

## SDLD33 - Réponse sismique spectrale d'un système 2 masses - 4 ressorts multi-supporté par 2 groupes décorrélés d'appuis

---

### Résumé :

Le problème consiste à calculer la réponse spectrale d'un système 2 masses – 4 ressorts multi-supporté, soumis à une excitation sismique multiple, en considérant les 3 appuis comme 2 groupes d'appuis décorrélés.

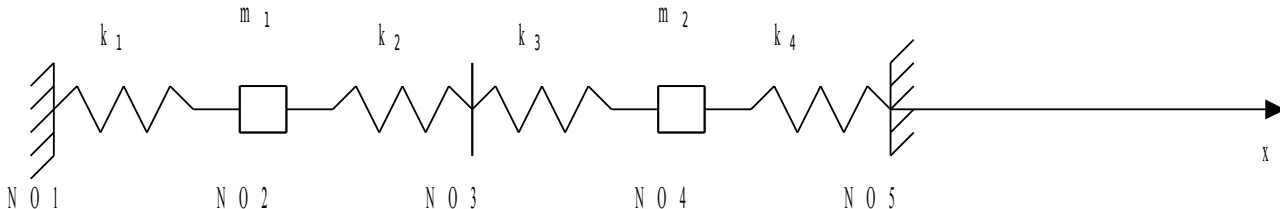
On teste l'élément discret en traction, le calcul des modes propres, des modes statiques et de la réponse spectrale par superposition modale via l'opérateur `COMB_SISM_MODAL`. Ce cas-test permet de valider l'ordre des combinaisons à considérer dans ce cas, à savoir le cumul intra-groupe puis le cumul inter-groupe.

Les résultats obtenus sont en très bon accord avec les résultats analytiques de référence.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

Le système est composé d'un ensemble de 4 ressorts, 2 masses ponctuelles, supporté par 3 appuis..



### 1.2 Propriétés de matériaux

Raideur de liaison :  $k = k_1 = k_2 = 10^3 \text{ N/m}$        $k_3 = k_4 = 2.10^3 \text{ N/m}$  ;  
masse ponctuelle :  $m = m_1 = m_2 = 10 \text{ kg}$  .

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

#### Conditions aux limites :

Les seuls déplacements autorisés sont les translations selon l'axe  $x$  .

Les points  $NO1$  ,  $NO3$  et  $NO5$  sont encastres :  $dx = dy = dz = drx = dry = drz = 0$  .

Les autres points sont libres en translation selon la direction  $x$  :  $dy = dz = drx = dry = drz = 0$  .

#### Chargement :

La structure est soumise à une excitation sismique spectrale multiple et à des déplacements différentiels.

Les spectres de réponses d'oscillateur en pseudo-accélération sont simplifiés. Seules les valeurs correspondant aux 2 fréquences propres du système sont mentionnées. Elles ne dépendent pas de l'amortissement :

au nœud  $NO1$  :

$$SRO_{NO1}(f_1) = A_{11} = 7 \text{ m/s}^2$$

$$SRO_{NO1}(f_2) = A_{21} = 5 \text{ m/s}^2$$

$$DDS_{NO1} = D_1 = -0.04 \text{ m}$$

au nœud  $NO3$  :

$$SRO_{NO3}(f_1) = A_{11} = 7.7 \text{ m/s}^2$$

$$SRO_{NO3}(f_2) = A_{12} = 5.5 \text{ m/s}^2$$

$$DDS_{NO3} = D_2 = -0.044 \text{ m}$$

au nœud  $NO5$  :

$$SRO_{NO5}(f_1) = A_{21} = 12 \text{ m/s}^2$$

$$SRO_{NO5}(f_2) = A_{22} = 6 \text{ m/s}^2$$

$$DDS_{NO5} = D_3 = 0.06 \text{ m}$$

Les excitations aux nœuds *NO1* et *NO3* sont corrélées. On constitue 2 groupes de supports décorrélés : le groupe 1 est composé des nœuds *NO1* et *NO3* ; le groupe 2 est constitué du seul nœud *NO5* .

