

## SSNV121 - Rotation et traction hyper-élastique d'un barreau

---

### Résumé :

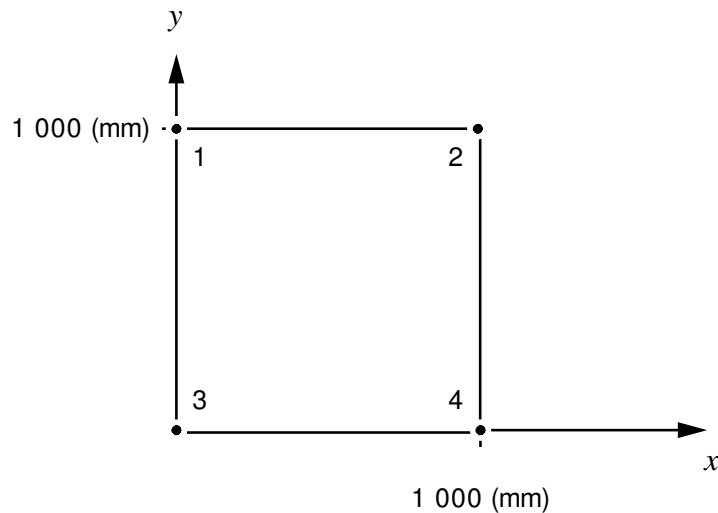
Ce test de mécanique quasi-statique consiste à faire tourner de  $90^\circ$  un barreau parallélépipédique, à le soumettre à une traction importante pour finalement le laisser revenir dans un état déchargé. On valide ainsi la cinématique des grandes déformations hyper-élastiques (commande `STAT_NON_LINE`, mot-clé `COMPORTEMENT`), et donc en particulier les grandes rotations, pour une relation de comportement élastique linéaire.

Le barreau est modélisé par un élément volumique (`HEXA8`, modélisation A) ou bien plan (`QUAD4`, hypothèse de déformations planes, modélisation B).

Les résultats obtenus par *Code\_Aster* ne diffèrent pas de la solution théorique.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



### 1.2 Propriétés de matériaux

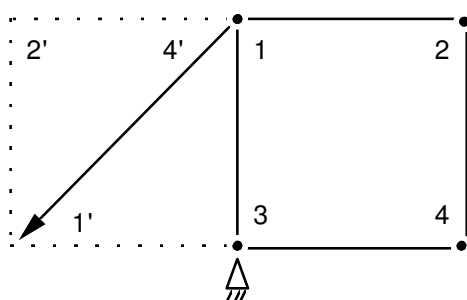
Comportement hyper-élastique de St Venant - Kirchhoff :

$$\mathbf{S} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{1} + \frac{E}{1+\nu} \mathbf{E} \quad \begin{array}{l} E = 200\,000 \text{ MPa} \\ \nu = 0.3 \end{array}$$

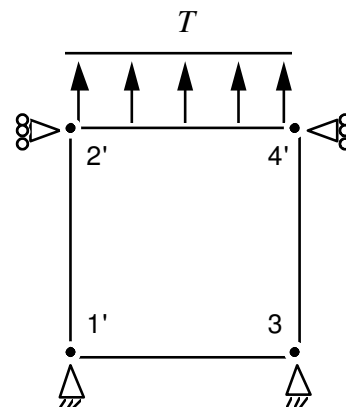
### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Le chargement est appliqué en deux temps : tout d'abord, une rotation d'ensemble de la structure, suivie par une traction dans la nouvelle configuration :

Rotation d'ensemble ( $0 < t < 1$  s)



Traction ( $1 \text{ s} < t < 2$  s)



## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Il s'agit d'un problème plan. On peut chercher la solution sous la forme d'une rotation rigide et d'un allongement d'un facteur  $\lambda$  dans la direction  $y$ .

$$\mathbf{U}(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} -X - Y \\ (1 + \lambda)X - Y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le gradient de la transformation et la déformation de Green-Lagrange sont alors :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } e = \frac{\lambda(\lambda + 2)}{2}$$

La relation de comportement conduit alors à un tenseur de contraintes lagrangiennes diagonal :

$$\begin{pmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(1 - \nu) E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e \\ \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e \\ \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e \end{pmatrix}$$

