

---

## SSNP138 - Fissure inclinée en 2D avec X-FEM

---

### Résumé

Ce test a pour but de valider le calcul des facteurs d'intensité de contrainte ( $K_I$  et  $K_{II}$ ) avec X-FEM [bib1] en 2D, dans le cadre de l'élasticité linéaire. Ce test a également pour but de tester les chargements volumiques de `FORCE_INTERNE` et de `PESANTEUR` avec la méthode X-FEM en 2D.

Ce test met en jeu une plaque rectangulaire avec une fissure centrale droite inclinée, et soumise à une chargement de traction sur les bords inférieur et supérieur de la plaque (modélisations *A*, *C*, *D*, *E*) ou soumise à une force volumique et un encastrement sur la partie supérieure (modélisation *B*), ou soumise à une pression sur les lèvres (modélisation *F*).

Différentes modélisations sont considérées :

1. modélisation *A* : X-FEM 2D, chargement surfacique sur les bords, mailles QUAD4, enrichissement géométrique
2. modélisation *B* : X-FEM 2D, chargement volumique, mailles QUAD4, enrichissement géométrique
3. modélisation *C* : X-FEM 2D, chargement surfacique sur les bords, mailles TRIA3, enrichissement géométrique
4. modélisation *D* : X-FEM 2D, chargement surfacique sur les bords, mailles TRIA3, enrichissement topologique
5. modélisation *E* : X-FEM 2D, chargement surfacique sur les bords, mailles TRIA6, enrichissement topologique
6. modélisation *F* : X-FEM 2D, chargement sur les lèvres, mailles TRIA3, enrichissement topologique

La validation porte sur les facteurs d'intensité de contrainte (  $K_I$  et  $K_{II}$  ), par comparaison avec la solution analytique pour les modélisations  $A$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  et une solution de non-régression pour la modélisation  $B$ .

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

La structure 2D est une plaque rectangulaire ( $LX=0,2\text{ m}$ ,  $LY=0,5\text{ m}$ ), comportant une fissure centrale droite, inclinée d'un angle  $\theta$  variable par rapport à l'axe horizontal [Figure 1.1-1]. La longueur de la fissure est constante ( $a=0,04\text{ m}$ ). Dans ce test, l'angle  $\theta$  prendra successivement les valeurs :  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  pour la modélisation A et  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  pour la modélisation B.

On appelle « ligne inférieure », la ligne en  $y=-LY/2$  et « ligne supérieure », la ligne en  $y=LY/2$ .

Les nœuds notés A, B, C et D sur la Figure 1.1-1 servent à imposer les conditions aux limites, qui sont explicitées au paragraphe [§1.3].

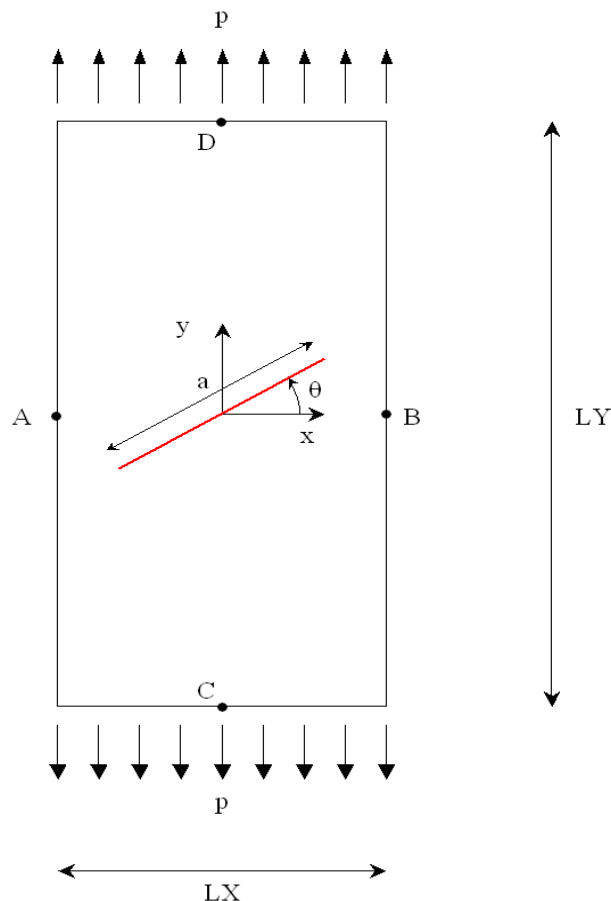


Figure 1.1-1 : géométrie de la plaque fissurée et chargement de la modélisation A.

### 1.2 Propriétés du matériau

Module d'Young :  $E=210\,10^9\text{ Pa}$

Coefficient de Poisson : modélisation A  $\nu=0.3$ , modélisation B  $\nu=0$

Masse volumique : modélisation B :  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

### Modélisation A :

Le chargement consiste à appliquer une force répartie sur les lignes inférieure et supérieure  $p = 10^6 \text{ Pa}$ .

Afin de bloquer les modes rigides, on bloque les déplacements des nœuds A, B, C et D comme suit :

- $DY^A = DY^B = 0$  ;
- $DX^C = DX^D = 0$ .

