

SSNV221 – Essai hydrostatique avec un comportement DRUCK_PRAGER linéaire et parabolique

Résumé :

Le cas test propose un chargement purement hydrostatique pour la loi Drucker-Prager associée [R7.01.16]. La formulation de cette loi plastique, souvent utilisée pour les sols, est faite à la fois sur la partie déviatorique et hydrostatique ; néanmoins, la surface critère présente une singularité pour un état de contrainte purement hydrostatique. Ce cas-test analytique sert à vérifier l'écrouissage correct en cette singularité.

Le test est effectué sur un point matériel avec la commande `SIMU_POINT_MAT`. On travaille à déformations imposées.

On fait un test avec écrouissage linéaire (modélisation A) et un autre avec écrouissage parabolique (modélisation B).

1 Problème de référence

1.1 Propriétés du matériau

Élastiques :

$E = 3000 \text{ MPa}$ Module d'Young
 $\nu = 0,25$ Coefficient de Poisson

DRUCK_PRAGER linéaire (modélisation A) :

$\alpha = 0,20$ Coefficient de dépendance en pression
 $p_{ultm} = 0,04$ Déformation plastique cumulée ultime
 $\sigma_Y = 6 \text{ MPa}$ Contrainte plastique
 $h = 100 \text{ MPa}$ Module d'écrouissage

DRUCK_PRAGER parabolique (modélisation B) :

$\alpha = 0,20$ Coefficient de dépendance en pression
 $p_{ultm} = 0,04$ Déformation plastique cumulée ultime
 $\sigma_Y = 6 \text{ MPa}$ Contrainte plastique
 $\sigma_Y^{ult} = 10 \text{ MPa}$ Contrainte plastique ultime

1.2 Chargements et conditions aux limites

On impose une déformation volumique $\varepsilon_v = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$. Le chargement n'est pas monotone : on charge d'abord jusqu'à la déformation volumique ε_{v1} , en dépassant le seuil de plastification, puis on décharge à un niveau de déformation nul ; ensuite on charge encore à la déformation ε_{v2} en dépassant ainsi la déformation plastique cumulée ultime p_{ultm} , au delà de laquelle on retrouve une plasticité parfaite ; on décharge encore à contrainte nulle (déformation égale à la déformation plastique ε_{v2}^p) et on recharge en plastifiant ultérieurement jusqu'à la déformation ε_{v3} . Le temps de chargement (voir Tableau 1.2-1) est fictif car les lois plastiques sont indépendantes du temps.

t	ε_v
0	0
10	$\varepsilon_{v1} = 0,018$
14	0
26	$\varepsilon_{v2} = 0,045$
30	$\varepsilon_{v2}^p = 0,03667$
40	$\varepsilon_{v3} = 0,06$

Tableau 1.2-1: déformation volumique imposée.

1.3 Conditions initiales

Toutes les composantes des contraintes et déformations sont nulles au début du chargement.

2 Solution de référence

La modélisation vérifie le comportement de la loi à écrouissage linéaire.

2.1 Méthode de calcul

Les équations qui nous intéressent pour le calcul analytique sont ($I_1 = \text{tr}(\sigma)$: trace du tenseur des contraintes, ε_v^p : déformation plastique volumique) :

- loi constitutive plastique sur la partie volumique :

$$I_1 = 3K(\varepsilon_v - \varepsilon_v^p) \quad (\text{éq 2.1-1})$$

- surface critère, en posant nulle la contrainte de Von Mises ($\sigma_{eq} = 0$) :

$$F(\sigma, p) = \alpha I_1 - R(p) \quad (\text{éq 2.1-2})$$

- relation entre la déformation plastique volumique et la déformation plastique cumulée (variable interne de la loi plastique) :

$$\dot{\varepsilon}_v^p = 3\alpha \dot{p} \quad \text{donc en intégrant : } \varepsilon_v^p = 3\alpha p \quad (\text{éq 2.1-3})$$

- expression de l'écrouissage
 - linéaire :

$$\begin{aligned} R(p) &= \sigma_Y + h p & \text{si } p \leq p_{ult} \\ R(p) &= \sigma_Y + h p_{ult} = \sigma_Y^{ult} & \text{si } p > p_{ult} \end{aligned} \quad (\text{éq 2.1-4})$$

- parabolique :

$$\begin{aligned} R(p) &= \sigma_Y \left(1 - \left(1 - \sqrt{\frac{\sigma_Y^{ult}}{\sigma_Y}} \right) \frac{p}{p_{ult}} \right)^2 & \text{si } p \leq p_{ult} \\ R(p) &= \sigma_Y^{ult} & \text{si } p > p_{ult} \end{aligned} \quad (\text{éq 2.1-5})$$

On observe que, comme dans le cas linéaire, $R(p) = \sigma_Y$ si $p = 0$ et on a plasticité parfaite si $p > p_{ult}$.