## 1.4 Conditions initiales

Le système est au repos.

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

On calcule la réponse spectrale par superposition modale d'un système 2 masses – 4 ressorts soumis à trois excitations distinctes. On détermine le déplacement des masses aux nœuds *NO2* et *NO4* suivant l'axe *x*.

On calcule analytiquement :

- les fréquences propres  $f_i$ ,
- les vecteurs propres associés  $\phi_{N_i}$  normalisés par rapport à la masse modale,
- les modes statiques d'appuis  $\Psi_i$  du système,
- les facteurs de participation modale  $P_{ij}$  relatif aux appuis,
- $Rm_{ij}$  le maximum de la réponse de chaque mode à partir des spectres d'excitation,
- $Re_{ij}$  la contribution du mouvement d'entraînement de chaque appui à partir des déplacements différentiels,

### 2.2 Résultats de référence

#### 2.2.1 Matrices et vecteurs caractéristiques

- matrice de rigidité  $K$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \quad \text{matrice relative aux degrés de liberté 1, 2, 3, 4, 5}$$

$$K^p = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & 0 & -k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_3+k_4 & 0 & -k_3 & -k_4 \\ -k_1 & 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & -k_3 & 0 & k_2+k_3 & 0 \\ 0 & -k_4 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$$

matrice partitionnée degrés de liberté de structure 2, 4,  
degrés de liberté de support 1, 3, 5

$$K^p = \begin{bmatrix} k & k_{xs} \\ k_{sx} & k_{ss} \end{bmatrix} \quad k = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & 0 \\ 0 & k_3+k_4 \end{bmatrix} \quad k_{xs} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & -k_4 \end{bmatrix}$$

- matrice de masse  $M$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrice relative aux degrés de liberté 1, 2, 3, 4, 5

$$M^p = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrice partitionnée degrés de liberté de structure 2, 4, degrés de liberté de support 1, 3, 5

- calcul modal en base encastrée

$$(K - \lambda_i M) \phi_i = 0 \quad \lambda_i = \omega_i^2$$

$$\det(K - \lambda_i M) = 0 \Leftrightarrow \lambda_i^2 - \left( \frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_3 + k_4}{m_2} \right) \lambda_i + \frac{(k_1 + k_2)(k_3 + k_4)}{m_1 m_2} = 0$$

•

$$\lambda_1 = \frac{2k}{m} \quad \lambda_2 = \frac{4k}{m}$$

- fréquences propres :

$$\Rightarrow f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$$

- modes propres non normés :

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- masses modales généralisées  $\mu_i = \phi_i^T M \phi_i$  :

- $\mu_1 = \mu_2 = m$

- modes propres normés à la masse modale généralisée unitaire  $\phi_{Nk}$  :

- $\Rightarrow \phi_{N1} = \frac{\phi_1}{\sqrt{\mu_1}} \quad \phi_{N2} = \frac{\phi_2}{\sqrt{\mu_2}}$

- **modes statiques d'appuis**  $\Psi_{Sj}$

Matrice des modes statiques réduite aux ddls de structure  $\Phi_S = -\mathbf{k}^{-1} \mathbf{k}_{xs}$

$$\Phi_S = \frac{-1}{4k} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k & -k & 0 \\ 0 & -2k & -2k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

- solution statique à un déplacement unitaire du nœud *NO1* :

$$\text{déplacements : } \Psi_{S1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- solution statique à un déplacement unitaire du nœud *NO3* :

$$\text{déplacements : } \Psi_{S2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- solution statique à un déplacement unitaire du nœud *NO5* :

$$\text{déplacements : } \Psi_{S3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **mode de corps rigide**  $\Psi_{RI}$

Matrice des modes rigides réduite aux ddls de structure :  $\Phi_R = \Phi_S \mathbf{S}_R$

$$\text{Mode de corps rigide } \Psi_{RI} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On vérifie bien que :  $\Psi_{RI} = \Psi_{S1} + \Psi_{S2} + \Psi_{S3}$

