

SDLS503 - Vibrations de flexion d'une poutre sandwich

Résumé :

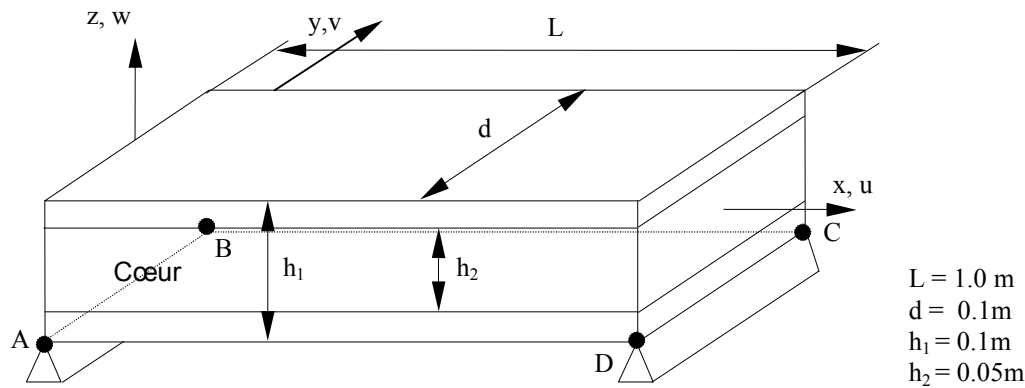
Ce test représente un calcul en analyse modale d'une poutre sandwich simplement supportée. Ce test permet de valider :

- la modélisation éléments finis `DKT` avec des mailles `QUAD4` et `TRIA3`,
- la modélisation éléments finis `DST` avec des mailles `QUAD4` et `TRIA3`,
- la prise en compte de la rigidité en cisaillement transverse,
- la prise en compte de matériau composite.

Les fréquences et les modes obtenus sont comparés à une solution de référence analytique. Il faut noter que la modélisation `DKT`, dont la formulation ne prend pas en compte le cisaillement transverse, n'est pas adaptée pour modéliser ce cas-test. Ainsi, les erreurs sont très importantes pour les modélisations A et B. Les résultats obtenus avec `DST` sont satisfaisants.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



1.2 Propriétés du matériau

Revêtements : $E_x = 4.10^{10} \text{ Pa}$ $G_{xz} = 4.10^9 \text{ Pa}$ $\nu_{xz} = 0.3$ $\rho_1 = 2000 \text{ kg/m}^3$
 Cœur : $E_x = 4.10^7 \text{ Pa}$ $G_{xz} = 1.5.10^7 \text{ Pa}$ $\nu_{xz} = 0.3$ $\rho_2 = 50 \text{ kg/m}^3$
 Coefficient de cisaillement K : $1/K = 110.8$

Les coefficients de poisson sont identiques : $\nu_{xz} = \nu_{xy} = \nu_{yz}$

1.3 Conditions aux limites et chargements

La poutre repose simplement sur les cotés AB et CD .

1.4 Conditions initiales

Sans objet

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Le calcul s'effectue à partir des relations d'équilibre dynamique et de comportement [bib2] rappelées ci-après :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial X} + T_y &= \langle \rho I \rangle \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} & \frac{\partial T_y}{\partial X} &= \langle \rho S \rangle \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ M_z &= \langle E I \rangle \frac{\partial \theta_z}{\partial X} & T_y &= K \langle G S \rangle \frac{\partial v}{\partial X} - \theta_z \end{aligned}$$

Ces relations permettent d'écrire l'équation du mouvement de flexion dynamique transverse $v(x, t)$. On obtient l'équation aux fréquences propres après avoir associé les conditions aux limites. L'équation aux fréquences propres s'écrit :

$$\sin(X_2) = 0 \quad \text{avec} \quad X_2 = \left[\bar{\omega}^2 \frac{(1+a)}{2} + \sqrt{\bar{\omega}^2 \left(\bar{\omega}^2 \left(\frac{1-a}{2} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right)} \right]^{1/2}$$

et

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\langle \rho I \rangle \omega^2 l^2}{\langle E I \rangle} ; \bar{r}^2 = \frac{\langle \rho I \rangle}{\langle \rho S \rangle l^2} ; a = \frac{\langle \rho S \rangle \langle E I \rangle}{K \langle \rho I \rangle \langle G S \rangle}$$

Les solutions de l'équation aux fréquences propres s'écrivent alors : $X_2 = n\pi \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

2.2 Résultats de référence

5 premières fréquences et modes propres de flexion associés.