### Modélisation B :

Le chargement consiste à appliquer à la plaque un encastrement sur la ligne supérieure et une force volumique de type `FORCE_INTERNE` ou `PESANTEUR`. On fait en sorte d'appliquer le même chargement (suivant  $-Y$ ) pour deux calculs successifs avec ces mots clé : pour le premier densité de force imposée de  $78000 \text{ N/m}^3$  et pour le second on choisit une accélération de la pesanteur égale à  $10 \text{ m.s}^{-2}$  et donc densité de force de  $10 \cdot \rho = 78000 \text{ N/m}^3$ .

### Modélisations C, D, E :

Mêmes hypothèses que la modélisation A

### Modélisation F :

Le chargement de traction sur les faces supérieure et inférieure est remplacé par une pression sur les lèvres de la fissure (les 2 chargements sont équivalents)

## 1.4 Solution de référence

### Modélisation A :

Les expressions analytiques des facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  sont des fonctions de la force répartie  $p$ , de la longueur de la fissure  $a$ , de la largeur de la plaque  $LX$  et de l'angle  $\theta$  :

$$K_I = p \sqrt{\pi \frac{a}{2}} F\left(\frac{a}{LX}\right) \cos^2 \theta$$

$$K_{II} = p \sqrt{\pi \frac{a}{2}} F\left(\frac{a}{LX}\right) \cos \theta \sin \theta$$

où la fonction  $F$  peut être déterminée de plusieurs manières différentes. Nous choisissons celle obtenue par Brown en 1966 [bib2, p41], dont la précision est inférieure à 0,5% si le rapport entre la longueur de la fissure et la largeur de la plaque est inférieure ou égale à 0,7 (dans notre cas,  $a/LX = 0,2$ ) :

$$F(x) = 1 + 0,128x - 0,288x^2 + 1,525x^3$$

Avec les valeurs numériques du test :

| Référence    |                            |                               |
|--------------|----------------------------|-------------------------------|
| $\alpha$ (°) | $K_I (\text{Pa.m}^{-1/2})$ | $K_{II} (\text{Pa.m}^{-1/2})$ |
| 0            | $2,5725024656 \cdot 10^5$  | 0                             |
| 15           | $2,4001774761 \cdot 10^5$  | $6,4312561642 \cdot 10^4$     |
| 30           | $1,9293768492 \cdot 10^5$  | $1,1139262432 \cdot 10^5$     |

|    |                              |                              |
|----|------------------------------|------------------------------|
| 45 | 1,2862512328 10 <sup>5</sup> | 1,2862512328 10 <sup>5</sup> |
| 60 | 6,4312561641 10 <sup>4</sup> | 1,1139262432 10 <sup>5</sup> |

**Tableau 1.4-1 : valeurs de référence pour  $K_I$  et  $K_{II}$**

Théoriquement, ces valeurs sont les mêmes pour les deux fonds de fissure.

Modélisation B :

On réalise des tests de non régression.

Modélisations C , D , E , F :

On reprend les valeurs de référence de la modélisation A

## 1.5 Références bibliographiques

- [1] GENIAUT S., MASSIN P. : eXtended Finite Element Method, Manuel de référence de Code\_Aster, [R7.02.12]
- [2] TADA H., PARIS P., IRWIN G. : The stress analysis of cracks handbook, 3<sup>ème</sup> éd., 2000

## 2 Modélisation A

Dans cette modélisation, la méthode des éléments finis étendue ( X-FEM ) est utilisée. On définit un rayon d'enrichissement géométrique avec un nombre de couche d'élément égal à 3.

### 2.1 Caractéristiques du maillage

La structure est modélisée par un maillage régulier composé de  $100 \times 100$  QUAD4, respectivement suivant les axes  $x, y$ . La fissure n'est pas maillée.

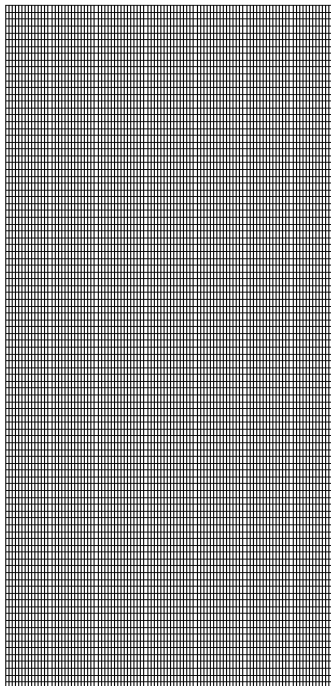


Figure 2.1-1 : maillage de la plaque fissurée

### 2.2 Grandeurs testées et résultats

Pour chaque valeur de l'angle  $\theta$ , on teste la valeur des facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  données par CALC\_G (pour les deux fonds de fissure) ainsi que celles données par K1 et K2 de POST\_K1\_K2\_K3 (pour les deux fonds de fissure).

