

## SDLS502 - Plaque carrée « solide » simplement supportée

---

### Résumé :

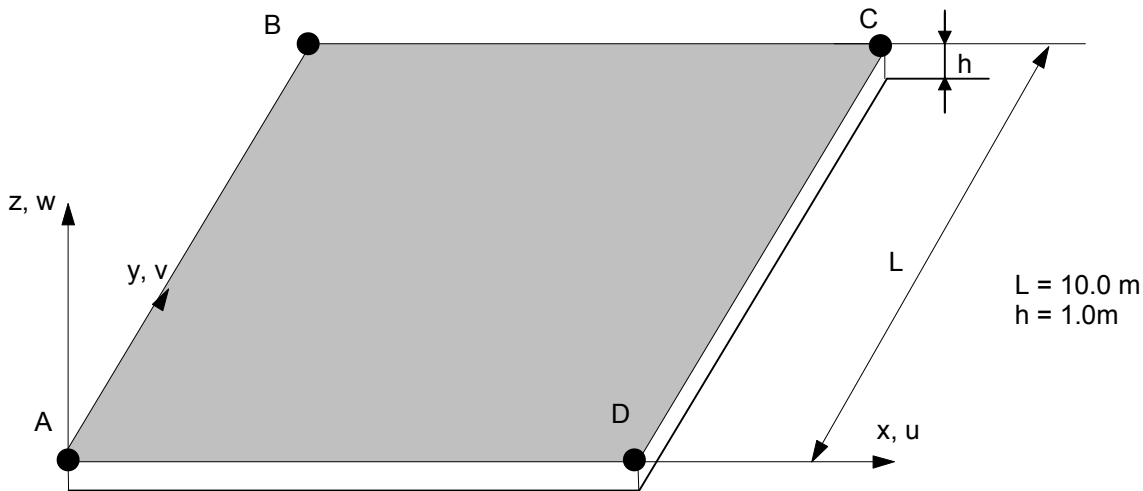
Ce test représente un calcul en analyse modale dynamique d'une plaque carrée épaisse simplement supportée. Ce test permet de valider :

- les modélisations éléments finis DST, DKT, COQUE\_3D avec des mailles QUAD4 et TRIA3, QUAD8 et TRIA6, et 3D avec des mailles HEXA20,
- la prise en compte de la rigidité en cisaillement transverse.

Les fréquences et les modes obtenus sont comparés à une solution de référence, proposée par NAFEMS, obtenue avec un calcul éléments finis de type volumique.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



### 1.2 Propriétés du matériau

Les propriétés du matériau constituant la plaque sont :

$E = 2.10^{11}$  Pa Module d'Young  
 $\nu = 0.3$  Coefficient de poisson  
 $\rho = 8000. kg/m^3$  Masse volumique

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Plaque simplement supportée sur son contour.

### 1.4 Conditions initiales

Sans objet

## 2 Solution de référence

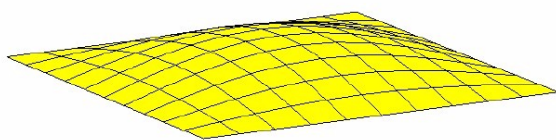
### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

la solution de référence proposée par NAFEMS [bib1] a été obtenue à partir un calcul éléments finis 3D avec des éléments briques à 20 nœuds et avec un maillage  $4 \times 4$  (plan  $xy$ ) et 1 élément suivant l'épaisseur.

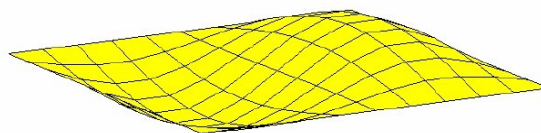
### 2.2 Résultats de référence

7 premières fréquences non nulles et les modes propres associés, les trois premiers modes sont ceux de corps rigides :

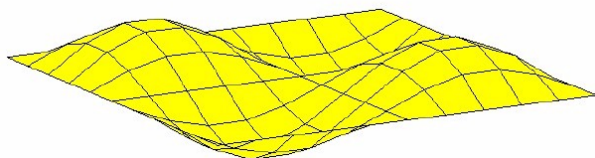
- Fréquence (mode 4 hors plan) : 44.762 *hz*
- Fréquence (modes 5 & 6 hors plan) : 110.52 *hz*
- Fréquence (mode 7 hors plan) : 169.08 *hz*
- Fréquence (Mode 8 dans le plan) : 193.93 *hz*
- Fréquence (mode 9 & 10 dans le plan) : 206.64 *hz*



