) = P_0 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} \quad \text{éq 2.1-3}$$

2.2 Grandeurs et résultats de référence

On comparera la pression obtenue au centre de la zone de contact et la demi-largeur de contact à la solution analytique ci-dessus.

2.3 Incertitudes sur la solution

Aucune (sous les hypothèses données ci-dessus).

2.4 Références

Table des Matières

1: HERTZ H, Über die Berührung fester elastischer Körper, 1881

2: DUMONT G, La méthode des contraintes actives appliquée au contact unilatéral, 1993

3 Modélisation A

3.1 Mise en œuvre du TP

3.1.1 Géométrie

Bien lire l'énoncé en entier avant de commencer

La géométrie est réalisée avec la plate-forme Salome-Meca, module Geometry.

L'outil « Sketcher » (Menu `New Entity` → `Basic` → `2D Sketch`) permet de construire le contour du disque supérieur : $A2$, $B2$, $D2$ et $C2$. L'arc de cercle est fait en 2 fois afin que Le point $D2$ soit créé lors de la construction du contour. Pour $B2D2$, on donne le rayon à 50 et angle à -45° en utilisant `Direction` et `Perpendicular`, et pour $D2C2$, on donne le rayon à -50 et angle à 45° en utilisant `Direction` et `Tangent`.

On peut ensuite construire une face à partir de ce contour (Menu `New Entity` → `Build` → `Face`).

Par symétrie, on peut générer la deuxième sphère (Menu `Operations` → `Transformation` → `Mirror Image`) en choisissant l'axe X pour réaliser la symétrie.

Il rest e à assembler les deux sphères p our ne constituer qu'un seul objet GEOM (Menu `New Entity` → `Build` → `Compound`). Attention : Dans cet objet, il y a toujours deux points, $C1$ et $C2$, qui superposent. Au contraire, les deux points se fusionnent si l'opération est `Partition`,

Enfin il faut créer des groupes sur cette géométrie (avec les noms suggérés dans la figure ci-dessus) (Menu `New Entity` → `Group` → `Create Group`). On attire l'attention sur le fait que les groupes sont créés en dernier.

- Créer les groupes pour les surfaces des demi-sphères $SPHHAU$ et $SPHBAS$
- Afin de créer d es groupes pour les point superposés $C1$ et $C2$, on utilise la fonctionnalité permettant de sélectionner un sous élément d'une entité GEOM : cocher « *Only Sub-shapes of the Second Shape* », puis pour $C2$ par exemple, sélectionner comme « *Second Shape* » la demi-sphère supérieure dans l'arbre des objets, et seulement s es points sont soulignés.
- Créer les groupes pour l'application des conditions aux limites : le long d e l'axe d'axisymétrie ($A1A2$) et sur les parties supérieures et inférieures des demi-sphères ($A1B1$ et $A2B2$).
- Pour la modélisation du contact, on aura besoin de groupes de mailles représentant les surfaces potentielles de contact : créer les groupes $CONT1$ et $CONT2$.

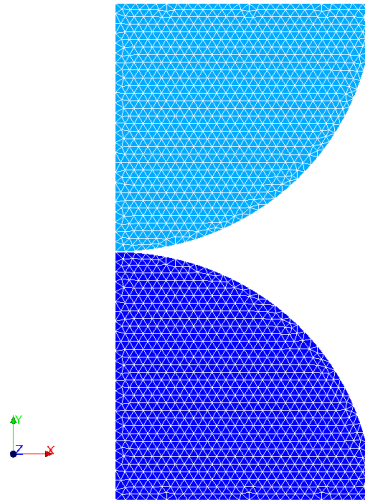
3.1.2 Maillage

On utilise le module Mesh. Le maillage est défini par le menu `Mesh` → `Create Mesh` avec la géométrie à mailler. Le maillage sera réalisé en triangles, et on utilisera les hypothèses de maillage automatique « `Assign a set of hypotheses` → `2D: Automatic Triangulation` » en choisissant une longueur maximum de 2mm.

On calcule le maillage (Menu `Mesh` → `Compute`). On obtient alors un maillage contenant environ 3000 triangles et 1500 nœuds.