Pour la méthode *G-thêta* (commande CALC\_G), on teste deux choix de couronnes de champ thêta :

- C1 :  $R_{inf}=0,1a$  et  $R_{sup}=0,3a$  ;
- C2 :  $R_{inf}=h$  et  $R_{sup}=3h$  ;

où  $h$  est la taille caractéristique des mailles :

$$h = \sqrt{\left(\frac{LX}{NX}\right)^2 + \left(\frac{LY}{NY}\right)^2}$$

Pour la méthode par extrapolation des sauts de déplacements (POST\_K1\_K2\_K3), l'abscisse curviligne maximale est égale à  $0,3a$ .

## 2.2.1 Résultats pour $\theta = 0^\circ$

| Identification  | Référence              | Tolérance |
|-----------------|------------------------|-----------|
| CALC_G          |                        |           |
| C1 + fond1 : K1 | 2,5725 10 <sup>5</sup> | 2,0%      |
| C1 + fond2 : K1 | 2,5725 10 <sup>5</sup> | 2,0%      |
| C1 + fond1 : K2 | 0                      | 257       |
| C1 + fond2 : K2 | 0                      | 257       |
| C1 + fond1 : G  | 0,29                   | 2,0%      |
| C1 + fond2 : G  | 0,29                   | 2,0%      |
| C2 + fond1 : K1 | 2,5725 10 <sup>5</sup> | 2,0%      |
| C2 + fond2 : K1 | 2,5725 10 <sup>5</sup> | 2,0%      |
| C2 + fond1 : K2 | 0                      | 257       |
| C2 + fond2 : K2 | 0                      | 257       |
| C2 + fond1 : G  | 0,29                   | 2,0%      |
| C2 + fond2 : G  | 0,29                   | 2,0%      |
| POST_K1_K2_K3   |                        |           |
| fond1: K1       | 2,5725 10 <sup>5</sup> | 2,00%     |
| fond2: K1       | 2,5725 10 <sup>5</sup> | 2,00%     |
| fond1: K2       | 0                      | 257       |
| fond2: K2       | 0                      | 257       |

Les valeurs nulles de  $K_2$  sont testées en absolu avec une tolérance égale à  $K_1^{ref}/1000$ .

## 2.2.2 Résultats pour $\theta = 15^\circ$

| Identification  | Référence              |
|-----------------|------------------------|
| CALC_G          |                        |
| C1 + fond1 : K1 | 2,4001 10 <sup>5</sup> |
| C1 + fond2 : K1 | 2,4001 10 <sup>5</sup> |
| C1 + fond1 : K2 | 6,4313 10 <sup>4</sup> |
| C1 + fond2 : K2 | 6,4313 10 <sup>4</sup> |
| C2 + fond1 : K1 | 2,4001 10 <sup>5</sup> |
| C2 + fond2 : K1 | 2,4001 10 <sup>5</sup> |
| C2 + fond1 : K2 | 6,4313 10 <sup>4</sup> |
| C2 + fond2 : K2 | 6,4313 10 <sup>4</sup> |
| POST_K1_K2_K3   |                        |
| fond1: K1       | 2,4001 10 <sup>5</sup> |
| fond2: K1       | 2,4001 10 <sup>5</sup> |
| fond1: K2       | 6,4313 10 <sup>4</sup> |
| fond2: K2       | 6,4313 10 <sup>4</sup> |





## 2.2.3 Résultats pour $\theta = 30^\circ$

| Identification  | Référence              |
|-----------------|------------------------|
| CALC_G          |                        |
| C1 + fond1 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> |
| C1 + fond2 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> |
| C1 + fond1 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> |
| C1 + fond2 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> |
| C2 + fond1 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> |
| C2 + fond2 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> |
| C2 + fond1 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> |
| C2 + fond2 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> |
| POST_K1_K2_K3   |                        |
| fond1 : K1      | 1,9294 10 <sup>5</sup> |
| fond2 : K1      | 1,9294 10 <sup>5</sup> |
| fond1 : K2      | 1,1139 10 <sup>5</sup> |
| fond2 : K2      | 1,1139 10 <sup>5</sup> |

