

## SDND100 - Lâcher d'un patin frottant avec frottement de type Coulomb

---

### Résumé

On considère le système unidirectionnel à un degré de liberté constitué d'une masse en contact frottant de type Coulomb sur un plan rigide, et d'un ressort l'attachant à un point fixe. La masse est lâchée dans une position initiale hors équilibre. Elle oscille jusqu'à l'arrêt complet au bout d'un temps fini.

Les deux premières modélisations correspondent à la réponse transitoire par recombinaison modale du patin frottant, la troisième correspond à sa réponse transitoire directe. Les trois calculs sont comparés à la solution analytique.

## 1 Problème de référence

---

### 1.1 Géométrie

Direction de déplacement :  $\theta = 45^\circ$  dans le plan  $XY$

### 1.2 Propriétés de matériaux

Raideur du ressort :  $k = 10\,000\text{ N/m}$   
Masse ponctuelle :  $m = 1\text{ kg}$   
Pesanteur :  $g = 10\text{ m/s}^2$   
Coefficient de Coulomb :  $\mu = 0,1$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Le système repose sur le plan  $Z=0$  sur lequel il peut glisser avec un coefficient de frottement de Coulomb de  $\mu = 0,1$ .

### 1.4 Conditions initiales

Déplacement initial de la masse :  $r_0 = 0,85\text{ mm}$  selon la direction  $\theta$ .  
Vitesse initiale nulle.

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Pour un système sans amortissement, l'équation différentielle à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} m \ddot{r} + k r = \mu |F_n| & \text{avec } F_n = -mg \operatorname{sign}(\dot{r}) \\ r(t=0) = r_0 \geq 0 \\ \dot{r}(t=0) = 0 \end{cases}$$

On montre [bib1] que la solution de l'équation différentielle s'écrit :

$$r(t) = \frac{\mu |F_n|}{k} + \left( r_0 - \frac{\mu |F_n|}{k} \right) \cos \omega_0 t$$

L'amplitude des extrema, qui proviennent tous les  $t_{n+1} = \frac{n\pi}{\omega_0}$ , obéit à la loi de récurrence suivante :

$$r(t_{n+1}) = (-1)^n \left[ r_0 - \frac{\mu |F_n|}{k} \right] \cos \omega_0 t$$

$$\text{avec } n=1, 2, \dots, N \text{ tel que } \left| \frac{r(t_{n+1})}{r_0} \right| < \frac{\mu |F_n|}{k r_0}$$

Le mouvement s'arrête quand  $\left| \frac{r(t_{n+1})}{r_0} \right| < \frac{\mu |F_n|}{k r_0}$  à la position  $r(t_{n+1})$ .

### 2.2 Résultats de référence

Valeurs des déplacements dans la direction  $\theta$  pour les instants de changement de signe de la vitesse ( $r(t_1), r(t_2), \dots, r(t_5)$  établis ci-dessus).

### 2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

### 2.4 Références bibliographiques

F. AXISA - Méthodes d'analyse en dynamique non linéaire des structures : non-linéarités de contact - Cours IPSI du 28 au 30 mai 1991

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Un élément de type `DIS_T` sur une maille `POI1` est utilisé pour modéliser le système. Des conditions de relations entre degrés de liberté sont employées pour imposer au mouvement d'être unidirectionnel dans la direction  $\theta$  :

```
LIAISON_DDL = _F ( NOEUD = ('NO1', 'NO1'),  
                  DDL = ('DX' 'DY'),  
                  COEF_MULT = (0.707, -0.707),  
                  COEF_IMPO = 0.)
```

Un obstacle de type `PLAN_Z` (deux plans parallèles séparés par un jeu) est utilisé pour simuler le plan de glissement. On choisit de prendre pour génératrice de ce plan l'axe  $Oy$ , soit `NORM_OBST = (0., 1., 0.)`. L'origine de l'obstacle est `ORIG_OBST = (0., 0., 1.)`. Il reste à définir son jeu qui donne le demi-écartement entre les plans.

Pour qu'il existe une force de réaction du plan sur le système il faut que ce dernier soit légèrement enfoncé dans l'obstacle plan d'une distance  $\delta n$  telle que :  $F_n = K_n \cdot \delta n$ .

Comme  $F_n = mg$ , on a alors  $\delta n = mg / K_n$ .

On a considéré une raideur de choc normale de  $20 N/m$  (raideur fictive qui n'a de sens que pour générer une force de réaction du plan sur le système), on a donc  $\delta n = 0,5$ . L'obstacle `PLAN_Z` ayant pour origine  $Z=1$  et le solide étant en  $Z=0$  ; un jeu de  $0,5m$  créera un enfoncement  $\delta n = 0,5m$  d'où `JEU : 0.5`

Raideur de choc tangentielle :  $K_T = 400\,000 N/m$  : elle est grande devant la raideur de l'oscillateur pour que la phase d'arrêt soit modélisée correctement.

Pas de temps utilisé pour l'intégration temporelle :  $5 \cdot 10^{-4s}$ .