La condition aux limites de l'équation d'équilibre nous permet alors de déterminer la valeur de l'allongement  $\lambda$  :

$$T = (\mathbf{FS})_{yx} = (1 + \lambda) S_{xx} \Rightarrow \frac{(1 - \nu) E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{2} = T$$

La contrainte de Cauchy est donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\text{Det } \mathbf{F}} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{zz} \\ (1 + \lambda) S_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{S_{yy}}{1 + \lambda} \\ S_{xx} \end{pmatrix}$$

Enfin, la force exercée sur les faces :

- $[2,4] : \mathbf{F}_y = \sigma_{yy} S_{[2,4]} = \sigma_{yy} S_{o[2,4]}$
- $[4,3] : \mathbf{F}_x = \sigma_{xx} S_{[4,3]} = \sigma_{xx} (1 + \lambda) S_{o[4,3]}$
- $[1,2,3,4] : \mathbf{F}_z = \sigma_{zz} S_{[1,2,3,4]} = \sigma_{zz} (1 + \lambda) S_{o[1,2,3,4]}$

où  $S_{o[\ ]}$  représentent les surfaces initiales des faces.

## 2.2 Résultats de référence

On adopte comme résultats de référence les déplacements, la contrainte de Cauchy et la force exercée sur les faces [2,4] et [4,3].

**Au temps  $t=2$  s :**

On cherche  $T$  tel que l'allongement  $\lambda = 0.1$

$$\text{soit } T = 31\,096.154 \text{ MPa}.$$

La contrainte de Cauchy est alors :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{zz} = 11\,013.986 \text{ MPa} \\ \sigma_{yy} &= 31\,096.154 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Les forces exercées sont :

$$\begin{aligned} F_x &= 12\,115.385 \times S_{o[4,3]} \text{ N} \\ F_y &= 31\,096.154 \times S_{o[2,4]} \text{ N} \\ F_z &= 12\,115.385 \times S_{o[1,2,3,4]} \text{ N} \end{aligned}$$

**Au temps  $t=3$  s :**

Le barreau est revenu dans son état initial :

$$\begin{aligned} \lambda &= 0 \\ \sigma &= 0 \\ F &= 0 \end{aligned}$$

## 2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

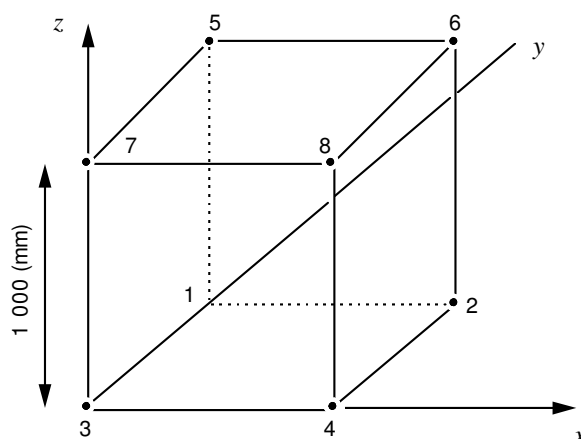
## 2.4 Références bibliographiques

- 1) Eric LORENTZ "Une relation de comportement hyperélastique non linéaire" Note interne EDF/DER HI-74/95/011/0

## 3 Modélisation A

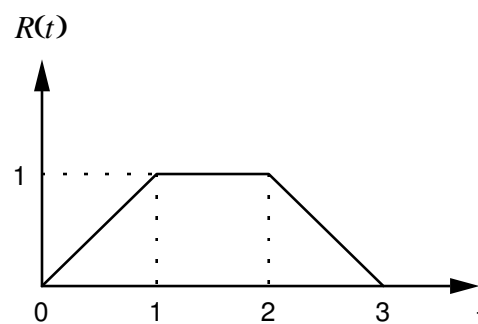
### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation volumique : 1 maille HEXA 8  
1 maille QUAD4



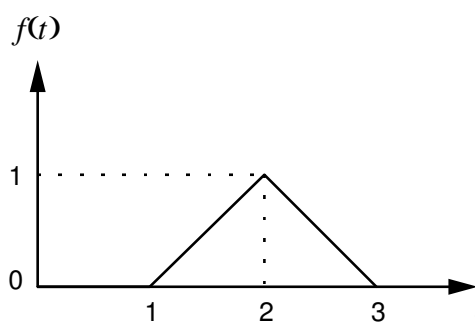
Conditions aux limites :