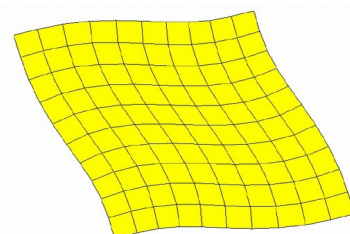
mode 4 hors plan



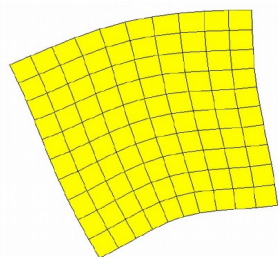
mode 5&6 hors plan



mode 7 hors plan



mode 8 dans le plan



mode 9&10 dans le plan

### 2.3 Incertitudes sur la solution

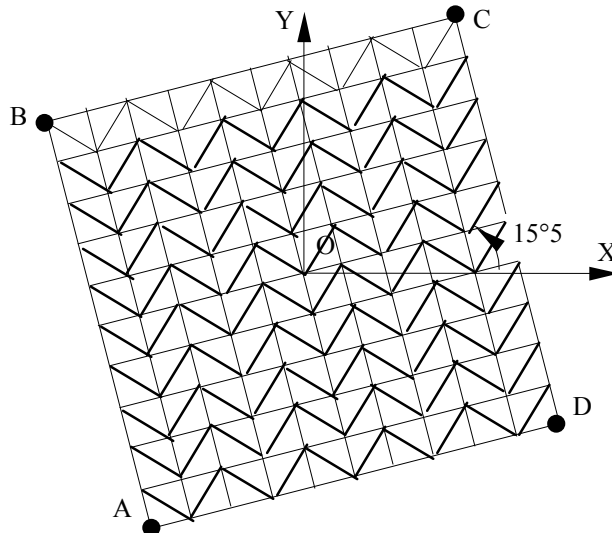
< 2% pour un maillage identique à celui du [§2.1], c'est-à-dire avec peu d'éléments.

### 2.4 Références bibliographiques

1. NAFEMS : The standard NAFEMS Benchmarks, TNSB, Rev. 3, 5 octobre 1990.

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation DST (TRIA3)

- La plaque est située dans le plan  $Z = 2.3$
- Point O : (0. ; 0. ; 2.3)

Conditions aux limites :

- Cotés AB, BC, CD, DA :  $w=0$

Pour valider la modélisation dans un repère différent du repère global, la plaque est tournée de  $15,5^\circ$ . Ceci ne doit pas changer les fréquences propres obtenues.

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 122  
Nombre de mailles et types : 200 TRIA3

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

| Identification                          | Instants | Référence | Aster              | % différence     |
|-----------------------------------------|----------|-----------|--------------------|------------------|
| Fréquence<br>(mode 4 hors plan)         |          | 44.762    | 44.989             | 0.507            |
| Fréquence<br>(modes 5 & 6 hors plan)    |          | 110.52    | 107.608<br>107.880 | -2.634<br>-2.388 |
| Fréquence<br>(mode 7 hors plan)         |          | 169.08    | 165.454            | -2.144           |
| Fréquence<br>(Mode 8 dans le plan)      |          | 193.93    | 196.089            | 1.114            |
| Fréquence<br>(mode 9 & 10 dans le plan) |          | 206.64    | 211.658<br>212.000 | 2.428<br>2.594   |

## 3.4 Remarques

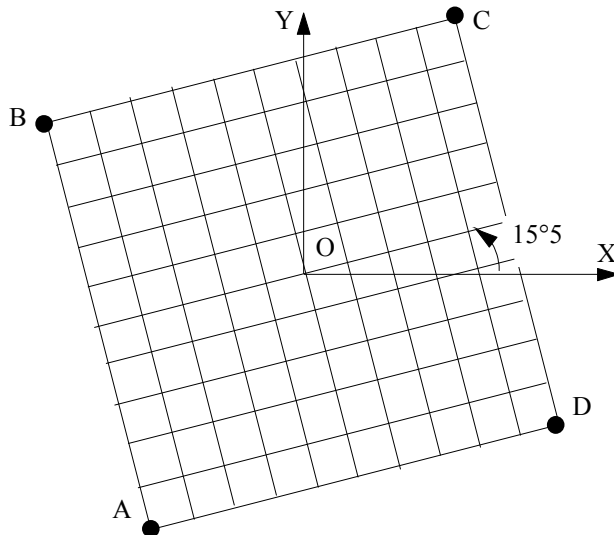
- Dans Aster, les modes calculés sont ceux de corps rigide : le quatrième mode de référence est le premier mode calculé par *Code\_Aster*.
- Apparition de deux modes de flexion entre les modes 8 et 9 de référence : ces modes sont les modes 6 et 7 de *Code\_Aster*.