## 2.2.4 Résultats pour $\theta = 45^\circ$

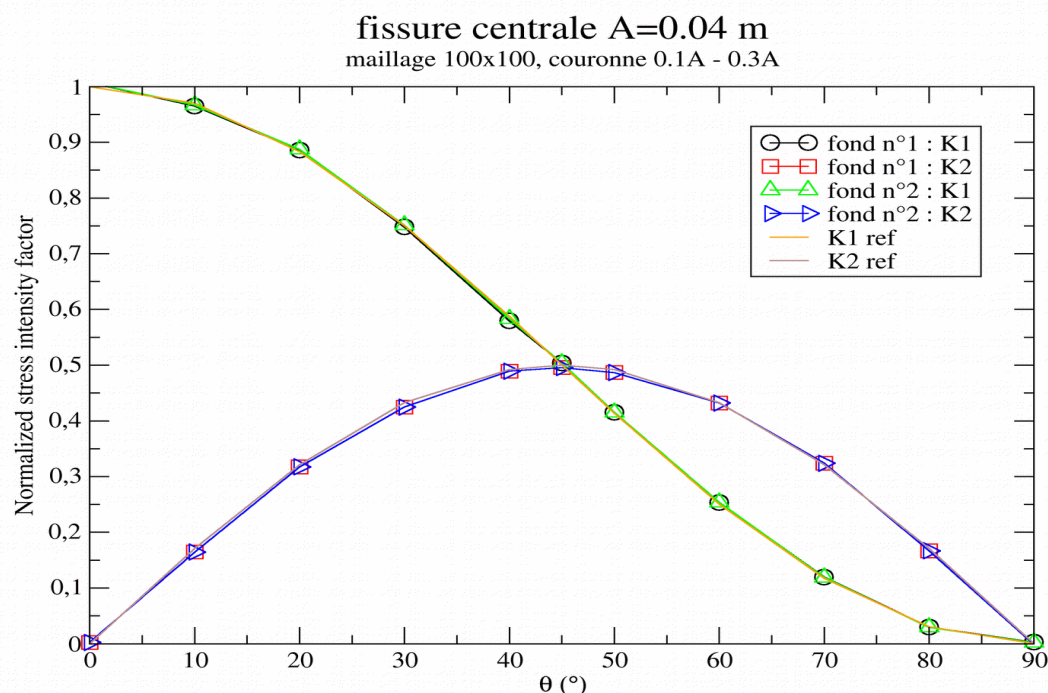
| Identification  | Référence              |
|-----------------|------------------------|
| CALC_G          |                        |
| C1 + fond1 : K1 | 1,2863 10 <sup>5</sup> |
| C1 + fond2 : K1 | 1,2863 10 <sup>5</sup> |
| C1 + fond1 : K2 | 1,2863 10 <sup>5</sup> |
| C1 + fond2 : K2 | 1,2863 10 <sup>5</sup> |
| C2 + fond1 : K1 | 1,2863 10 <sup>5</sup> |
| C2 + fond2 : K1 | 1,2863 10 <sup>5</sup> |
| C2 + fond1 : K2 | 1,2863 10 <sup>5</sup> |
| C2 + fond2 : K2 | 1,2863 10 <sup>5</sup> |
| POST_K1_K2_K3   |                        |
| fond1 : K1      | 1,2863 10 <sup>5</sup> |
| fond2 : K1      | 1,2863 10 <sup>5</sup> |
| fond1 : K2      | 1,2863 10 <sup>5</sup> |
| fond2 : K2      | 1,2863 10 <sup>5</sup> |

## 2.2.5 Résultats pour $\theta = 60^\circ$

| Identification  | Référence              |
|-----------------|------------------------|
| CALC_G          |                        |
| C1 + fond1 : K1 | 6,4313 10 <sup>4</sup> |
| C1 + fond2 : K1 | 6,4313 10 <sup>4</sup> |
| C1 + fond1 : K2 | 1,1140 10 <sup>5</sup> |
| C1 + fond2 : K2 | 1,1140 10 <sup>5</sup> |
| C2 + fond1 : K1 | 6,4313 10 <sup>4</sup> |
| C2 + fond2 : K1 | 6,4313 10 <sup>4</sup> |
| C2 + fond1 : K2 | 1,1140 10 <sup>5</sup> |
| C2 + fond2 : K2 | 1,1140 10 <sup>5</sup> |
| POST_K1_K2_K3   |                        |
| fond1: K1       | 6,4313 10 <sup>4</sup> |
| fond2: K1       | 6,4313 10 <sup>4</sup> |
| fond1: K2       | 1,1140 10 <sup>5</sup> |
| fond2: K2       | 1,1140 10 <sup>5</sup> |