(3,7) :  $DX = 0$   
(1,5) :  $DX = -1\,000\,R(t)$   
(2,6) :  $DX = -2\,000\,R(t)$   
(4,8) :  $DX = -1\,000\,R(t)$   
 $DY = 0$   
 $DY = -1\,000\,R(t)$



Chargement : Traction sur la face [2,4,8,6]

maille [2,4,8,6] (QUAD4) :  $FY = 31\,096.154\,f(t)\,MPa$



### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8  
Nombre de mailles : 2  
1 HEXA8  
1 QUAD4

## 3.3 Grandeurs testées et résultats

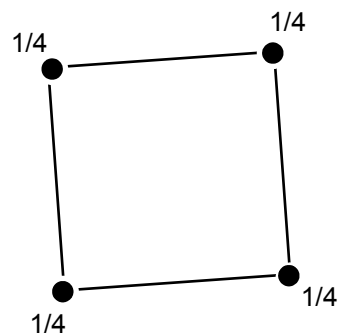
| Identification                | Référence           | Aster               | % différence |
|-------------------------------|---------------------|---------------------|--------------|
| t = 2 Déplacement DX (NO2)    | 100                 | 100                 | 0            |
| t = 2 Déplacement DY (NO4)    | 1100                | 1100                | 0            |
| t = 2 Contraintes SIGXX (PG1) | 11013.986           | 11013.986           | 0            |
| t = 2 Contraintes SIGYY (PG1) | 31096.154           | 31096.154           | 0            |
| t = 2 Contraintes SIGZZ (PG1) | 11013.986           | 11013.986           | 0            |
| t = 2 Contraintes SIGXY (PG1) | 0                   | $\square 10^{-9}$   | /            |
| t = 2 Contraintes SIGXZ (PG1) | 0                   | $\square 10^{-10}$  | /            |
| t = 2 Contraintes SIGYZ (PG1) | 0                   | $\square 10^{-10}$  | /            |
| t = 3 Déplacement DX10 (NO2)  | 0                   | $\square 10^{-11}$  | /            |
| t = 3 Déplacement DY (NO4)    | 0                   | $\square 10^{-12}$  | /            |
| t = 3 Contraintes SIGXX (PG1) | 0                   | $\square 10^{-9}$   | /            |
| t = 3 Contraintes SIGYY (PG1) | 0                   | $\square 10^{-10}$  | /            |
| t = 3 Contraintes SIGZZ (PG1) | 0                   | $\square 10^{-9}$   | /            |
| t = 3 Contraintes SIGXY (PG1) | 0                   | $\square 10^{-11}$  | /            |
| t = 3 Contraintes SIGXZ (PG1) | 0                   | $\square 10^{-10}$  | /            |
| t = 3 Contraintes SIGYZ (PG1) | 0                   | $\square 10^{-11}$  | /            |
| t = 2 Force nodale DX (NO8)   | $3.0289 \cdot 10^9$ | $3.0288 \cdot 10^9$ | -0.002%      |
| t = 2 Force nodale DY (NO8)   | $7.774 \cdot 10^9$  | $7.774 \cdot 10^9$  | 0            |
| t = 2 Force nodale DZ (NO8)   | $3.0289 \cdot 10^9$ | $3.0288 \cdot 10^9$ | -0.002%      |

## 3.4 Remarques

### Calcul de la force nodale :

La force appliquée  $F$  sur une face décrite par une maille linéaire se répartit par :