Dans le tableau ci-dessous nous avons reporté les 14 premières fréquences propres trouvées.

| Mode n° | Fréquence (Hz) |
|---------|----------------|
| 1       | 44,98          |
| 2       | 107.61         |
| 3       | 107.88         |
| 4       | 165.45         |
| 5       | 196.09         |
| 6       | 202.80         |
| 7       | 203.54         |
| 8       | 211.66         |
| 9       | 212.00         |
| 10      | 222.53         |
| 11      | 254.74         |
| 12      | 255.62         |
| 13      | 264.73         |
| 14      | 289.85         |

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation DST (QUAD4)

- La plaque est située dans le plan  $Z = 2.3$
- Point O : (0. ; 0. ; 2.3)

Conditions aux limites :

- Côtés AB, BC, CD, DA :  $w = 0$

Pour valider la modélisation dans un repère différent du repère global, la plaque est tournée de  $15,5^\circ$ . Ceci ne doit pas changer les fréquences propres obtenues.

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 122  
Nombre de mailles et types : 100 QUAD4

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

| Identification                          | Instants | Référence | Aster  | % différence |
|-----------------------------------------|----------|-----------|--------|--------------|
| Fréquence<br>(mode 4 hors plan)         |          | 44.762    | 44.64  | -0.273       |
| Fréquence<br>(modes 5 & 6 hors plan)    |          | 110.52    | 108.04 | -2.247       |
|                                         |          |           | 108.26 | -2.041       |
| Fréquence<br>(mode 7 hors plan)         |          | 169.08    | 162.86 | -3.681       |
| Fréquence<br>(Mode 8 dans le plan)      |          | 193.93    | 195.70 | 0.912        |
| Fréquence<br>(mode 9 & 10 dans le plan) |          | 206.64    | 208.89 | 1.088        |
|                                         |          |           | 208.89 |              |

## 4.4 Remarques

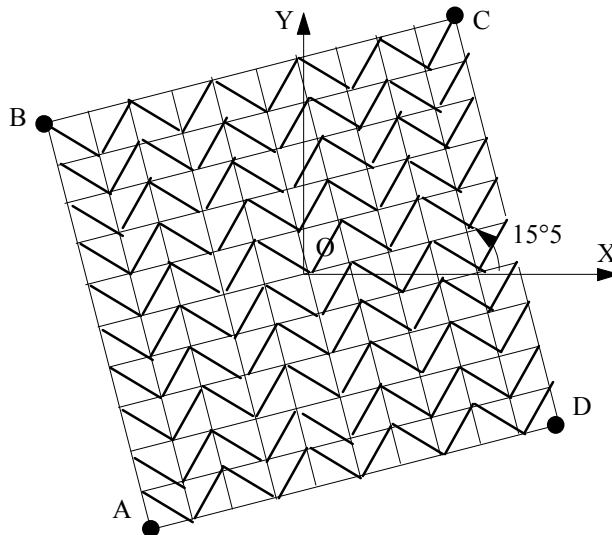
- Dans Code\_Aster, les modes calculés sont ceux de corps rigide : le quatrième mode de référence est le premier mode calculé par Code\_Aster.
- Apparition de deux modes de flexion entre les modes 8 et 9 de référence : ces modes sont les modes 6 et 7 de Code\_Aster.