2.1.1 Déformation à la limite élastique initiale

Cette déformation est obtenue pour $\varepsilon_v^p = p = 0$.

Si on pose $F(\sigma, p) = 0$ (évolution plastique) on a :

$$\begin{aligned} I_1^{el} &= \frac{R(p)}{\alpha} = \frac{\sigma_Y}{\alpha} \\ \varepsilon_v^{el} &= \frac{I_1^{el}}{3K} \end{aligned}$$

2.1.2 Déformation ultime

On appelle déformation ultime ε_v^{ult} celle obtenue pour $p = p_{ult}$.

On trouve facilement la trace de contraintes I_1^{ult} et la déformation plastique $\varepsilon_v^{p_{ult}}$ correspondantes :

$$I_1^{ult} = \frac{R(p)}{\alpha} = \frac{\sigma_Y^{ult}}{\alpha}$$

$$\varepsilon_v^{pult} = 3 \alpha p_{ult}$$

$$\varepsilon_v^{ult} = \frac{I_1^{ult}}{3K} + \varepsilon_v^{pult}$$

2.1.3 Déformation entre la limite élastique et la déformation ultime

On calcule d'abord la déformation plastique cumulée.

- En combinant les équations (2.1-1), (2.1-2), (2.1-3) et (2.1-4) avec $F(\sigma, p) = 0$ pour l'**écrouissage linéaire** on a :

$$p = \frac{3 K A \varepsilon_{v1} - \sigma_Y}{9 K \alpha^2 + h} \quad (\text{éq 2.1-6})$$

- En combinant les équations (2.1-1), (2.1-2), (2.1-3) et (2.1-5) avec $F(\sigma, p) = 0$ pour l'**écrouissage parabolique** on arrive à l'équation de degré 2 :

$$A_1 \bar{p}^2 + B_1 \bar{p} + C_1 = 0$$

$$A_1 = \sigma_Y (1 - \gamma)^2$$

$$B_1 = 9 K \alpha^2 p_{ult} - 2 \sigma_Y (1 - \gamma)$$

$$C_1 = \sigma_Y - 3 K \alpha \varepsilon_{v1}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{\sigma_Y^{ult}}{\sigma_Y}}$$

$$\bar{p} = \frac{p}{p_{ult}} \quad (\text{eq 2.1-7})$$

On utilise alors les équations (2.1-3) (2.1-1) pour trouver la déformation plastique ε_v^p et la trace des contraintes I_1 .

Si on fait décharger le matériau de façon élastique jusqu'à contrainte nulle, on retrouve une déformation résiduelle égale à la déformation plastique ; il faut par contre charger le matériau en compression pour obtenir une déformation totale nulle. Cette deuxième branche est aussi élastique, car le matériau de Drucker-Prager ne peut pas plastifier en état de compression hydrostatique. Dans ce dernier cas, la trace des contraintes, négative, est :

$$I_1^c = -3 K \varepsilon_v^p \quad (\text{éq 2.1-8})$$

2.1.4 Déformation supérieure à la déformation ultime

On trouve facilement toutes les quantités d'intérêt, car la trace de contraintes est connue a priori et égale à I_1^{ult} .

$$\varepsilon_v^p = \varepsilon_v - \frac{I_1^{ult}}{3K}$$

$$p = \frac{\varepsilon_v^p}{3\alpha}$$

2.2 Grandeurs et résultats de référence

Le module de compressibilité K est :

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = 2000 \text{ MPa}$$

2.2.1 Déformation à la limite élastique

Pour les deux modélisations on trouve facilement :

$$I_1^{el} = 30 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_v^{el} = 0,005$$

2.2.2 Déformation ultime

Pour les deux modélisations on trouve :

$$I_1^{ult} = 50 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_v^{pult} = 0,024$$

$$\varepsilon_v^{ult} \approx 0,03233$$

2.2.3 Déformation égale à 0,018 et décharge à déformation nulle

Cette valeur de déformation $\varepsilon_{v1} = 0,018$ est supérieure à la limite élastique ε_v^{el} et inférieure à ε_v^{ult} .
On calcule d'abord la déformation plastique cumulée avec les équations (2.1-7) et (2.1-8), puis la déformation plastique et la trace des contraintes :