- Fréquence mode 1 : 64.476 Hz 
- Fréquence mode 2 : 131.918 Hz 
- Fréquence mode 3 : 198.734 Hz 
- Fréquence mode 4 : 265.383 Hz 
- Fréquence mode 5 : 331.963 Hz 

2.3 Incertitudes sur la solution

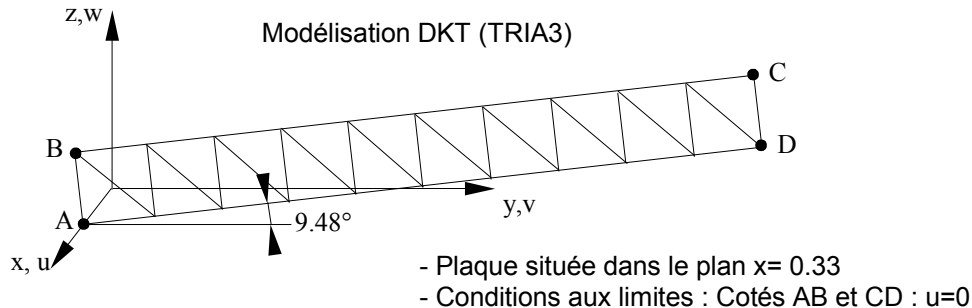
La solution de référence est calculée dans le cadre des hypothèses de la théorie des poutres [bib2] : $\sigma_y = \sigma_z = 0$.

2.4 Références bibliographiques

- 1) VPCS : Progiciel de calcul de structures composites ; Exemples de validation. Revue des composites et des matériaux avancés, Volume 5 - numéro hors série/ 1995 - Edition Hermes.
- 2) CIEAUX J.M. : Flexion dynamique des poutres composites à phases orthotropes ; Validité du domaine quasi-statique, thèse de l'université Paul Sabatier Toulouse III, 1988.

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation



3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 22
Nombre de mailles et type : 20 TRIA3

3.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	Aster	% différence
Fréquence mode 1	64.476	277.449	330.
Fréquence mode 2	131.918	1105.83	738.
Fréquence mode 3	198.734	2473.80	1.14E3
Fréquence mode 4	265.383	4363.97	1.54E3
Fréquence mode 5	331.963	6753.904	1.93E3

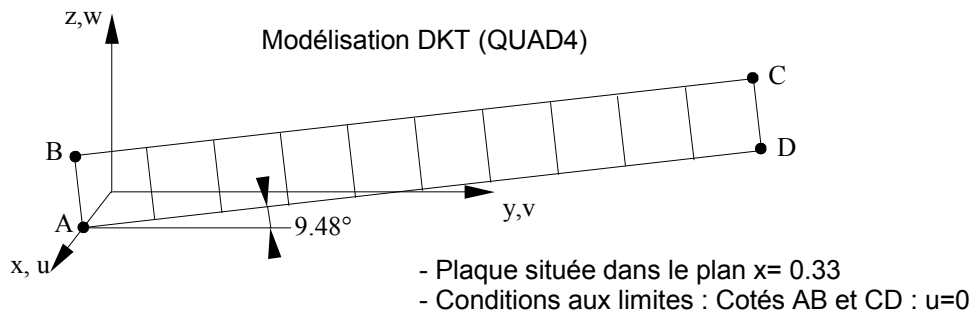
3.4 Remarques

Dans le tableau de résultats, nous avons reporté les fréquences dont les modes sont identiques aux modes de référence.

- les effets du cisaillement transverse sont négligés dans la modélisation DKT,
- les résultats Aster sont très supérieurs aux résultats de référence,
- apparition d'un mode de membrane entre les modes 2 et 3 et entre les modes 5 et 6 de référence.