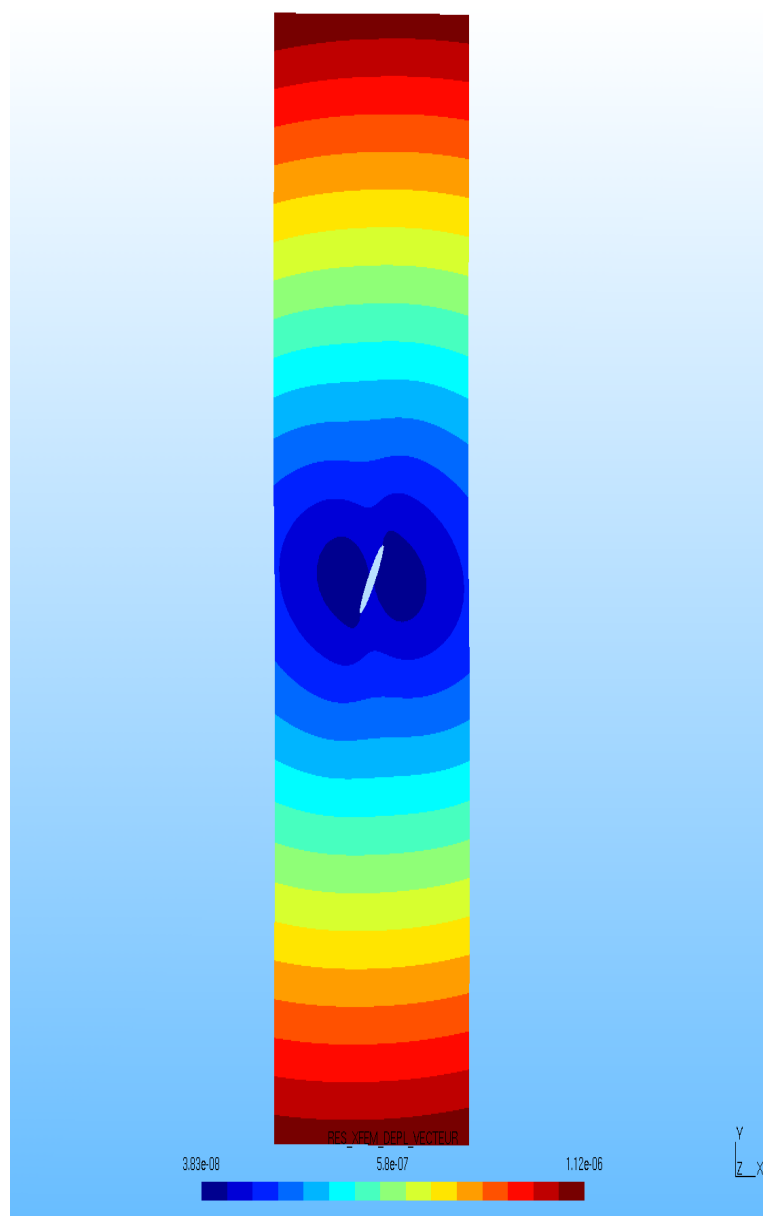
## 2.3 Résultats complémentaires

D'autres valeurs d'angles  $\theta$  ont été testées par ailleurs, sans faire partie de ce test. Elles sont reportées sur la Figure 2.3-1.



**Figure 2.3-1 : facteurs d'intensité des contraintes normalisés par  $K_I$  (  $\theta = 0^\circ$  )  
obtenus par CALC\_G pour la couronne CI**

À titre d'illustration, la Figure 2.3-2 présente une vue de la déformée de la plaque pour un angle  $\theta = 45^\circ$ .



**Figure 2.3-2 : déformée pour  $\theta = 45^\circ$**

## 3 Modélisation B

Dans cette modélisation, la méthode des éléments finis étendue ( X-FEM ) est utilisée. On définit un rayon d'enrichissement géométrique avec un nombre de couche d'élément égal à 3.

### 3.1 Caractéristiques du maillage

La structure est modélisée par un maillage régulier (identique à la modélisation A ) composé de  $100 \times 100$  QUAD4, respectivement suivant les axes  $x, y$ . La fissure n'est pas maillée.

### 3.2 Grandeurs testées et résultats

Pour chaque valeur de l'angle  $\theta$  ( $0^\circ$  et  $45^\circ$ ), et pour chaque chargement : force interne ( FI ) et pesanteur ( PESA ), on teste la valeur du facteur d'intensité de contraintes KI donnée par CALC\_G (pour les deux fonds de fissure) ainsi que celle donnée par K1 de POST\_K1\_K2\_K3 (pour le 2ème fond de fissure). On teste également la valeur de G donnée par CALC\_G, option CALC\_G, que l'on compare à celle obtenue par CALC\_G, option CALC\_K\_G.

Pour la méthode  $G$ -thêta (commande CALC\_G), on choisit les couronnes de champ thêta suivantes :  $R_{inf}=0,1a$  et  $R_{sup}=0,3a$  ;

Pour la méthode par extrapolation des sauts de déplacements (POST\_K1\_K2\_K3), l'abscisse curviligne maximale est égale à  $0,3a$ .

#### 3.2.1 Résultats pour $\theta=0^\circ$

| Identification | Code_Aster  | Tolérance |
|----------------|-------------|-----------|
| CALC_G         |             |           |
| FI fond1 : K1  | 5013.598    | 0.1%      |
| FI fond2 : K1  | 5013.586    | 0.1%      |
| PES fond1 : K1 | 5013.598    | 0.1%      |
| PES fond2 : K1 | 5013.586    | 0.1%      |
| FI fond 1 : G  | 1.19751E-04 | 0.1%      |
| PES fond 1 : G | 1.19751E-04 | 0.1%      |
| POST_K1_K2_K3  |             |           |
| FI fond2: K1   | 5069,12     | 0.1%      |
| PES fond2: K1  | 5069,12     | 0.1%      |

#### 3.2.2 Résultats pour $\theta=45^\circ$

| Identification | Code_Aster | Tolérance |
|----------------|------------|-----------|
| CALC_G         |            |           |
| FI fond1 : K1  | 2454.40    | 0.1%      |
| FI fond2 : K1  | 2592.14    | 0.1%      |
| PES fond1 : K1 | 2454.40    | 0.1%      |
| PES fond2 : K1 | 2592.14    | 0.1%      |
| FI fond 1 : G  | 5.644E-05  | 0.1%      |
| PES fond 1 : G | 5.644E-05  | 0.1%      |

---

|               |         |      |
|---------------|---------|------|
| POST_K1_K2_K3 |         |      |
| FI fond2: K1  | 2589,86 | 0.1% |
| PES fond2: K1 | 2589,86 | 0.1% |

---

## 4 Modélisation C

Dans cette modélisation, la méthode des éléments finis étendue ( X-FEM ) est utilisée. On définit un rayon d'enrichissement géométrique avec un nombre de couche d'élément égal à 3.