- écrouissage linéaire :

$$p_1 = \frac{3K A \varepsilon_{v1} - \sigma_Y}{9K \alpha^2 + h} \approx 0,019$$

$$\varepsilon_{v1}^p = 3\alpha p_1 = 0,0114$$

$$I_1^1 = 3K(\varepsilon_{v1} - \varepsilon_{v1}^p) \approx 39,51 \text{ MPa}$$

- écrouissage parabolique :

$$p_1 \approx 0,0192$$

$$\varepsilon_{v1}^p = 3\alpha p_1 \approx 0,0115$$

$$I_1^1 = 3K(\varepsilon_{v1} - \varepsilon_{v1}^p) \approx 38,956 \text{ MPa}$$

La trace des contraintes à déformation nulle est :

- écrouissage linéaire :

$$I_1^{1c} = -3K \varepsilon_{v1}^p \approx -68,49 \text{ MPa}$$

- écrouissage parabolique :

$$I_1^{1c} = -3K \varepsilon_{v1}^p \approx -69,044 \text{ MPa}$$

En effet, la différence entre le cas parabolique et linéaire est très faible.

2.2.4 Chargement jusqu'à déformation égale à 0,045 et 0,06

On recharge le matériau jusqu'aux valeurs de déformation $\varepsilon_{v2}=0,045$ et $\varepsilon_{v3}=0,06$, supérieures à ε_v^{ult} .

Les résultats sont les mêmes pour les deux modélisations.

Pour $\varepsilon_{v2}=0,045$:

$$\varepsilon_{v2}^p = \varepsilon_{v2} - \frac{I_1^{ult}}{3K} \approx 0,03667$$

$$p_2 = \frac{\varepsilon_{v2}^p}{3\alpha} \approx 0,0611$$

Suite à la décharge élastique (jusqu'à contrainte nulle), on retrouve $\varepsilon_v = \varepsilon_{v2}^p$, $p = p_2$.

Pour $\varepsilon_{v3}=0,06$:

$$\varepsilon_{v3}^p = \varepsilon_{v3} - \frac{I_1^{ult}}{3K} \approx 0,051667$$

$$p_3 = \frac{\varepsilon_{v3}^p}{3\alpha} \approx 0,0861$$

2.2.5 Courbes contrainte-déformation

Dans les Figures (2.2.5-a) et (2.2.5-b) on représente la courbe (ε_v, I_1) pour l'écouissage linéaire et parabolique. En rouge sont les points testés par le cas-test.

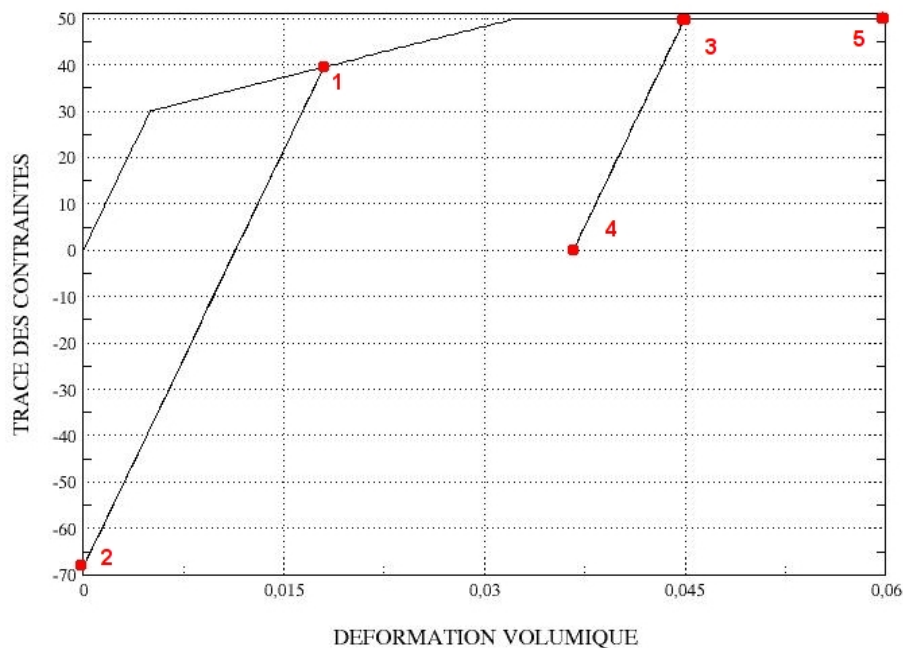


Figure 2.2.5-a: courbes contrainte-déformation pour écouissage linéaire.