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1

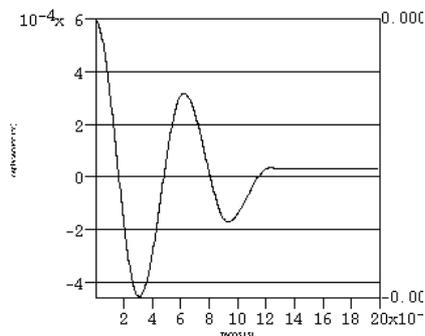
Nombre de mailles et types : 1 `POI1`

## 3.3 Grandeurs testées et résultats

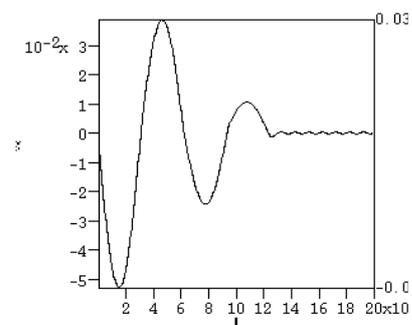
Valeurs des déplacements (en mètres) dans la direction  $\theta$  pour les instants de changement de signe de la vitesse sur la période de temps  $(0; 0.3 s)$ .

Identification	instant (s)	Référence
$DY = r2 \cos 45$	$\pi \times 10^{-2}$	$-4.596E-4$
$DY = r3 \cos 45$	$2\pi \times 10^{-2}$	$3.182E-4$
$DY = r4 \cos 45$	$3\pi \times 10^{-2}$	$-1.768E-4$
$DY = r5 \cos 45$	$4\pi \times 10^{-2}$	$3.536E-5$

On présente ci dessous l'évolution du déplacement et de la vitesse au point *NOI*



Déplacement du point *NOI*



Vitesse du point *NOI*

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Dans la modélisation B, on considère le patin et le plan comme deux structures mobiles. Chaque structure est alors modélisée par un nœud et un élément de type POI1. Le nœud NO2 est supposé bloqué, il matérialise le plan de frottement. On impose des conditions de relations entre degrés de liberté au nœud NO1 (qui modélise le patin) pour que le mouvement soit unidirectionnel dans la direction  $\theta$ .

Un obstacle de type BI\_PLAN\_Z (deux plans parallèles mobiles séparés par un jeu) est utilisé pour simuler le plan de glissement. On choisit de prendre pour génératrice de ce plan l'axe Oy, soit  $NORM\_OBST = (0., 1., 0.)$ . Par défaut, l'origine de l'obstacle est située à mi distance des nœuds NO1 et NO2. Il reste à définir les paramètres DIST\_1 et DIST\_2 qui représentent l'épaisseur de matière autour des nœuds de choc.

Pour qu'il existe une force de réaction du plan sur le système il faut que ce dernier soit légèrement enfoncé dans l'obstacle plan d'une distance  $\delta n$  telle que :  $F_n = K_n \cdot \delta n$ .

Comme  $F_n = mg$ , on a alors  $\delta n = mg / K_n$ .

On a considéré une raideur de choc normale de  $20 N/m$  (raideur fictive qui n'a de sens que pour générer une force de réaction du plan sur le système), on a donc  $\delta n = 0,5 m$ . Sachant que les deux nœuds NO1 et NO2 sont géométriquement confondus, on choisit par exemple  $DIST\_1 = DIST\_2 = \delta n / 2$ .

Raideur de choc tangentielle :  $K_T = 400\,000 N/m$  : elle est grande devant la raideur de l'oscillateur pour que la phase d'arrêt soit modélisée correctement.

Pas de temps utilisé pour l'intégration temporelle :  $5 \cdot 10^{-4} s$ .

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2

Nombre de mailles et types : 2 POI1

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

Valeurs des déplacements (en mètres) dans la direction de l'oscillateur pour les instants de changement de signe de la vitesse sur la période de temps  $(0; 0.3 s)$ .

Identification	instant (s)	Référence
$DY = r2 \cos 45$	$\pi \times 10^{-2}$	-4.596E-4
$DY = r3 \cos 45$	$2\pi \times 10^{-2}$	3.182E-4
$DY = r4 \cos 45$	$3\pi \times 10^{-2}$	-1.768E-4
$DY = r5 \cos 45$	$4\pi \times 10^{-2}$	3.536E-5

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Cette modélisation correspond à la réponse transitoire directe du patin frottant.

La direction normale de contact est l'axe local  $X$  qui correspond dans le cas test à l'axe global  $Z$ . Le plan de glissement est le plan local  $(Y, Z)$  soit le plan  $(X, Y)$  dans le repère global. On oriente donc l'élément de choc à un nœud, avec le mot clé ORIENTATION de l'opérateur AFFE\_CARA\_ELEM de la façon suivante :

```
ORIENTATION= _F( MAILLE='EL1', CARA: 'VECT_X_Y' ,  
VALE = ( 0., 0., -1., 0., 1., 0. ) )
```

Pour pouvoir obtenir une force de réaction du plan sur le système il faut que ce dernier soit légèrement enfoncé dans l'obstacle plan d'une distance  $\delta n$  telle que :  $F_n = K_n \cdot \delta n$ .

