

## SDLX400 – Poutre articulée sur appui élastique

---

### Résumé :

Ce test consiste à calculer les fréquences propres d'une poutre dont une des extrémités est articulée et l'autre est soit libre, soit appuyée sur un ressort.

La solution de référence de ce problème est analytique.

L'originalité de ce test est de modéliser cette poutre au moyen d'éléments volumiques et poutres.

Ce test comporte trois modélisations :

- Modélisation A : POU\_D\_E ;
- Modélisation B : 3D et POU\_D\_E ;
- Modélisation C : POU\_D\_TG.

Le raccord 3D-poutre est effectué par LIAISON\_ELEM dans l'opérateur AFFE\_CHAR\_MECA.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

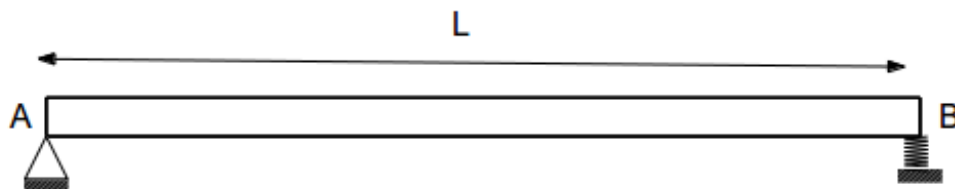


Figure 1.1 Géométrie du problème et système de chargement

Poutre à section carrée de côté :  $c=0.014$  m  
Longueur de la poutre :  $L=0.783$  m

### 1.2 Propriétés du matériau

|                        |                                  |
|------------------------|----------------------------------|
| Module d'Young         | $E=6.07 \times 10^{10}$ Pa       |
| Coefficient de Poisson | $\nu=0$                          |
| Masse volumique        | $\rho=2400.0$ kg.m <sup>-3</sup> |
| Raideur du ressort     | $k=18\,000$ N.m <sup>-1</sup>    |

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Déplacement imposé :

|              |                                                    |
|--------------|----------------------------------------------------|
| Au point $A$ | $DX=0$ , $DY=0$                                    |
| Au point $B$ | Cas 1 : extrémité libre<br>Cas 2 : appui élastique |

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

#### 2.1.1 Cas 1 : extrémité libre

L'équation de la poutre s'écrit :

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{-\rho S}{EI} \frac{d^2 v}{dt^2} \quad (1)$$

On cherche une solution de la forme :

$$v(x) = \sin(\omega t) [A \cos(kx) + B \sin(kx) + C \cosh(kx) + D \sinh(kx)] \quad (2)$$

$$\text{avec } \omega = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} k^2$$

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\text{En } x=0, \quad v=0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = 0$$

$$\text{En } x=L, \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^3 v}{dx^3} = 0$$

En remplaçant  $v$  par l'expression (2), on obtient :

- En  $x=0$ ,  $A=C=0$  ;
- En  $x=L$ ,  $\sin(kL) \cosh(kL) = \cos(kL) \sinh(kL)$  (3)

Les six premières racines de (3) sont données dans le tableau suivant :

| $kL$    |
|---------|
| 0       |
| 3.9266  |
| 7.06858 |
| 10.2102 |
| 13.3518 |
| 16.4934 |

On en déduit les valeurs de  $\omega_i$ ,  $i=1, \dots, 6$ .

#### 2.1.2 Cas 2 : extrémité en appui élastique

L'équation aux valeurs propres est la suivante :

$$\sin(kL) \left( k^3 L^3 \frac{EI}{L^3} \cosh(kL) - K \sinh(kL) \right) - \sinh(kL) \left( k^3 L^3 \frac{EI}{L^3} \cos(kL) + K \sin(kL) \right) = 0 \quad (4)$$

Les pulsations propres sont données par :

$$\omega = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} k^2 L^2 \quad (5)$$

Les six premières racines de (4) sont données dans le tableau suivant :

| $kL$      |
|-----------|
| 2.7880886 |
| 4.5619625 |
| 7.1895724 |
| 10.249031 |
| 13.368916 |
| 16.502406 |

On en déduit alors les valeurs de  $\omega_i$ ,  $i=1, \dots, 6$ .

## 2.2 Résultats de référence

### 2.2.1 Cas 1 : extrémité libre

La structure possède un mode rigide à fréquence nulle. Le tableau suivant présente les fréquences non nulles.

| Mode | Fréquence ( Hz ) |
|------|------------------|
| 1    | 85.5             |
| 2    | 277              |
| 3    | 577.9            |
| 4    | 988.2            |
| 5    | 1507.9           |

### 2.2.2 Cas 2 : extrémité en appui élastique

| Mode | Fréquence ( Hz ) |
|------|------------------|
| 1    | 43.1             |
| 2    | 115.4            |
| 3    | 286.5            |
| 4    | 582.3            |

|   |        |
|---|--------|
| 5 | 990.7  |
| 6 | 1509.6 |

## 2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation A



Figure 3.1 Maillage du problème

Modélisation `POU_D_E` et élément discret de type `DIS_TR`.