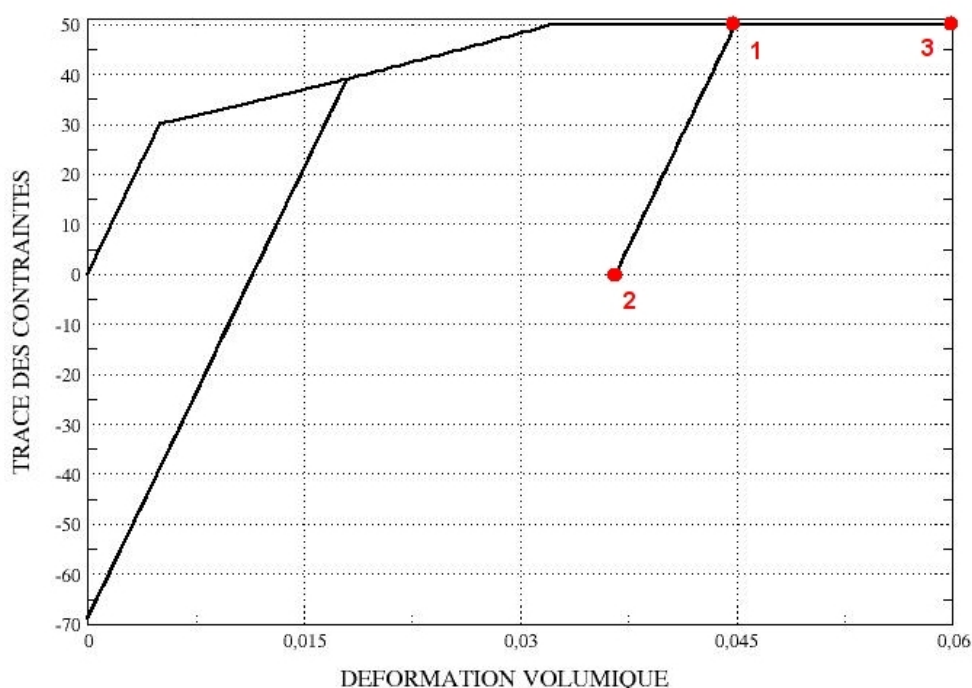


Figure 2.2.5-b: courbes contrainte-déformation pour écrouissage parabolique.

2.3 Incertitudes sur la solution

La solution est analytique.

2.4 Références bibliographiques

- [1] Document [R3.01.16], Intégration du comportement mécanique élasto-plastique de Drucker-Prager DRUCK_PRAGER et post-traitements. Manuel de référence Code_Aster.

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le test est effectué sur un point matériel avec la commande `SIMU_POINT_MAT`. On travaille à déformations imposées.
L'érouissage est linéaire.

3.2 Grandeurs et résultats de référence

Point sur la Figure 2.2.5-a	Quantité vérifiée	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (relatif)
1	Trace des contraintes	$I_1^1 = 39,51 \text{ MPa}$	ANALYTIQUE	$10^{-6} \%$
2	Trace des contraintes	$I_1^{1c} = -68,49 \text{ MPa}$	ANALYTIQUE	$10^{-6} \%$
3 ou 4	Partie sphérique de la déformation plastique	$\varepsilon_{v2}^p = 0,03667$	ANALYTIQUE	$10^{-6} \%$
3 ou 5	Trace de contraintes	$I_1^{ult} = 50 \text{ MPa}$	ANALYTIQUE	$10^{-6} \%$
5	Partie sphérique de la déformation plastique	$\varepsilon_{v3}^p = 0,051667$	ANALYTIQUE	$10^{-6} \%$

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Le test est effectué sur un point matériel avec la commande `SIMU_POINT_MAT`. On travaille à déformations imposées.
L'écouissage est parabolique.

4.2 Grandeurs et résultats de référence

Point sur la Figure 2.2.5-b	Quantité vérifiée	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (relatif)
1 ou 2	Partie sphérique de la déformation plastique	$\varepsilon_{v2}^p = 0,03667$	ANALYTIQUE	$10^{-6} \%$
1 ou 3	Trace de contraintes	$I_1^{ult} = 50 \text{ MPa}$	ANALYTIQUE	$10^{-6} \%$
3	Partie sphérique de la déformation plastique	$\varepsilon_{v3}^p = 0,051667$	ANALYTIQUE	$10^{-6} \%$

5 Synthèse des résultats

Les résultats du cas-test sont satisfaisants, Code_Aster reproduit les résultats analytiques avec une précision élevée.