La réaction équilibre le poids du patin, on a donc :  $F_n = mg$  c'est-à-dire  $\delta n = mg / K_n$ .

On a considéré une raideur de choc normale de  $20 \text{ N/m}$  (raideur fictive qui n'a de sens que pour générer une force de réaction du plan sur le système), on a donc  $\delta n = 0,5$  d'où  $\text{DIST}_1 = 0.5$ .

La raideur de choc tangentielle considérée est  $K_T = 400\,000 \text{ N/m}$ , le coefficient de Coulomb vaut 0,1.

La loi de comportement de choc est donc définie de la façon suivante dans DEFI\_MATERIAU :

```
DIS_CONTACT = _F ( RIGI_NOR= 20.,  
DIST_1 = 0.5,  
RIGI_TAN = 400000.,  
COULOMB = 0.1)
```

On utilise un pas de temps de  $5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$  pour l'intégration temporelle.

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1  
Nombre de mailles et types : 1 POI1

### 5.3 Grandeurs testées et résultats

Valeurs des déplacements dans la direction de l'oscillateur pour les instants approchés de changement de signe de la vitesse sur la période de temps  $(0; 0.2 \text{ s})$ .

Identification	instants (s)	Référence
$DY = r2 \cos 45$	$\pi \times 10^{-2}$	-4,585E-04
$DY = r3 \cos 45$	$2\pi \times 10^{-2}$	3,173E-04
$DY = r4 \cos 45$	$3\pi \times 10^{-2}$	-1,754E-04
$DY = r5 \cos 45$	$4\pi \times 10^{-2}$	3,550E-05

## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation

Cette modélisation correspond à la modélisation B, dans laquelle l'option de frottement unidirectionnel est activée. On considère le patin et le plan comme deux structures mobiles. Chaque structure est alors modélisée par un nœud et un élément de type `POI1`. Le nœud `NO2` est supposé bloqué, il matérialise le plan de frottement. On impose des conditions de relations entre degrés de liberté au nœud `NO1` (qui modélise le patin) pour que le mouvement soit unidirectionnel dans la direction  $\theta$ .

Un obstacle de type `BI_PLAN_Z` (deux plans parallèles mobiles séparés par un jeu) est utilisé pour simuler le plan de glissement. On choisit de prendre pour génératrice de ce plan l'axe  $Oy$ , soit `NORM_OBST = (0., 1., 0.)`. Par défaut, l'origine de l'obstacle est située à mi distance des nœuds `NO1` et `NO2`. Il reste à définir les paramètres `DIST_1` et `DIST_2` qui représentent l'épaisseur de matière autour des nœuds de choc.

Le frottement unidirectionnel implique que le coefficient de frottement n'est plus isotrope dans le plan défini précédemment. Il vaut 0 suivant l'axe renseigné dans `NORM_OBST` et  $\mu$  dans la direction perpendiculaire. Pour un angle  $\theta$  de  $\pi/2$ , ceci correspond à diviser le coefficient de frottement par  $\sqrt{2}$ , par rapport à la modélisation B.

Pour qu'il existe une force de réaction du plan sur le système il faut que ce dernier soit légèrement enfoncé dans l'obstacle plan d'une distance  $\delta n$  telle que :  $F_n = K_n \cdot \delta n$ .

Comme  $F_n = mg$ , on a alors  $\delta n = mg / K_n$ .

On a considéré une raideur de choc normale de  $20 \text{ N/m}$  (raideur fictive qui n'a de sens que pour générer une force de réaction du plan sur le système), on a donc  $\delta n = 0,5 \text{ m}$ . Sachant que les deux nœuds `NO1` et `NO2` sont géométriquement confondus, on choisit par exemple `DIST_1 = DIST_2 =  $\delta n / 2$` .

Raideur de choc tangentielle :  $K_T = 400\,000 \text{ N/m}$  : elle est grande devant la raideur de l'oscillateur pour que la phase d'arrêt soit modélisée correctement.

Pas de temps utilisé pour l'intégration temporelle :  $5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ .

### 6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2

Nombre de mailles et types : 2 `POI1`

### 6.3 Grandeurs testées et résultats

Valeurs des déplacements dans la direction de l'oscillateur pour les instants approchés de changement de signe de la vitesse sur la période de temps  $(0; 0.2 \text{ s})$ .

Identification	instants (s)	Référence
$DY = r2 \cos 45$	$\pi \times 10^{-2}$	-5,010E-04
$DY = r3 \cos 45$	$2 \pi \times 10^{-2}$	4,010E-04
$DY = r4 \cos 45$	$3 \pi \times 10^{-2}$	-3,010E-04
$DY = r5 \cos 45$	$4 \pi \times 10^{-2}$	2,010E-04

## 7 Synthèse des résultats

---

La solution analytique du problème avec frottement est reproduite avec une très bonne précision ( $<0.5\%$ ). Cela demande néanmoins l'utilisation d'un paramètre de raideur tangente assez élevé par rapport à la rigidité du système ainsi qu'un pas de temps d'intégration relativement réduit. Sur cet exemple, le calcul non linéaire direct est beaucoup plus coûteux en temps de calcul que celui sur base modale.