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 11

Nombre de mailles et types : 10 `SEG2` et 1 `POI1`

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

#### 3.3.1 Cas 1 : extrémité libre

METHODE= ' SORENSEN '

| Identification | Valeur de référence | Type de référence | Tolérance (%) |
|----------------|---------------------|-------------------|---------------|
| Mode 1         | 85.5                | 'ANALYTIQUE '     | 0.1           |
| Mode 2         | 277                 | 'ANALYTIQUE '     | 0.1           |
| Mode 3         | 577.9               | 'ANALYTIQUE '     | 0.1           |
| Mode 4         | 988.2               | 'ANALYTIQUE '     | 0.3           |
| Mode 5         | 1507.9              | 'ANALYTIQUE '     | 0.5           |

METHODE= ' JACOBI '

| Identification | Valeur de référence | Type de référence | Tolérance (%) |
|----------------|---------------------|-------------------|---------------|
| Mode 1         | 85.5                | 'ANALYTIQUE '     | 0.1           |
| Mode 2         | 277                 | 'ANALYTIQUE '     | 0.1           |
| Mode 3         | 577.9               | 'ANALYTIQUE '     | 0.1           |
| Mode 4         | 988.2               | 'ANALYTIQUE '     | 0.3           |
| Mode 5         | 1507.9              | 'ANALYTIQUE '     | 0.5           |

#### 3.3.2 Cas 2 : extrémité en appui simple

METHODE= ' SORENSEN '

| Identification | Valeur de référence | Type de référence | Tolérance (%) |
|----------------|---------------------|-------------------|---------------|
| Mode 1         | 43.1                | 'ANALYTIQUE '     | 0.1           |
| Mode 2         | 115.4               | 'ANALYTIQUE '     | 0.1           |
| Mode 3         | 286.5               | 'ANALYTIQUE '     | 0.1           |

|        |        |               |     |
|--------|--------|---------------|-----|
| Mode 4 | 582.3  | 'ANALYTIQUE ' | 0.1 |
| Mode 5 | 990.7  | 'ANALYTIQUE ' | 0.3 |
| Mode 6 | 1509.6 | 'ANALYTIQUE ' | 0.5 |

METHODE= ' JACOBI '

| Identification | Valeur de référence | Type de référence | Tolérance (%) |
|----------------|---------------------|-------------------|---------------|
| Mode 1         | 43.1                | 'ANALYTIQUE '     | 0.1           |
| Mode 2         | 115.4               | 'ANALYTIQUE '     | 0.1           |
| Mode 3         | 286.5               | 'ANALYTIQUE '     | 0.1           |
| Mode 4         | 582.3               | 'ANALYTIQUE '     | 0.1           |
| Mode 5         | 990.7               | 'ANALYTIQUE '     | 0.3           |
| Mode 6         | 1509.6              | 'ANALYTIQUE '     | 0.5           |

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation B

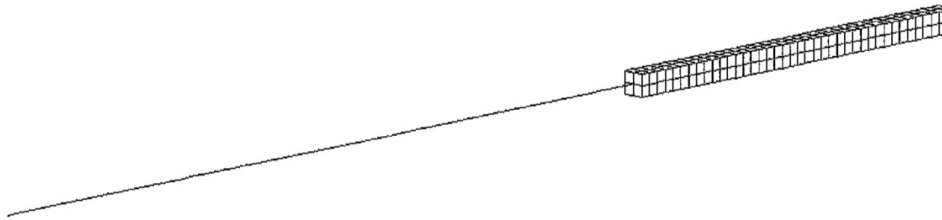


Figure 4.1 Maillage du problème

Modélisation `POU_D_E` pour un tiers de la structure et le reste en modélisation `3D`, élément discret de type `DIS_TR`.

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1303

Nombre de mailles et types : 160 `HEXA20`, 8 `QUAD8`, 80 `SEG2` et 1 `POI1`

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

#### 4.3.1 Cas 1 : extrémité libre

METHODE= ' SORENSEN '

| Identification | Valeur de référence | Type de référence | Tolérance (%) |
|----------------|---------------------|-------------------|---------------|
| Mode 1         | 85.5                | 'ANALYTIQUE '     | 0.85          |
| Mode 2         | 277                 | 'ANALYTIQUE '     | 0.7           |
| Mode 3         | 577.9               | 'ANALYTIQUE '     | 0.8           |
| Mode 4         | 988.2               | 'ANALYTIQUE '     | 1.2           |
| Mode 5         | 1507.9              | 'ANALYTIQUE '     | 3.6           |

METHODE= ' JACOBI '

| Identification | Valeur de référence | Type de référence | Tolérance (%) |
|----------------|---------------------|-------------------|---------------|
| Mode 1         | 85.5                | 'ANALYTIQUE '     | 0.85          |
| Mode 2         | 277                 | 'ANALYTIQUE '     | 0.7           |
| Mode 3         | 577.9               | 'ANALYTIQUE '     | 0.8           |
| Mode 4         | 988.2               | 'ANALYTIQUE '     | 1.2           |
| Mode 5         | 1507.9              | 'ANALYTIQUE '     | 3.7           |