### 4.1 Caractéristiques du maillage

Le domaine est maillé avec des triangles linéaires (mailles `TRIA3`). On conserve le raffinement des modélisations précédentes à savoir 100 quadrangles (scindés en 2 triangles) suivant l'axe  $X$  et 100 quadrangles (scindés en 2 triangles) suivant l'axe  $Y$ . La fissure n'est pas maillée.

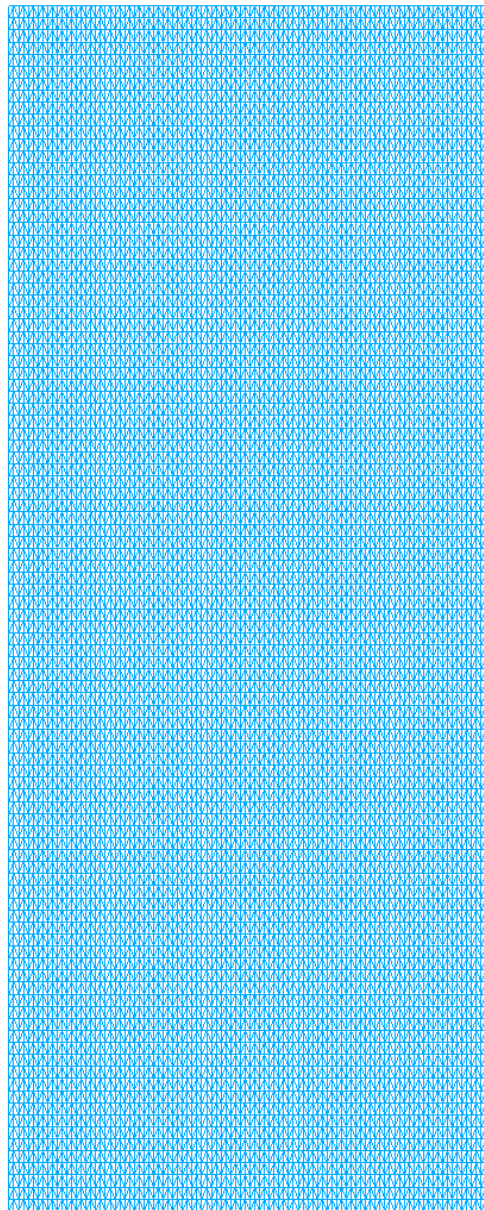
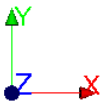


Figure 4.1-1 : maillage avec des triangles

### 4.2 Grandeurs testées et résultats

La fissure est inclinée suivant 3 valeurs angulaires :  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$

Pour chaque angle d'inclinaison, on teste les facteurs d'intensité de contrainte comme dans les modélisations  $A$  et  $B$ , par la méthode  $G-\theta$  et par la méthode d'extrapolation des sauts de déplacements.

Pour la méthode  $G-\theta$  (commande `CALC_G`), on choisit les couronnes de champ  $\theta$  suivantes :  $R_{inf}=0,1a$  et  $R_{sup}=0,3a$ .

## 4.2.1 Résultats pour $\theta=0^\circ$

| Identification  | Référence              | Tolérance |
|-----------------|------------------------|-----------|
| CALC_G          |                        |           |
| C1 + fond1 : K1 | 2,5725 10 <sup>5</sup> | 2,0%      |
| C1 + fond2 : K1 | 2,5725 10 <sup>5</sup> | 2,0%      |
| C1 + fond1 : K2 | 0                      | 257       |
| C1 + fond2 : K2 | 0                      | 257       |
| C1 + fond1 : G  | 0,29                   | 2,0%      |
| C1 + fond2 : G  | 0,29                   | 2,0%      |
| C2 + fond1 : K1 | 2,5725 10 <sup>5</sup> | 2,0%      |
| C2 + fond2 : K1 | 2,5725 10 <sup>5</sup> | 2,0%      |
| C2 + fond1 : K2 | 0                      | 257       |
| C2 + fond2 : K2 | 0                      | 257       |
| C2 + fond1 : G  | 0,29                   | 2,0%      |
| C2 + fond2 : G  | 0,29                   | 2,0%      |
| POST_K1_K2_K3   |                        |           |
| C1 + fond1 : K1 | 2,5725 10 <sup>5</sup> | 2,0%      |
| C1 + fond2 : K1 | 2,5725 10 <sup>5</sup> | 2,0%      |
| C1 + fond1 : K2 | 0                      | 514,5     |
| C1 + fond2 : K2 | 0                      | 514,5     |
| C2 + fond1 : K1 | 2,5725 10 <sup>5</sup> | 2,0%      |
| C2 + fond2 : K1 | 2,5725 10 <sup>5</sup> | 2,0%      |
| C2 + fond1 : K2 | 0                      | 514,5     |
| C2 + fond2 : K2 | 0                      | 514,5     |

Les valeurs nulles de  $K_2$  sont testées en absolu avec une tolérance égale à  $K_1^{ref}/1000$  pour `CALC_G` et une tolérance égale à  $K_1^{ref}/500$  pour `POST_K1_K2_K3`.