On importera ensuite les groupes à partir de la géométrie (Menu `Mesh` → `Create Groups from Geometry`).

On importera le maillage au format MED.



**Illustration 3.1: Maillage
obtenu pour la modélisation A**

3.1.3 Fichier de commandes

On utilise le module `AsterStudy`. Puis en colonne gauche, cliquer sur l'onglet `Case View`.

On définit le fichier de commandes du cas de calcul. (cliquer à droite à `CurrentCase` et choisir `Add Stage`).

Nota : Pour ajouter des commandes : Menu `Commands` → `Show All`.

En utilisant la commande `STAT_NON_LINE`, construire le fichier de commandes relatif au cas-test en ne prenant pas le contact en compte dans un premier temps.

- Que constate-t-on sur la convergence ? Que faudrait-il faire pour converger ?
| *Indice : comment le critère de convergence par défaut est-il construit ?*

Aide pour co nstruire le fichier de commandes :

- Lire le maillage au format MED : Commande `LIRE_MALLAGE`.
- Définir le matériau : Commande `DEFI_MATERIAU`.
- Affecter le matériau à tous les éléments : Commande `AFFE_MATERIAU`.
- Définir les éléments finis utilisés : Commande `AFFE_MODELE` pour affecter le phénomène `MECANIQUE` et la modélisation `AXIS`.
- Affecter les conditions aux limites / chargements mécaniques : `AFFE_CHAR_MECA` / `DDL_IMPO` pour la symétrie axiale et les déplacements imposés unitaires que l'on multipliera ensuite par une fonction rampe avec le temps.
- D éfinir la rampe de chargement (déplacement imposé) avec la commande `DEFI_FONCTION`. Par exemple, la fonction varie entre $(0., 0.)$ et $(2., 2.)$.
- Créer la discrétisation temporelle à l'aide des commandes `DEFI_LIST_REEL`. Par exemple, 20 pas de 0s à 2s.
- Résoudre le problème avec la c ommande `STAT_NON_LINE`. On met `COMPORTEMENT / RELATION= ' ELAS '`, la liste d'instant définie précédemment dans `INCREMENT`, les matériaux dans `CHAM_MATER`, `MODELE` et également les conditions aux limites et le chargement (`CHARGE + FONC_MULT`) dans `EXCIT`.

Question bonus : combien y-a-t-il de mouvements de corps rigide en modélisation axisymétrique ?

| *Rappel : un mouvement de corps rigide est un mouvement à déformation nulle.*

Ajouter la définition du contact : orienter les surfaces, définir la charge de contact avec la commande `DEFI_CONTACT` et adapter les options du solveur non linéaire.

Une alarme apparaît lors du calcul avec contact. On conservera la méthode de contact par défaut dans un premier temps (*FORMULATION='DISCRETE' et 'ALGO_CONT='CONTRAINTE'*).

- Orienter la normale du maillage sur les contacts : Commande `MODI_MALLAGE / ORIE_PEAU_2D` en utilisant les groupes `CONT1` et `CONT2`. On garde le même nom du maillage en utilisant `reuse`.
- Définir le contact : Commande `DEFI_CONTACT`. On conservera la méthode de contact par défaut dans un premier temps (*FORMULATION='DISCRETE' et 'ALGO_CONT='CONTRAINTE'*). On affecte les groupes `CONT1` et `CONT2` au couple des zones de contact (maître et esclave).
- Adapter l'option de contact dans `STAT_NON_LINE`.

3.1.4 Pression de Hertz

Application numérique : calculer à la main avec les données du problème, la valeur de la pression de Hertz et de la demi-largeur de contact (voir le chapitre 2). Les comparer aux valeurs obtenues par le calcul.

Que constate-t-on ? Pourquoi cet écart ?

Remarque : on prendra en première approximation la composante $SIYY$ du champ `SIEF_NOEU` (calculé avec la commande `CALC_CHAMP / CONTRAINTE`) comme pression de contact

Tracer la pression de contact en fonction du rayon dans la zone de contact, la comparer à la solution analytique.