#### 4.3.2 Cas 2 : extrémité en appui simple

METHODE= ' SORENSEN '

| Identification | Valeur de référence | Type de référence | Tolérance (%) |
|----------------|---------------------|-------------------|---------------|
|----------------|---------------------|-------------------|---------------|

|        |        |               |     |
|--------|--------|---------------|-----|
| Mode 1 | 43.1   | 'ANALYTIQUE ' | 0.4 |
| Mode 2 | 115.4  | 'ANALYTIQUE ' | 0.6 |
| Mode 3 | 286.5  | 'ANALYTIQUE ' | 0.6 |
| Mode 4 | 582.3  | 'ANALYTIQUE ' | 0.8 |
| Mode 5 | 990.7  | 'ANALYTIQUE ' | 1.2 |
| Mode 6 | 1509.6 | 'ANALYTIQUE ' | 3.7 |

METHODE= ' JACOBI '

| Identification | Valeur de référence | Type de référence | Tolérance (%) |
|----------------|---------------------|-------------------|---------------|
| Mode 1         | 43.1                | 'ANALYTIQUE '     | 0.4           |
| Mode 2         | 115.4               | 'ANALYTIQUE '     | 0.6           |
| Mode 3         | 286.5               | 'ANALYTIQUE '     | 0.6           |
| Mode 4         | 582.3               | 'ANALYTIQUE '     | 0.8           |
| Mode 5         | 990.7               | 'ANALYTIQUE '     | 1.2           |
| Mode 6         | 1509.6              | 'ANALYTIQUE '     | 3.7           |

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation C



Figure 5.1 Maillage du problème

Modélisation `POU_D_TG` et élément discret de type `DIS_TR`.

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 11

Nombre de mailles et types : 10 `SEG2` et 1 `POI1`

### 5.3 Grandeurs testées et résultats

#### 5.3.1 Cas 1 : extrémité libre

METHODE= ' SORENSEN '

| Identification | Valeur de référence | Type de référence | Tolérance (%) |
|----------------|---------------------|-------------------|---------------|
| Mode 1         | 85.5                | ' ANALYTIQUE '    | 0.11          |
| Mode 2         | 277                 | ' ANALYTIQUE '    | 0.3           |
| Mode 3         | 577.9               | ' ANALYTIQUE '    | 0.4           |
| Mode 4         | 988.2               | ' ANALYTIQUE '    | 0.6           |
| Mode 5         | 1507.9              | ' ANALYTIQUE '    | 0.7           |

METHODE= ' JACOBI '

| Identification | Valeur de référence | Type de référence | Tolérance (%) |
|----------------|---------------------|-------------------|---------------|
| Mode 1         | 85.5                | ' ANALYTIQUE '    | 0.11          |
| Mode 2         | 277                 | ' ANALYTIQUE '    | 0.3           |
| Mode 3         | 577.9               | ' ANALYTIQUE '    | 0.4           |
| Mode 4         | 988.2               | ' ANALYTIQUE '    | 0.6           |
| Mode 5         | 1507.9              | ' ANALYTIQUE '    | 0.7           |

#### 5.3.2 Cas 2 : extrémité en appui simple

METHODE= ' SORENSEN '

| Identification | Valeur de référence | Type de référence | Tolérance (%) |
|----------------|---------------------|-------------------|---------------|
| Mode 1         | 43.1                | ' ANALYTIQUE '    | 0.1           |
| Mode 2         | 115.4               | ' ANALYTIQUE '    | 0.1           |

|        |        |               |     |
|--------|--------|---------------|-----|
| Mode 3 | 286.5  | 'ANALYTIQUE ' | 0.2 |
| Mode 4 | 582.3  | 'ANALYTIQUE ' | 0.4 |
| Mode 5 | 990.7  | 'ANALYTIQUE ' | 0.6 |
| Mode 6 | 1509.6 | 'ANALYTIQUE ' | 0.7 |

METHODE= ' JACOBI '

| Identification | Valeur de référence | Type de référence | Tolérance (%) |
|----------------|---------------------|-------------------|---------------|
| Mode 1         | 43.1                | 'ANALYTIQUE '     | 0.1           |
| Mode 2         | 115.4               | 'ANALYTIQUE '     | 0.1           |
| Mode 3         | 286.5               | 'ANALYTIQUE '     | 0.2           |
| Mode 4         | 582.3               | 'ANALYTIQUE '     | 0.4           |
| Mode 5         | 990.7               | 'ANALYTIQUE '     | 0.6           |
| Mode 6         | 1509.6              | 'ANALYTIQUE '     | 0.7           |

## 6 Synthèse des résultats

---

Les résultats obtenus avec les éléments de poutre `POU_D_E` et `POU_D_TG` sont en très bon accord avec la solution analytique et respectivement inférieurs à 0.46 % et 0.61 %. Les résultats obtenus en mélangeant deux types d'éléments (poutre et volumique) puis en raccordant les degrés de liberté au moyen de l'option `LIAISON_ELEM` sont moins précis (mais l'écart reste inférieur à 3.61 %).

Il est à noter que les fréquences propres calculées sont identiques quelle que soit la méthode utilisée dans le solveur modal (`SORENSEN` ou `JACOBI`).