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation



4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 22
Nombre de mailles et type : 10 QUAD4

4.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	Aster	% différence
Fréquence mode 1	64.476	277.788	331
Fréquence mode 2	131.918	1111.225	742.
Fréquence mode 3	198.734	2500.930	1.16E3
Fréquence mode 4	265.383	4449.073	1.52E3
Fréquence mode 5	331.963	6960.324	2.00E3

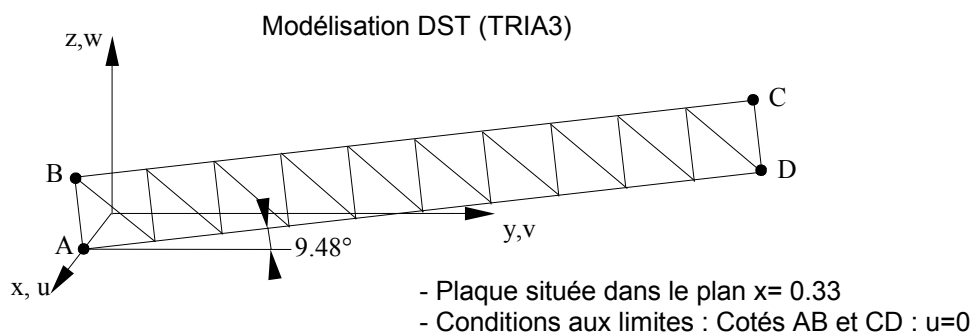
4.4 Remarques

Dans le tableau de résultats, nous avons reporté les fréquences dont les modes sont identiques aux modes de référence.

- les effets du cisaillement transverse sont négligés dans la modélisation DKT,
- les résultats Aster sont très supérieurs aux résultats de référence,
- apparition d'un mode de membrane entre les modes 2 et 3 et entre les modes 5 et 6 de référence.

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation



5.2 Caractéristiques du maillage

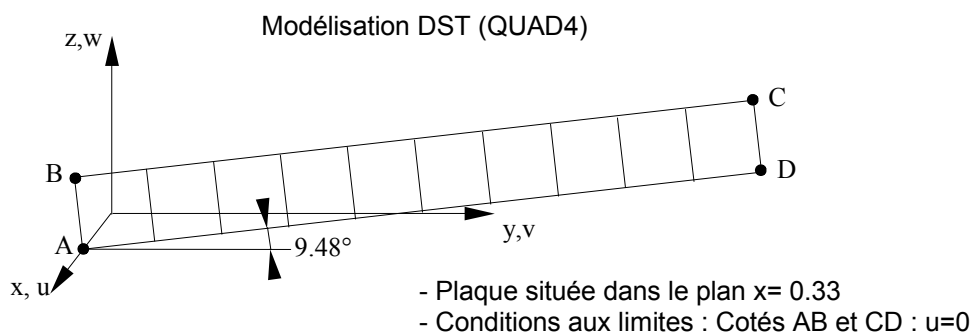
Nombre de nœuds : 22
Nombre de mailles et type : 20 TRIA3

5.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	Aster	% différence
Fréquence mode 1	64.476	64.573	0.150
Fréquence mode 2	131.918	133.987	1.568
Fréquence mode 3	198.734	206.046	3.679
Fréquence mode 4	265.383	282.875	6.591
Fréquence mode 5	331.963	365.919	10.229

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation



6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 22
Nombre de mailles et type : 10 QUAD4

6.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	Aster	% différence
Fréquence mode 1	64.476	64.595	0.184
Fréquence mode 2	131.918	131.495	-0.320
Fréquence mode 3	198.734	196.861	-0.942
Fréquence mode 4	265.383	260.247	-1.935
Fréquence mode 5	331.963	320.409	-3.480

7 Synthèse des résultats

La modélisation `DKT` n'est pas adaptée pour modéliser ce cas-test, les erreurs sont très importantes. La formulation `DKT` ne prend pas en compte le cisaillement transverse contrairement à la modélisation `DST`. Pour ce type d'exemple, où la structure est constituée d'un matériau composite et relativement épaisse ($h/L=0.1$), il est préférable d'utiliser la modélisation `DST`.

Les résultats obtenus avec `DST` sont :

- satisfaisants pour les 3 premières fréquences avec la maille `TRIA3` et pour les 5 premières fréquences pour la maille `QUAD4` avec une meilleure précision pour la maille `QUAD4`,
- l'erreur de 10% pour la 4^{ième} et 5^{ième} fréquence avec la maille `TRIA3` est significative. Un maillage plus fin devrait permettre d'améliorer les résultats en ayant une meilleure représentation des derniers modes.