

SSL403 - Flambement d'une poutre sous l'effet de son poids propre

Résumé :

Ce test permet de valider en élasticité linéaire le chargement dû aux forces de pesanteur pour une modélisation de type poutre droite d'Euler (POU_D_E). Il permet également la mise en œuvre et la validation du calcul de la matrice de rigidité géométrique.

La solution de référence est analytique et les résultats jugés satisfaisants.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

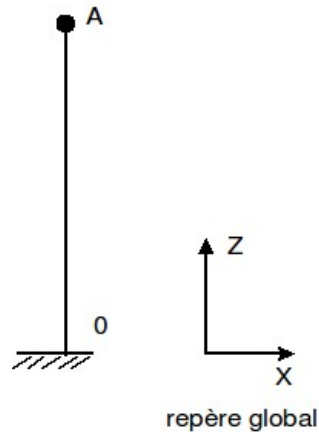


Figure 1.1-a : Poutre verticale.

Section rectangulaire : $H_y = 0.01 \text{ m}$, $H_z = 0.01 \text{ m}$
Longueur : $L = 1 \text{ m}$

1.2 Propriétés des matériaux

Module d'Young : $E = 2.10^{11} \text{ Pa}$
Coefficient de Poisson : $\nu = 0.3$
Masse volumique : $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

1.3 Conditions aux limites et chargement

Condition aux limites :
Extrémité encastrée (0) : $DX = DY = DZ = DRX = DRY = DRZ = 0$.

Chargement :

Force de pesanteur : p poids par unité de longueur avec $g = (0, 0, -9.81)$ (donné en repère global).

2 Solutions de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour les solutions de référence

En repère local, x suivant l'axe OA de la poutre, le moment fléchissant, à l'abscisse x , a pour expression :

$$M_{F_y}(x) = p \int_x^L [v(\xi) - v(x)] d\xi.$$

La flèche $v(x)$ satisfait donc l'équation :

$$E I_z \frac{d^2 v}{dx^2} = p \int_x^L [v(\xi) - v(x)] d\xi = -p \left[\int_x^L v(\xi) d\xi + (L-x)v(x) \right]$$

En dérivant les deux membres, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{d^3 v}{dx^3} + \frac{p}{E I_z} (L-x) \frac{dv}{dx} = 0$$

La fonction $v'(x) = \frac{dv}{dx}$ satisfait l'équation différentielle linéaire et homogène du second ordre :

$$\frac{d^2 v'}{dx^2} + \frac{p}{E I_z} (L-x) v' = 0,$$

qui peut être résolue à l'aide des fonctions de Bessel. On trouve alors la valeur du poids linéique critique égale à :

$$p_c = 7,837 \frac{E I_z}{L^3}.$$

La solution analytique donne numériquement :

$$p_c = 7,837 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot \frac{10^{-8}}{12} = 1,3061667 \cdot 10^3.$$

2.2 Résultats de référence

La valeur critique du multiplicateur λ : $\lambda_c = \frac{P_c}{\rho S g}$

2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

2.4 Références bibliographiques

- [1] Rapport n° 2314/A de l'Institut Aérotechnique « Proposition et réalisation de nouveaux cas tests manquant à la validation des poutres Aster »

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé de 10 éléments poutre droite d'Euler.

3.2 Caractéristiques du maillage

Il est constitué de 10 éléments `POU_D_E`.

3.3 Grandeurs testées et résultats

Valeur propre du système $(K + \lambda K_G) X = 0$:

	Référence	Erreur
λ	170.701	0.01

3.4 Remarque

Puisque $p_c = \lambda \rho S g$, ($\rho S g$ représente la pré-contrainte linéique), nous avons comme chargement critique : $p_c = 1300,84 \text{ N.m}^{-1}$.

4 Synthèse des résultats

Les résultats sont très proches de la solution analytique (écart : 1% pour 10 éléments). Cet écart est fonction de la finesse de discrétisation étant données les hypothèses utilisées pour la rigidité géométrique (cf. [R3.08.01]). Ceci valide donc ce type de chargement pour le flambement d'Euler.