

## SSNA302 - Plaque circulaire simplement appuyée soumise à pression

---

### Résumé :

Ce test consiste à appliquer une pression transversale sur une plaque circulaire, simplement appuyée et constituée d'un matériau élastique. Il est destiné à étudier la prise en compte des non linéarités géométriques particulièrement en l'absence de courbure initiale quand la raideur transversale est uniquement due à l'effet de plaque.

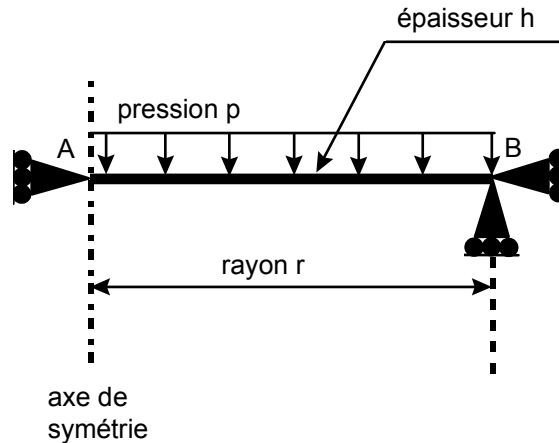
La modélisation est faite avec des éléments volumiques de type HEXA20 et PENTA15 et des éléments surfaciques de type QUAD8 et TRIA6 pour l'application de la pression.

La référence est le logiciel SAMCEF. On présente pour information les résultats issus de la théorie des coques minces.

Sous le mot-clé `COMPORTEMENT`, l'option `GREEN` est comparée à l'option `PETIT_REAC`.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



### 1.2 Propriétés de matériaux

Matériau élastique isotrope :

$$E = 200000 \text{ Mpa}$$
$$\nu = 0.3$$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Point B :  $u_x = 0$   
 $u_y = 0.$

On applique une pression transversale  $p$  sur la plaque :  $p = 222.72 \text{ N/mm}^2$ . Cette pression correspond à une flèche  $w_0$  de  $1.5 \text{ mm}$ .

Rayon  $r = 10 \text{ mm}$   
Épaisseur  $h = 1 \text{ mm}$

Le problème est axisymétrique.

## 2 Solution de référence

### 2.1 Solution de référence

La référence est le logiciel SAMCEF. On présente, pour information, au paragraphe [§2.2], les résultats théoriques liés à une hypothèse de type coque mince. Puis, sont présentés les résultats obtenus avec SAMCEF selon que l'on choisisse une hypothèse de type coque épaisse ou de type volume. C'est cette dernière qui est prise en considération pour l'évaluation de Code\_Aster.

### 2.2 Solution analytique et résultats de référence

La formule suivante donne la flèche  $w_0$  au centre de la plaque :

$$\frac{w_0}{h} + A \left( \frac{w_0}{h} \right)^3 = \frac{Bp}{E} \left( \frac{r}{h} \right)^4 \quad \text{avec } A=1.852 \quad \text{et } B=0.696$$

Les contraintes à mi-épaisseur valent :

$$\sigma_{rr} = \alpha_r E \frac{w_0}{r^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \alpha_t E \frac{w_0}{r^2}$$

Les contraintes en peau inférieure valent

$$\sigma_{rr}' = \beta_r E \frac{w_0 h}{r^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta}' = \beta_t E \frac{w_0 h}{r^2}$$

Les coefficients valent :

Au centre de la plaque :

$$\alpha_r = \alpha_t = 0.905$$

$$\beta_r = \beta_t = 1.778$$

Au bord de la plaque :

$$\alpha_r = 0.610$$

$$\alpha_t = 0.183$$

$$\beta_r = 0$$

$$\beta_t = 0.755$$

Pour une pression de  $222.72 \text{ MPa}$ , la flèche  $w_0$  vaut  $1.5 \text{ mm}$  et on obtient les contraintes suivantes :

| Position | $\sigma_{rr} \text{ (MPa)}$ | $\sigma_{\theta\theta} \text{ (MPa)}$ | $\sigma_{rr}' \text{ (MPa)}$ | $\sigma_{\theta\theta}' \text{ (MPa)}$ |
|----------|-----------------------------|---------------------------------------|------------------------------|----------------------------------------|
|----------|-----------------------------|---------------------------------------|------------------------------|----------------------------------------|

|        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|
|        | 4072.5 | 4072.5 | 5334.0 | 5334.0 |
| Centre |        |        |        |        |

Ces résultats correspondent à une hypothèse de coque mince.