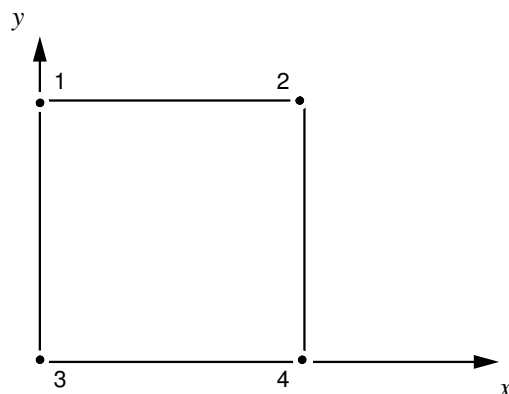
$$F_{\text{noeud}} = \frac{1}{4} F$$



## 4 Modélisation B

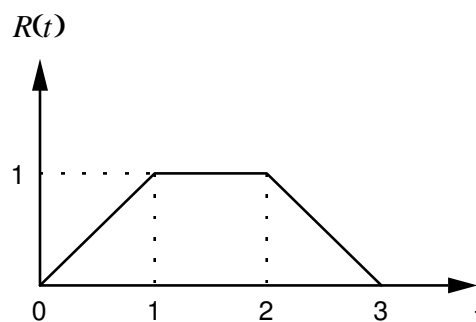
### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation 2D déformations planes



Conditions aux limites :

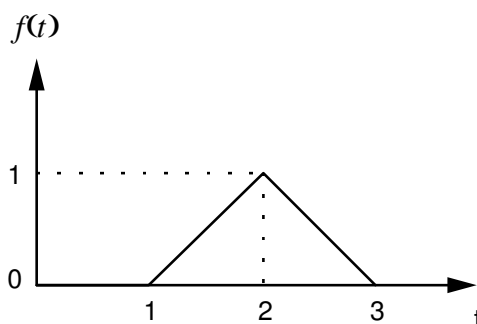
3 : DX = 0  
1 : DX = - 1 000 R(t) DY = 0  
2 : DX = - 2 000 R(t) DY = - 1 000 R(t)  
4 : DX = - 1 000 R(t)



Chargement :

Traction sur la face [2,4]

maille [2,4] :  $FY = 31\,096.154 f(t) \text{ MPa}$



### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 4

Nombre de mailles : 2

1 QUAD4

1 SEG2

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

| Identification             | Référence | Aster | % différence |
|----------------------------|-----------|-------|--------------|
| t = 2 Déplacement DX (NO2) | 100       | 100   | 0            |

|                               |                      |                      |   |
|-------------------------------|----------------------|----------------------|---|
| t = 2 Déplacement DY (NO4)    | 1100                 | 1100                 | 0 |
| t = 2 Contraintes SIGXX (PG1) | 11013.986            | 11013.986            | 0 |
| t = 2 Contraintes SIGYY (PG1) | 31096.154            | 31096.154            | 0 |
| t = 2 Contraintes SIGZZ (PG1) | 11013.986            | 11013.986            | 0 |
| t = 2 Contraintes SIGXY (PG1) | 0                    | $\square 10^{-10}$   | / |
| t = 3 Déplacement DX (NO2)    | 0                    | $\square 10^{-12}$   | / |
| t = 3 Déplacement DY (NO4)    | 0                    | $\square 10^{-12}$   | / |
| t = 3 Contraintes SIGXX (PG1) | 0                    | $\square 10^{-10}$   | / |
| t = 3 Contraintes SIGYY (PG1) | 0                    | $\square 10^{-10}$   | / |
| t = 3 Contraintes SIGZZ (PG1) | 0                    | $\square 10^{-10}$   | / |
| t = 3 Contraintes SIGXY (PG1) | 0                    | $\square 10^{-10}$   | / |
| t = 2 Force nodale DX (NO4)   | $6.0577 \cdot 10^6$  | $6.0577 \cdot 10^6$  | 0 |
| t = 2 Force nodale DY (NO4)   | $15.5481 \cdot 10^6$ | $15.5481 \cdot 10^6$ | 0 |

## 4.4 Remarques

### Calcul de la force nodale :

La force appliquée  $F$  sur une face décrite par une maille linéaire se répartit par :

$$F_{\text{noeud}} = \frac{1}{2} F$$



---

## 5 Synthèse des résultats

---

Il apparaît à l'issue de ce test que la solution numérique coïncide remarquablement avec la solution analytique. On remarquera cependant que la forte non linéarité due aux grandes rotations nécessite une discrétisation en temps relativement fine, sans être pénalisante sur la précision puisque, contrairement à une loi de comportement incrémentale, les erreurs ne se cumulent pas d'un pas de temps sur l'autre.