## 2.2.2 Chargement 1 multi-appuis

- facteurs de participation modale  $P_{kj} = \Phi_{Nk}^T M \psi_j$  :
- contribution du mode dynamique 1 au mouvement imposé au nœud NO1 :  

$$\Rightarrow P_{11} = \Phi_{N1}^T M \psi_1 = \frac{\sqrt{m}}{2}$$
- contribution du mode dynamique 1 au mouvement imposé au nœud NO3 :  

$$\Rightarrow P_{12} = \Phi_{N1}^T M \psi_2 = \frac{\sqrt{m}}{2}$$
- contribution du mode dynamique 1 au mouvement imposé au nœud NO5 :  

$$\Rightarrow P_{13} = \Phi_{N1}^T M \psi_3 = 0$$
- contribution du mode dynamique 2 au mouvement imposé au nœud NO1 :  

$$\Rightarrow P_{21} = \Phi_{N2}^T M \psi_1 = \frac{\sqrt{m}}{2}$$
- contribution du mode dynamique 2 au mouvement imposé au nœud NO3 :  

$$\Rightarrow P_{22} = \Phi_{N2}^T M \psi_2 = \frac{\sqrt{m}}{2}$$
- contribution du mode dynamique 2 au mouvement imposé au nœud NO5 :  

$$\Rightarrow P_{23} = \Phi_{N2}^T M \psi_3 = \frac{\sqrt{m}}{2}$$
- réponse du mode  $i$  au mouvement de l'appui  $j$**

$$Rm_{kj} = \Phi_{Nk} P_{kj} \frac{A_{kj}}{\omega_i^2}$$

Réponses combinées des oscillateurs modaux

Réponse du mode 1 au mouvement de l'appui 1 :

$$Rm_{11} = \Phi_{N1} P_{11} \frac{A_{11}}{\omega_1^2} = \frac{A_{11}}{2\omega_1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Réponse du mode 1 au mouvement de l'appui 2 :

$$Rm_{12} = \Phi_{N1} P_{12} \frac{A_{12}}{\omega_1^2} = \frac{A_{12}}{2\omega_1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Réponse du mode 1 au mouvement de l'appui 3 :

$$Rm_{13} = \Phi_{N1} P_{13} \frac{A_{13}}{\omega_1^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Réponse du mode 2 au mouvement de l'appui 1 :

$$Rm_{21} = \Phi_{N2} P_{21} \frac{A_{21}}{\omega_2^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Réponse du mode 2 au mouvement de l'appui 2 :

$$Rm_{22} = \Phi_{N2} P_{22} \frac{A_{22}}{\omega_2^2} = \frac{A_{22}}{2\omega_2^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Réponse du mode 2 au mouvement de l'appui 3 :

$$Rm_{23} = \Phi_{N2} P_{23} \frac{A_{23}}{\omega_2^2} = \frac{A_{23}}{2\omega_2^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- cumul intra-groupe (somme algébrique)**

mode 1 :

$$Rm_{1\text{groupe1}} = Rm_{11} + Rm_{12} = \frac{A_{11} + A_{12}}{2\omega_1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mode 2 :

$$Rm_{2\text{groupe1}} = Rm_{21} + Rm_{22} = \frac{A_{22}}{2\omega_2^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **contribution de l'appui  $j$  au mouvement d'entraînement**

$$Re_j = \psi_j D_j$$

contributions des groupes 1 et 2 au mouvement d'entraînement

$$Re_{\text{groupe1}} = Re_1 + Re_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_1 + D_2 \\ D_2 \end{pmatrix} \quad Re_{\text{groupe2}} = Re_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