Le tableau suivant montre les résultats obtenus par SAMCEF pour une modélisation de type coque épaisse et de type volume.

| Identification                      | Coque épaisse | Volume        |
|-------------------------------------|---------------|---------------|
| Flèche $w_0$ (mm)                   | -1.43041 E-3  | -1.441838 E-3 |
| SIXX (MPa) centre, mi-épaisseur     | 3899.88       | 3850.88       |
| SIYY (MPa) centre, mi-épaisseur     | 3899.53       | 3850.91       |
| SIXX (MPa) centre, peau inf         | 8085.81       | 8133.60       |
| SIYY (MPa) centre, peau inf         | 8083.32       | 8133.65       |
| SIXX (MPa) $r = R/2$ , mi-épaisseur | 3596.91       | 3512.79       |
| SIYY (MPa) $r = R/2$ , mi-épaisseur | 3056.37       | 2947.55       |
| SIXX (MPa) $r = R/2$ , peau inf     | 7798.18       | 7815.73       |
| SIYY (MPa) $r = R/2$ , peau inf     | 7264.69       | 7307.04       |

Les valeurs des contraintes sont des valeurs par élément extrapolées aux noeuds.

Les résultats obtenus avec SAMCEF sont proches l'un de l'autre.

Les écarts de résultats entre la théorie coque mince et le calcul élément fini utilisant l'hypothèse coque épaisse sont importants.

On choisit de prendre comme référence le calcul volumique obtenu par SAMCEF.

## 2.3 Références bibliographiques

- 1) Theory of Plates and Shells, Timoshenko S.P., 2<sup>nd</sup> edition, p 412

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation A

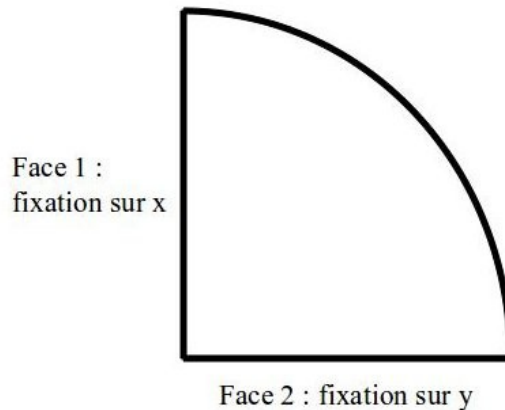


Figure 3.1-3.1-a

On ne modélise qu'un quart de plaque. On introduit des conditions de symétrie sur les deux faces montrées ci-dessus.

De plus on fixe suivant  $x, y, z$  tous les nœuds du bord situés à mi épaisseur.

Afin de représenter le plus fidèlement les hypothèses de coque mince, on introduit des contraintes linéaires sur les degrés de liberté des nœuds du bord. Celles ci s'écrivent :

pour deux nœuds  $i$  et  $j$  situés de part et d'autre du feuillet moyen :

$$u_i + u_j = 0$$

$$v_i + v_j = 0$$

où  $u$  et  $v$  désignent les déplacements suivant les axes  $x$  et  $y$ .

La syntaxe utilisée dans le jeu de données de *Code\_Aster* est la suivante :

```
LIAISON_DDL ( NOEUD :  $N_i$   $N_j$  ) , DDL : ( 'DX', 'DX' ) , COEF_MULT : ( 1 ,  
1 ) , COEF_IMPO : 0
```

On applique linéairement la pression en utilisant 6 incréments.