## 4.2.2 Résultats pour $\theta=30^\circ$

| Identification  | Référence              | Tolérance |
|-----------------|------------------------|-----------|
| CALC_G          |                        |           |
| C1 + fond1 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 2,0%      |
| C1 + fond2 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 2,0%      |
| C1 + fond1 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 3,0%      |
| C1 + fond2 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 3,0%      |

|                 |                        |      |
|-----------------|------------------------|------|
| C1 + fond1 : G  | 0,215                  | 2,0% |
| C1 + fond2 : G  | 0,215                  | 2,0% |
| C2 + fond1 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 2,0% |
| C2 + fond2 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 2,0% |
| C2 + fond1 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 3,0% |
| C2 + fond2 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 3,0% |
| C2 + fond1 : G  | 0,215                  | 2,0% |
| C2 + fond2 : G  | 0,215                  | 2,0% |
| POST_K1_K2_K3   |                        |      |
| C1 + fond1 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 2,0% |
| C1 + fond2 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 2,0% |
| C1 + fond1 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 3,0% |
| C1 + fond2 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 3,0% |
| C2 + fond1 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 2,0% |
| C2 + fond2 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 2,0% |
| C2 + fond1 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 3,0% |
| C2 + fond2 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 3,0% |

## 4.2.3 Résultats pour $\theta=60^\circ$

| Identification  | Référence               | Tolérance |
|-----------------|-------------------------|-----------|
| CALC_G          |                         |           |
| C1 + fond1 : K1 | 6,431210 <sup>5</sup>   | 2,0%      |
| C1 + fond2 : K1 | 6,431210 <sup>5</sup>   | 2,0%      |
| C1 + fond1 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup>  | 3,0%      |
| C1 + fond2 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup>  | 3,0%      |
| C1 + fond1 : G  | 7,1692 10 <sup>-2</sup> | 2,0%      |
| C1 + fond2 : G  | 7,1692 10 <sup>-2</sup> | 2,0%      |
| C2 + fond1 : K1 | 6,431210 <sup>5</sup>   | 2,0%      |
| C2 + fond2 : K1 | 6,431210 <sup>5</sup>   | 2,0%      |
| C2 + fond1 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup>  | 3,0%      |
| C2 + fond2 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup>  | 3,0%      |
| C2 + fond1 : G  | 7,1692 10 <sup>-2</sup> | 2,0%      |
| C2 + fond2 : G  | 7,1692 10 <sup>-2</sup> | 2,0%      |
| POST_K1_K2_K3   |                         |           |
| C1 + fond1 : K1 | 6,431210 <sup>5</sup>   | 2,0%      |
| C1 + fond2 : K1 | 6,431210 <sup>5</sup>   | 2,0%      |
| C1 + fond1 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup>  | 3,0%      |
| C1 + fond2 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup>  | 3,0%      |
| C2 + fond1 : K1 | 6,431210 <sup>5</sup>   | 2,0%      |
| C2 + fond2 : K1 | 6,431210 <sup>5</sup>   | 2,0%      |
| C2 + fond1 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup>  | 3,0%      |
| C2 + fond2 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup>  | 3,0%      |





## 5 Modélisation D

Cette modélisation est identique à la modélisation C.

La seule différence est que l'on choisit ici un enrichissement topologique (une seule de couche d'éléments enrichis en fond de fissure).

On ne modélise que la fissure inclinée à 30°.

### 5.1 Grandeurs testées et résultats

| Identification  | Référence              | Tolérance |
|-----------------|------------------------|-----------|
| CALC_G          |                        |           |
| C1 + fond1 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 0,5%      |
| C1 + fond2 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 0,5%      |
| C1 + fond1 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 3,0%      |
| C1 + fond2 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 3,0%      |
| C1 + fond1 : G  | 0,215                  | 4,0%      |
| C1 + fond2 : G  | 0,215                  | 4,0%      |
| C2 + fond1 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 0,5%      |
| C2 + fond2 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 0,5%      |
| C2 + fond1 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 3,0%      |
| C2 + fond2 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 3,0%      |
| C2 + fond1 : G  | 0,215                  | 4,0%      |
| C2 + fond2 : G  | 0,215                  | 4,0%      |
| POST_K1_K2_K3   |                        |           |
| C1 + fond1 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 6,0%      |
| C1 + fond2 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 6,0%      |
| C1 + fond1 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 6,0%      |
| C1 + fond2 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 6,0%      |
| C2 + fond1 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 6,0%      |
| C2 + fond2 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 6,0%      |
| C2 + fond1 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 6,0%      |
| C2 + fond2 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 6,0%      |

## 6 Modélisation E

Cette modélisation est identique à la modélisation E.  
La seule différence est que l'on choisit ici des mailles quadratiques (TRIA6).