Dans le tableau ci-dessous nous avons reporté les 14 premières fréquences propres trouvées.

| Mode n° | Fréquence ( Hz ) |
|---------|------------------|
| 1       | 44.64            |
| 2       | 108.04           |
| 3       | 108.26           |
| 4       | 162.86           |
| 5       | 195.70           |
| 6       | 203.97           |
| 7       | 206.08           |
| 8       | 208.89           |
| 9       | 208.89           |
| 10      | 220.92           |
| 11      | 248.12           |
| 12      | 250.10           |
| 13      | 252.49           |
| 14      | 289.79           |

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation DKT (TRIA6)

- La plaque est située dans le plan  $Z = 2.3$
- Point O : (0. ; 0. ; 2.3)

Conditions aux limites :

- Cotés AB, BC, CD, DA :  $w = 0$

Pour valider la modélisation dans un repère différent du repère global, la plaque est tournée de  $15,5^\circ$ . Ceci ne doit pas changer les fréquences propres obtenues.

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 122  
Nombre de mailles et types : 200 TRIA3

### 5.3 Grandeurs testées et résultats

| Identification                          | Instants | Référence | Aster              | % différence   |
|-----------------------------------------|----------|-----------|--------------------|----------------|
| Fréquence<br>(mode 4 hors plan)         |          | 44.762    | 47.358             | 5.799          |
| Fréquence<br>(modes 5 & 6 hors plan)    |          | 110.52    | 118.029<br>118.059 | 6.795<br>6.822 |
| Fréquence<br>(mode 7 hors plan)         |          | 169.08    | 187.504            | 10.897         |
| Fréquence<br>(Mode 8 dans le plan)      |          | 193.93    | 196.089            | 1.114          |
| Fréquence<br>(mode 9 & 10 dans le plan) |          | 206.64    | 211.658<br>212.000 | 2.428<br>2.594 |

## 5.4 Remarques

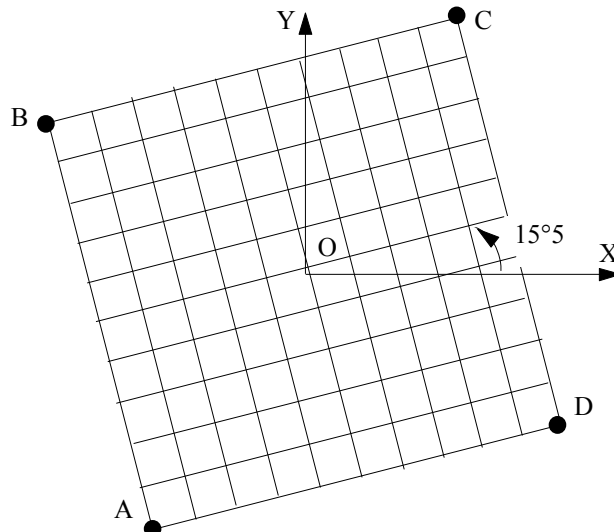
- Dans Aster, les modes calculés sont ceux de corps rigide : le quatrième mode de référence est le premier mode calculé par le *Code\_Aster*.
- Apparition de deux modes de flexion après le mode 11 de référence (mode 8 du *Code\_Aster*), de la même forme que ceux apparus dans la modélisation DST entre les modes 8 et 9 de référence (modes 6 et 7 du *Code\_Aster*).

Dans le tableau ci-dessous nous avons reporté les 14 premières fréquences propres trouvées.

| Mode n° | Fréquence (Hz) |
|---------|----------------|
| 1       | 47.358         |
| 2       | 118.03         |
| 3       | 118.06         |
| 4       | 187.50         |
| 5       | 196.09         |
| 6       | 211.66         |
| 7       | 212.00         |
| 8       | 222.53         |
| 9       | 235.41         |
| 10      | 235.56         |
| 11      | 264.73         |
| 12      | 289.85         |
| 13      | 302.84         |
| 14      | 303.15         |

## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation DKT (QUAD4)

- La plaque est située dans le plan  $Z = 2.3$
- Point O : (0. ; 0. ; 2.3)

Conditions aux limites :

- Cotés AB, BC, CD, DA :  $w=0$

Pour valider la modélisation dans un repère différent du repère global, la plaque est tournée de  $15,5^\circ$ . Ceci ne doit pas changer les fréquences propres obtenues.