- Calculer le champ des contraintes par éléments aux nœuds (`SIEF_NOEU`) : commande `CALC_CHAMP / CONTRAINTE`.
- Créer un groupe de nœuds avec une abscisse curviligne orientée : commande `DEFI_GROUP`. On gardera le même nom de maillage avec `reuse`. On utilisera l'option `CREA_GROUP_NO / OPTION='NOEUD_ORDO'` en donnant le groupe de maille (`CONT1`) et le point de départ (`C1`).
- Extraire dans une table la composante $SIYY$ du champ `SIEF_NOEU` au dernier instant : commande `POST_RELEVE_T`. On précisera le nom du groupe des nœuds, le instant, le champ et sa composante en utilisant l'opération `EXTRACTION`.
- Créer la fonction $\sigma_{yy} = f(x)$: commande `RECU_FONCTION`. On définira l'abscisse curviligne (`ABSC_CURV`) comme `PARA_X` et $SIYY$ comme `PARA_Y`.
- Construire la solution analytique :
 - Calculer la pression aux points `C1` et `C2`, P_0 et la demi-largeur de contact a
 - Créer la formule analytique : commande `FORMULE`. Elle dépend de la coordonnée curviligne x (`NOM_PARA='x' / VALE='P0*sqrt(1.-x*x/a/a)'`).
 - Créer une liste de s valeurs réelles de x : Commande `DEFI_LIST_REEL`. Par exemple, 100 valeurs de 0 à 10mm.
 - Interpolation de la formule à partir de la liste de x : commande `CALC_FONC_INTERP`.
- Imprimer les deux fonctions au format `XMGRACE` par la commande `IMPR_FONCTION`.

3.1.5 Contrainte de Von Mises

Afficher la contrainte de Von Mises sur la configuration déformée avec Salomé. **Comment varie cette contrainte dans la sphère ? Où se situe le maximum ?**

On affichera la composante `VMIS_SG` du champ des contraintes équivalentes `SIEQ_NOEU` calculé avec la commande `CALC_CHAMP / CRITERES`.

On peut imprimer les résultats au format *MED* à l'aide de commande *IMPR_RESU* afin de visualiser le champ des contraintes dans *Results* ou dans *Paravis* et la position du maximum (menu *Edit* → *Find Data*).

3.2 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
σ_{yy} point <i>CI</i>	'ANALYTIQUE '	$-2798,3 \text{ Mpa}$	1,0%

4 Modélisation B

On repartira de la modélisation A. Le maillage est le même que celui de la modélisation A **mais il est passé en quadratique**.

4.1 Mise en œuvre du TP

4.1.1 Formulation continue

Convertir le maillage de la modélisation A en maillage quadratique dans le module Mesh (Menu Modification → Convert to/from quadratic)

Afin de profiter pleinement des éléments quadratiques et d'obtenir un profil de pression lisse, il est important de placer les nœuds milieux sur la géométrie lors de la conversion (cocher pour cela la case « Medium nodes on geometry » lors de la conversion).

Changer de méthode de contact et utiliser la formulation 'CONTINUE'. **Observer la pression de contact obtenue à l'aide du degré de liberté LAGS_C du champ DEPL.** Comparer avec la méthode de contact par défaut. Que constate-t-on ? Laquelle des méthodes fournit la meilleure approximation ?

Pour obtenir un profil de pression correct, il faut utiliser un schéma d'intégration des termes de contact aux points de Gauss (INTEGRATION='GAUSS' dans la commande DEFI_CONTACT / ZONE).

Afin de supprimer l'alarme qui apparaît avec les réglages par défaut, il est nécessaire d'imposer REAC_ITER=1 sous le mot-clé facteur NEWTON de la commande STAT_NON_LINE (en formulation continue, la matrice tangente est forcément reconstruite à chaque itération).

4.2 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
DEPL LAGS _C point CI	'ANALYTIQUE'	−2798,3 Mpa	3,0%

5 Modélisation C

Dans cette modélisation, on réalise un maillage en quadrangles, avec un raffinement à proximité de la zone de contact.