| Identification  | Référence              | Tolérance |
|-----------------|------------------------|-----------|
| CALC_G          |                        |           |
| C1 + fond1 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 0,5%      |
| C1 + fond2 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 0,5%      |
| C1 + fond1 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 2,0%      |
| C1 + fond2 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 2,0%      |
| C1 + fond1 : G  | 0,215                  | 0,6%      |
| C1 + fond2 : G  | 0,215                  | 0,6%      |
| C2 + fond1 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 0,5%      |
| C2 + fond2 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 0,5%      |
| C2 + fond1 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 2,0%      |
| C2 + fond2 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 3,0%      |
| C2 + fond1 : G  | 0,215                  | 0,6%      |
| C2 + fond2 : G  | 0,215                  | 0,6%      |
| POST_K1_K2_K3   |                        |           |
| C1 + fond1 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 0,2%      |
| C1 + fond2 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 0,2%      |
| C1 + fond1 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 1,5%      |
| C1 + fond2 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 1,5%      |
| C2 + fond1 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 0,2%      |
| C2 + fond2 : K1 | 1,9294 10 <sup>5</sup> | 0,2%      |
| C2 + fond1 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 1,5%      |
| C2 + fond2 : K2 | 1,1139 10 <sup>5</sup> | 1,5%      |

## 7 Modélisation F

Cette modélisation est similaire à la modélisation D (mailles TRIA3, enrichissement topologique), mais le chargement est appliqué via une pression sur les lèvres de la fissure. Seule la fissure horizontale est testée.

### 7.1 Grandeurs testées et résultats

| Identification  | Référence              | Tolérance |
|-----------------|------------------------|-----------|
| CALC_G          |                        |           |
| C1 + fond1 : K1 | 2,5725 10 <sup>5</sup> | 2,0%      |
| C1 + fond2 : K1 | 2,5725 10 <sup>5</sup> | 2,0%      |
| C1 + fond1 : K2 | 0                      | 257       |
| C1 + fond2 : K2 | 0                      | 257       |
| C1 + fond1 : G  | 0,29                   | 9,0%      |
| C1 + fond2 : G  | 0,29                   | 9,0%      |
| C2 + fond1 : K1 | 2,5725 10 <sup>5</sup> | 2,0%      |
| C2 + fond2 : K1 | 2,5725 10 <sup>5</sup> | 2,0%      |
| C2 + fond1 : K2 | 0                      | 257       |
| C2 + fond2 : K2 | 0                      | 257       |
| C2 + fond1 : G  | 0,29                   | 9,0%      |
| C2 + fond2 : G  | 0,29                   | 9,0%      |
| POST_K1_K2_K3   |                        |           |
| C2 + fond1 : K1 | 2,5725 10 <sup>5</sup> | 10,0%     |
| C2 + fond2 : K1 | 2,5725 10 <sup>5</sup> | 10,0%     |
| C2 + fond1 : K2 | 0                      | 257       |
| C2 + fond2 : K2 | 0                      | 257       |

Les résultats sont moins précis que ceux de la modélisation D.

En effet, lorsque l'on impose une pression sur les lèvres de la fissure, il est nécessaire d'utiliser de petites couronnes.

## 8 Synthèses des résultats

Les objectifs de ce test sont atteints :

- Valider sur un cas simple le calcul des facteurs d'intensité de contraintes en mode mixte pour les éléments X-FEM linéaires et quadratiques
- Tester la non régression des forces volumiques imposées sur une fissure X-FEM

### Bilan sur les éléments linéaires

Avec la commande `CALC_G`, on obtient une bonne précision sur  $K_I$  et  $K_{II}$  (2 à 3%) avec des éléments linéaires (triangles ou quadrangles), quelque soit le type d'enrichissement en fond de fissure (topologique ou géométrique).

Par contre, avec la commande `POST_K1_K2_K3`, l'activation de l'enrichissement géométrique améliore significativement la solution par rapport à l'enrichissement topologique par défaut (5 à 6% → 2 à 3%).

Il est donc recommandé d'utiliser l'enrichissement par défaut (topologique) et un post-traitement avec `CALC_G`. Si pour une quelconque raison, on souhaite post-traiter avec `POST_K1_K2_K3`, alors il est préférable d'activer l'enrichissement géométrique.

### Bilan sur les éléments quadratiques

Les éléments quadratiques (avec enrichissement topologique) permettent de retrouver des résultats aussi précis que les éléments linéaires avec enrichissement géométrique, mais pour une taille du système à résoudre bien plus grande.

Comparaison des erreurs relatives pour la fissure inclinée à 30° :

|                                       | TRIA3 + topologique<br>(Modélisation D) | TRIA3 + géométrique<br>(Modélisation C) | TRIA6 + topologique<br>(Modélisation E) |
|---------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|
| Taille du système                     | 20788 ddls                              | 21396 ddls                              | 82032 ddls                              |
| <code>CALC_G</code> : $K_I$           | 0,5%                                    | 0,2%                                    | 0,3%                                    |
| <code>CALC_G</code> : $K_{II}$        | 2,0%                                    | 2,0%                                    | 2,0%                                    |
| <code>CALC_G</code> : $G$             | 4,0%                                    | 1,0%                                    | 0,6%                                    |
| <code>POST_K1_K2_K3</code> : $K_I$    | 6,0%                                    | 0,2%                                    | 0,2%                                    |
| <code>POST_K1_K2_K3</code> : $K_{II}$ | 6,0%                                    | 3,0%                                    | 1,5%                                    |