### 6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 122

Nombre de mailles et types : 100 QUAD4

### 6.3 Grandeurs testées et résultats

| Identification                          | Instants | Référence | Aster   | % différence |
|-----------------------------------------|----------|-----------|---------|--------------|
| Fréquence<br>(mode 4 hors plan)         |          | 44.762    | 47.182  | 5.408        |
| Fréquence<br>(modes 5 & 6 hors plan)    |          | 110.52    | 117.463 | 6.283        |
| Fréquence<br>(mode 7 hors plan)         |          | 169.08    | 184.746 | 9.266        |
| Fréquence<br>(Mode 8 dans le plan)      |          | 193.93    | 195.699 | 0.912        |
| Fréquence<br>(mode 9 & 10 dans le plan) |          | 206.64    | 208.887 | 1.088        |

## 6.4 Remarques

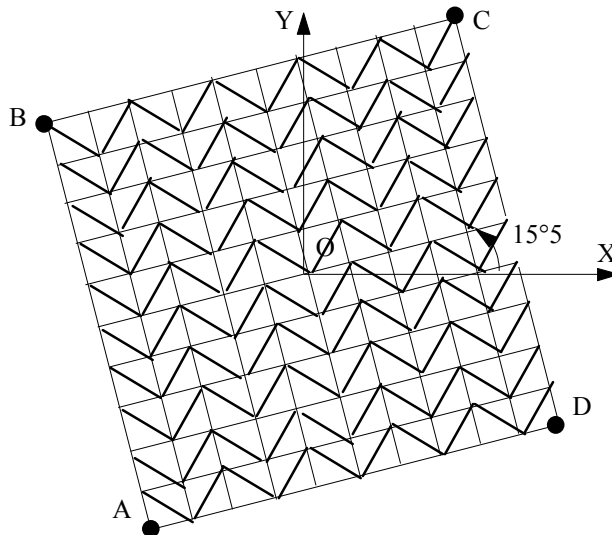
- Dans Aster, les modes calculés sont ceux de corps rigide : le quatrième mode de référence est le premier mode calculé par *Code\_Aster*.
- Apparition de deux modes de flexion après le mode 11 de référence (mode 8 de *Code\_Aster*), de la même forme que ceux apparus dans la modélisation *DST* entre les modes 8 et 9 de référence (modes 6 et 7 de *Code\_Aster*).

Dans le tableau ci-dessous nous avons reporté les 14 premières fréquences propres trouvées.

| Mode n° | Fréquence (Hz) |
|---------|----------------|
| 1       | 47.183         |
| 2       | 117.46         |
| 3       | 117.46         |
| 4       | 184.75         |
| 5       | 195.70         |
| 6       | 208.89         |
| 7       | 208.89         |
| 8       | 220.92         |
| 9       | 234.74         |
| 10      | 234.74         |
| 11      | 252.49         |
| 12      | 289.79         |
| 13      | 297.27         |
| 14      | 297.27         |

## 7 Modélisation E

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation COQUE\_3D (TRIA6)

- La plaque est située dans le plan  $Z = 2.3$
- Point O : (0. ; 0. ; 2.3)

Conditions aux limites :

- Cotés AB, BC, CD, DA :  $w = 0$

Pour valider la modélisation dans un repère différent du repère global, la plaque est tournée de  $15,5^\circ$ . Ceci ne doit pas changer les fréquences propres obtenues.

### 7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 122

Nombre de mailles et types : 200 TRIA6

### 7.3 Grandeurs testées et résultats

| Identification                          | Instants | Référence | Aster              | % différence     |
|-----------------------------------------|----------|-----------|--------------------|------------------|
| Fréquence<br>(mode 4 hors plan)         |          | 44.762    | 43.867             | 2.00             |
| Fréquence<br>(modes 5 & 6 hors plan)    |          | 110.52    | 106.058<br>106.066 | -4.037<br>-4.029 |
| Fréquence<br>(mode 7 hors plan)         |          | 169.08    | 160.010            | -5.305           |
| Fréquence<br>(Mode 8 dans le plan)      |          | 193.93    | 193.600            | -0.170           |
| Fréquence<br>(mode 9 & 10 dans le plan) |          | 206.64    | 206.209<br>206.211 | 0.208<br>0.207   |