- **cumul sur les modes (quadratique)**

$$Rm_{\text{groupe1}} = \sqrt{(Rm_{11} + Rm_{12})^2 + (Rm_{21} + Rm_{22})^2} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11} + A_{12}}{2\omega_1^2} \\ \frac{A_{22}}{2\omega_2^2} \end{pmatrix}$$

$$Rm_{\text{groupe2}} = \sqrt{Rm_{13}^2 + Rm_{23}^2} = \frac{A_{23}}{2\omega_2^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **réponse des groupes d'appuis 1 et 2**

$$R_1 = \sqrt{Rm_{\text{groupe1}}^2 + Re_{\text{groupe1}}^2} \quad R_1^2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{(A_{11} + A_{12})^2}{\omega_1^2} + (D_1 + D_2)^2 \\ \frac{A_{22}^2}{\omega_2^2} + D_2^2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \sqrt{Rm_{\text{groupe2}}^2 + Re_{\text{groupe2}}^2} \quad R_2^2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{A_{23}^2}{\omega_2^2} + D_3^2 \end{bmatrix}$$

- **cumul inter-groupe (quadratique)**

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} \quad R^2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{(A_{11} + A_{12})^2}{\omega_1^2} + (D_1 + D_2)^2 \\ \frac{A_{22}^2 + A_{23}^2}{\omega_2^2} + D_2^2 + D_3^2 \end{bmatrix}$$

## 2.3 Incertitude sur la solution

Aucune (solution analytique)

## 3 Modélisation A

---

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le système est modélisé par :

- 4 éléments discrets  $K\_T\_D\_L$ ,
- 2 éléments discrets  $M\_T\_D\_N$ .

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 4 mailles `SEG2`.

### 3.3 Paramètres de modélisation

Réponse sur les 2 premiers modes sans correction statique (combinaison des réponses modales SRSS)

## 4 Résultats de la modélisation A

### 4.1 Fréquences propres

| MODE | Référence     | Code_Aster     | Erreur relative (%) |
|------|---------------|----------------|---------------------|
| 1    | 2.2507900E+00 | 2.25079079E+00 | 3.5E-05             |
| 2    | 3.1830000E+00 | 3.18309886E+00 | 0.003               |

### 4.2 Réponse globale sur base modale complète

Les modes 1 et 2 sont pris en compte. Les composantes inertielle (primaire) et statique (secondaire) de la réponse sont directement cumulées au niveau des appuis.

COMB\_MODE='SRSS'

- réponse de l'appui  $j=1$  (nœud NO1) :  $R_1 = \sqrt{Rm_1^2 + Re_1^2}$  avec  
 $Rm_1 = \sqrt{Rm_{11}^2 + Rm_{21}^2}$
- réponse de l'appui  $j=2$  (nœud NO4) :  $R_2 = \sqrt{Rm_2^2 + Re_2^2}$  avec  
 $Rm_2 = \sqrt{Rm_{12}^2 + Rm_{22}^2}$
- réponse globale :  $R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$
- déplacements absolus : DEPL

| NOEUD | Référence   | Code_Aster  | Erreur relative (%) |
|-------|-------------|-------------|---------------------|
| NO1   | 4.00000E-02 | 4.00000E-02 | 0.000               |
| NO2   | 5.58000E-02 | 5.58083E-02 | 0.015               |
| NO3   | 4.40000E-02 | 4.40000E-02 | 0.000               |
| NO4   | 3.85600E-02 | 3.85683E-02 | 0.022               |
| NO5   | 6.00000E-02 | 6.00000E-02 | 0.000               |

- réactions nodales : REAC\_NODA

| NOEUD | Référence   | Code_Aster   | Erreur relative (%) |
|-------|-------------|--------------|---------------------|
| NO1   | 3.68000E+01 | 3.68044E+01  | 0.012               |
| NO2   | 0.00000E+00 | 2.23756E-14  | 2.2E-14             |
| NO3   | 8.64900E+01 | 8.64906E+01  | 7.0E-04             |
| NO4   | 0.00000E+00 | 3.071843E-14 | 3.1E-14             |
| NO5   | 7.71400E+01 | 7.71367E+01  | -0.004              |

---

## 5 Synthèse des résultats

---

Parfait accord des résultats *Aster* avec les valeurs de référence analytiques.