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2091  
Nombre de mailles et types : 368 HEXA20, 28 PENTA15  
92 QUAD8, 7 TRIA6

### 3.3 Valeurs testées

| Identification | Référence |
|----------------|-----------|
|                |           |

|                                     |              |
|-------------------------------------|--------------|
| Flèche $w_0$ (mm)                   | -1.441838E-3 |
| SIXX (MPa) centre, mi-épaisseur     | 3850.9       |
| SIYY (MPa) centre, mi-épaisseur     | 3850.9       |
| SIXX (MPa) centre, peau inf         | 8133.6       |
| SIYY (MPa) centre, peau inf         | 8133.6       |
| SIXX (MPa) $r = R/2$ , mi-épaisseur | 3512.8       |
| SIYY (MPa) $r = R/2$ , mi-épaisseur | 2947.5       |
| SIXX (MPa) $r = R/2$ , peau inf     | 7815.7       |
| SIYY (MPa) $r = R/2$ , peau inf     | 7307.0       |

## 3.4 Remarques

On obtient la même précision sur les résultats en utilisant un seul incrément de chargement.

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation B

Idem modélisation A, mais en traitant les non linéarités géométriques par le mot-clé `COMPORTEMENT` option `PETIT_REAC`.

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2091  
Nombre de mailles et 368 HEXA20, 28 PENTA15  
types :  
92 QUAD8, 7 TRIA6

### 4.3 Valeurs testées

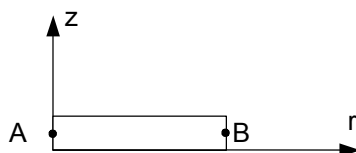
| Identification                      | Référence    | Aster      | % différence |
|-------------------------------------|--------------|------------|--------------|
| Flèche $w_0$ (mm)                   | -1.441838E-3 | -1.3692E-3 | -5.036       |
| SIXX (MPa) centre, mi-épaisseur     | 3850.9       | 4219.3     | 9.568        |
| SIYY (MPa) centre, mi-épaisseur     | 3850.9       | 4219.4     | 9.569        |
| SIXX (MPa) centre, peau inf         | 8133.6       | 7950.5     | -2.251       |
| SIYY (MPa) centre, peau inf         | 8133.6       | 7950.5     | -2.252       |
| SIXX (MPa) $r = R/2$ , mi-épaisseur | 3512.8       | 3838.4     | 9.268        |
| SIYY (MPa) $r = R/2$ , mi-épaisseur | 2947.5       | 3314.2     | 12.440       |
| SIXX (MPa) $r = R/2$ , peau inf     | 7815.7       | 7593.9     | -2.839       |
| SIYY (MPa) $r = R/2$ , peau inf     | 7307.0       | 7123.7     | -2.509       |

### 4.4 Remarques

On note un écart important entre la solution de référence et la solution fournie par `Code_Aster`.  
On vérifie que cet écart tend vers 0 lorsque l'on augmente le nombre d'incréments.

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation C



- modélisation axisymétrique
- conditions aux limites :

$$B : \quad DX=0 \quad DY=0$$

Comme pour la modélisation A (3D), des contraintes linéaires sont introduites pour mieux représenter une cinématique de coque. Elles portent sur les nœuds du bord extérieur du disque. Si  $i$  et  $j$  désignent 2 nœuds de part et d'autre du feuillet moyen, elles s'écrivent :

$$u_i + u_j = 0 \quad \text{où } u \text{ désigne le déplacement radial}$$

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 149  
Nombre de mailles et 40 QUAD8, 10 SEG3  
types :

### 5.3 Valeurs testées

| Identification                       | Référence |
|--------------------------------------|-----------|
| Flèche $w_0$ (mm)                    | -1.430    |
| $S_{IXX}$ (MPa) centre, mi-épaisseur | 3900      |
| $S_{IZZ}$ (MPa) centre, mi-épaisseur | 3900      |

### 5.4 Remarques

En l'absence d'un calcul de référence axisymétrique SAMCEF, on se fonde sur le calcul en coque épaisse (toujours SAMCEF) et on ne compare que la flèche et les contraintes au centre à mi-épaisseur.

---

## 6 Synthèse des résultats

---

Les performances en temps calcul et précision des résultats sont satisfaisantes en utilisant le mot-clé `COMPORTEMENT option GREEN`. Par contre, le traitement des non linéarités géométriques par le mot-clé `COMPORTEMENT option PETIT_REAC` fournit des résultats assez éloignés de la solution de référence en adoptant une discrétisation en 6 pas de temps qui conduit à des coûts en temps calcul déjà importants.