## 7.4 Remarques

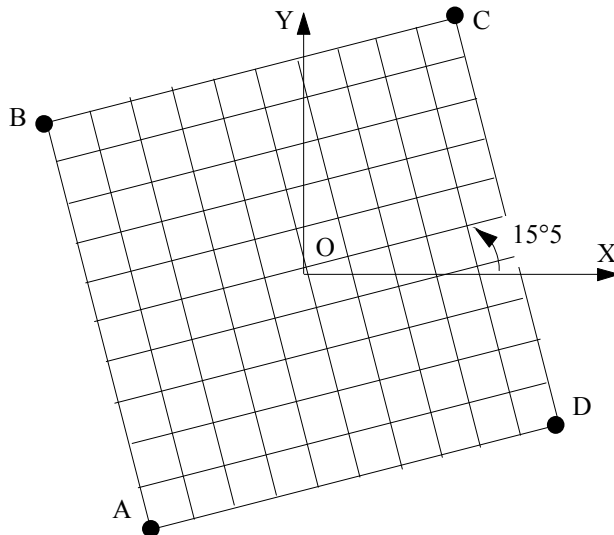
- Dans Aster, les modes calculés sont ceux de corps rigide : le quatrième mode de référence est le premier mode calculé par *Code\_Aster*.
- Apparition de deux modes de flexion entre les modes 8 et 9 de référence : ce sont les modes 6 et 7 de *Code\_Aster*.

Dans le tableau ci-dessous nous avons reporté les 14 premières fréquences propres trouvées.

| Mode n° | Fréquence ( <i>Hz</i> ) |
|---------|-------------------------|
| 1       | 43,867                  |
| 2       | 106.06                  |
| 3       | 106.07                  |
| 4       | 160.11                  |
| 5       | 186,72                  |
| 6       | 193.60                  |
| 7       | 199.76                  |
| 8       | 200.23                  |
| 9       | 206.21                  |
| 10      | 206.21                  |
| 11      | 219.28                  |
| 12      | 245.91                  |
| 13      | 245.94                  |
| 14      | 249.27                  |

## 8 Modélisation F

### 8.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation COQUE\_3D (QUAD8)

- La plaque est située dans le plan  $Z = 2.3$
- Point O : (0. ; 0. ; 2.3)

Conditions aux limites :

- Cotés AB, BC, CD, DA :  $w = 0$

Pour valider la modélisation dans un repère différent du repère global, la plaque est tournée de  $15,5^\circ$ . Ceci ne doit pas changer les fréquences propres obtenues.

### 8.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 122  
Nombre de mailles et types : 100 QUAD8

### 8.3 Grandeurs testées et résultats

| Identification                          | Instants | Référence | Aster   | % différence |
|-----------------------------------------|----------|-----------|---------|--------------|
| Fréquence<br>(mode 4 hors plan)         |          | 44.762    | 43.870  | -1.993       |
| Fréquence<br>(modes 5 & 6 hors plan)    |          | 110.52    | 106.041 | -4.052       |
| Fréquence<br>(mode 7 hors plan)         |          | 169.08    | 160.055 | -5.337       |
| Fréquence<br>(Mode 8 dans le plan)      |          | 193.93    | 193.588 | -0.176       |
| Fréquence<br>(mode 9 & 10 dans le plan) |          | 206.64    | 206.192 | -0.216       |

## 8.4 Remarques

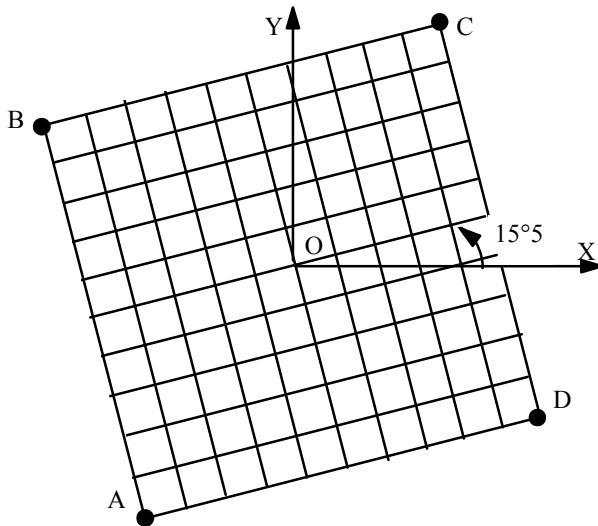
- Dans *Code\_Aster*, les modes calculés sont ceux de corps rigide : le quatrième mode de référence est le premier mode calculé par *Code\_Aster*.
- Apparition de deux modes de flexion entre les modes 8 et 9 de référence : ce sont les modes 6 et 7 de *Code\_Aster*.