5.1 Mise en œuvre du TP

5.1.1 Réalisation de la géométrie

Dans cette modélisation, on doit partitionner la géométrie de manière à pouvoir la mailler en quadrangles.

Dans le module GEOM, une illustration de la partition possible est donnée dans la figure 5.1 :

- Prendre la face *SPHHAU* et expliciter tous ses points (menu *New Entity* → *Explode* : *Vertex*), puis on obtient les 4 points *A2*, *B2*, *C2* et *D2*
- Créer les points *M*, *N* et *P* afin de générer les lignes de partition en rouge (menu *New Entity* → *Basic* → *Point*): $(0,25,0)$, $(25,25,0)$ et $(25,50,0)$
- Générer les lignes de partition (menu *New Entity* → *Basic* → *Line*)
- Partitionner *SPHHAU* avec les lignes ci-dessus (Menu *Operations* → *Partition*).
- Par symétrie, on peut générer une nouvelle face inférieure (Menu *Operations* → *Transformation* → *Mirror Image*) en choisissant l'axe *X* pour réaliser la symétrie
- Il reste à assembler les deux nouvelles sphères pour ne constituer qu'un seul objet GEOM (Menu *New Entity* → *Build* → *Compound*).
- Définir tous les groupes comme dans la modélisation A, dont on aura besoin pour affecter les conditions aux limites et les chargements (menu *New Entity* → *Groupe* → *Create Groupe*)

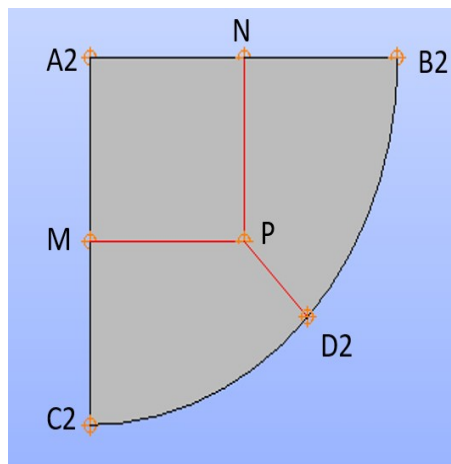


Illustration 5.1: Partition du disque supérieur

5.1.2 Réalisation du maillage

Pour le maillage, on choisit de raffiner autour de la zone de contact en utilisant une progression géométrique sur la circonférence et sur le rayon. Il peut être nécessaire de réorienter certains segments dans le module Mesh :

- Le maillage est défini par le menu *Mesh* → *Create Mesh* avec la géométrie à mailler. Le maillage sera réalisé en triangles, et on utilisera les hypothèses de maillage automatique « *Assign a set of hypotheses* → *2D: Automatic Quadrangulation* » en choisissant le nombre des segments 15. On calcule le maillage (Menu *Mesh* → *Compute*).

- On définit le sous-maillage (Menu Mesh → Creat Sub-mesh) avec les groupes *CONT 1* et *CONT 2* . Il est réalisé à l'aide de l'algorithme Wire Discretisation, l'hypothèse Start and End Length (par exemple, 0.2mm et 2.0mm) et l'hypothèse avancée Propagation of Node Distribution on Opposite Edges. On obtient alors un maillage linéaire contenant environ 3500 quadrangles et 4000 nœuds.
- Passer le maillage de linéaire à quadratique : « Modification → Convert to/from quadratic ».
- On importera ensuite les groupes à partir de la géométrie (Menu Mesh → Create Groups from Geometry).

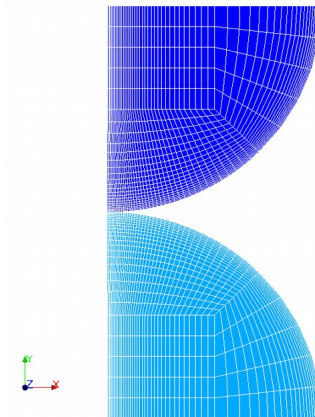


Illustration 5.2: Maillage en quadrangles obtenu pour la modélisation C

5.2 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
σ_{yy} point <i>CI</i>	'ANALYTIQUE'	-2798,3 Mpa	5,0%