Dans le tableau ci-dessous nous avons reporté les 14 premières fréquences propres trouvées.

| Mode n° | Fréquence ( Hz ) |
|---------|------------------|
| 1       | 43.87            |
| 2       | 106.04           |
| 3       | 106.04           |
| 4       | 160.06           |
| 5       | 193.59           |
| 6       | 199.64           |
| 7       | 200.13           |
| 8       | 206.19           |
| 9       | 206.19           |
| 10      | 219.26           |
| 11      | 245.68           |
| 12      | 245.68           |
| 13      | 249.20           |
| 14      | 287.99           |

## 9 Modélisation G

### 9.1 Caractéristiques de la modélisation

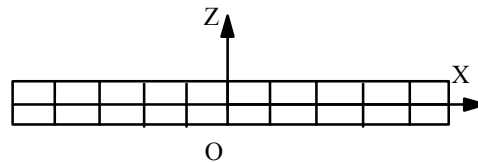


Modélisation 3D (HEXA20)

- Le plan moyen de la plaque est situé dans le plan  $Z = 2.3$
- Point O : (0. ; 0. ; 2.3)

Conditions aux limites :

- Cotés AB, BC, CD, DA :  $w=0$



### 9.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1266  
Nombre de mailles et types : 200 HEXA20

### 9.3 Grandeurs testées et résultats

| Identification                          | Instants | Référence | Aster              | % différence     |
|-----------------------------------------|----------|-----------|--------------------|------------------|
| Fréquence<br>(mode 4 hors plan)         |          | 44.762    | 43.862             | -2.009           |
| Fréquence<br>(modes 5 & 6 hors plan)    |          | 110.52    | 105.953            | -4.132           |
| Fréquence<br>(mode 7 hors plan)         |          | 169.08    | 159.749            | -5.518           |
| Fréquence<br>(Mode 8 dans le plan)      |          | 193.93    | 193.590            | -0.175           |
| Fréquence<br>(mode 9 & 10 dans le plan) |          | 206.64    | 199.410<br>199.903 | -3.498<br>-3.260 |

## 9.4 Remarques

- Dans *Code\_Aster*, les modes calculés sont ceux de corps rigide : le quatrième mode de référence est le premier mode calculé par *Code\_Aster*.
- Apparition de deux modes de flexion entre les modes 8 et 9 de référence : ce sont les modes 6 et 7 du *Code\_Aster*.

Dans le tableau ci-dessous nous avons reporté les 14 premières fréquences propres trouvées.

| Mode n° | Fréquence ( Hz ) |
|---------|------------------|
| 1       | 43.86            |
| 2       | 105.95           |
| 3       | 105.95           |
| 4       | 159.75           |
| 5       | 193.59           |
| 6       | 199.41           |
| 7       | 199.90           |
| 8       | 206.16           |
| 9       | 206.16           |
| 10      | 219.27           |
| 11      | 245.07           |
| 12      | 245.07           |
| 13      | 249.13           |
| 14      | 287.75           |

## 10 Synthèse des résultats

Compte tenu de la nature de la solution numérique (éléments finis volumiques), les résultats obtenus sont satisfaisants pour les :

- modélisation A et B (**DST**) l'écart maximum est de moins de 4% pour les 5 premiers modes,
- modélisation E et F (**COQUE\_3D**), l'écart maximum est d'environ 5% pour les 5 premiers modes,
- modélisation G (**3D**), l'écart maximum est d'environ 5% pour les 5 premiers modes,
- les modes de référence 5 et 6 hors plan présentent des symétrie différentes de celles rencontrées dans les modélisations E, F et G, mais elles sont équivalentes car il s'agit de recombinaisons modales.

Les modélisations C et D (**DKT**) sont moins satisfaisantes avec des écarts relatifs atteignant 10% sur le mode 7 hors plan, ceci est dû à la non prise en compte du cisaillement transverse pour cette plaque relativement épaisse.

De plus on observe l'apparition de modes de flexion et membrane pour toutes ces modélisations, y compris la modélisation **3D** volumique G. Lorsque l'on raffine suffisamment les maillages, cette tendance se confirme et les écarts relatifs régressent. Le calcul **3D** a par ailleurs montré qu'en deçà d'un maillage  $6 \times 6$  dans le plan ( $XY$ ), les modes de flexion et membrane n'étaient pas détectés.