

## WTNA112 – Pressurisation thermique d'une éprouvette cylindrique saturée non drainée

---

### Résumé :

Il s'agit d'un problème de THM saturé et élastique. On augmente la température d'un échantillon non drainé maintenu à confinement constant (contrainte totale constante au bord). La pression d'eau résultante varie alors linéairement avec la température selon un coefficient de pressurisation thermique que l'on calcule analytiquement. La solution obtenue ici est donc à comparer avec une solution analytique.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

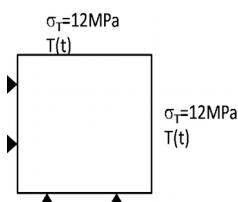
On considère un cylindre de rayon  $1\text{ cm}$  et de hauteur  $1\text{ cm}$  (soit un maillage correspondant à un domaine carré de  $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ , la modélisation étant axisymétrique).

### 1.2 Propriétés du matériau

On choisit ici des paramètres correspondant à une argilite de manière à obtenir un coefficient de pressurisation thermique réaliste.

Eau liquide	Massé volumique ( $\text{kg.m}^{-3}$ )	$10^3$
	Chaleur massique à pression constante ( $\text{J.K}^{-1}$ )	4180
	Viscosité dynamique de l'eau liquide ( $\text{Pa.s}$ )	0.001
	Coefficient de dilatation thermique du liquide ( $\text{K}^{-1}$ ) (si constant, cf. section suivante)	$1.10^{-4}$
	Compressibilité ( $\text{Pa}^{-1}$ )	$K_e=5.10^{-10}$
Solide	Module d'Young drainé $E(\text{Pa})$	$3,1410^9$
	Coefficient de Poisson	0.375
	Coefficient de dilatation thermique du solide ( $\text{K}^{-1}$ )	$10^{-5}$
Etat de référence	Porosité	0.18
	Température ( $K$ )	273
	Pression liquide ( $\text{Pa}$ )	0
Coefficients homogénéisés	Massé volumique homogénéisée ( $\text{kg.m}^{-3}$ )	2410
	Coefficient de Biot	0.6
	Perméabilité intrinsèque ( $\text{m}^2$ )	$K_{\text{int}}=10^{-21}$
	Conductivité thermique	$\lambda_T=1.61$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements



On impose :

- Sur les bords bas et gauche : déplacements nuls, flux hydraulique nul, flux thermique nuls. Ce sont des conditions de symétrie.
- Sur les bords haut et droit : Contrainte totale imposée à  $12 \text{ MPa}$ , flux hydraulique nul, température imposée fonction du temps  $T(t)$  suivant une rampe linéaire telle que :

$T(t) = T_0 + \frac{\Delta T}{t_{sim}}$  où  $t_{sim}$  correspond au temps de simulation (ici  $t_{sim} = 1\text{h}$ ) et  $\Delta T$  la variation de température imposée pendant ce temps (ici  $\Delta T = 40^\circ\text{C}$ ).

## 1.4 Conditions initiales

$P(x) = 4 \text{ MPa}$  et  $T(x) = T_0 = 20^\circ\text{C}$  partout.

## 2 Solution de référence

On rappelle que l'apport de masse d'eau s'écrit :  $m_w = \varphi \cdot \rho_w \cdot (1 + \varepsilon_v)$ , ce que l'on peut dériver sous la forme suivante :  $dm_w = d\varphi \rho_w (1 + \varepsilon_v) + d\rho_w \varphi (1 + \varepsilon_v) + \rho_w \varphi d\varepsilon_v$  avec  $\varphi$  la porosité eulérienne.

Si l'on se place en hypothèse de petits déplacements, on aura donc :

$$dm_w = d\varphi \rho_w + d\rho_w \varphi + \rho_w \varphi d\varepsilon_v \quad (1)$$

La variation de porosité s'écrit suivant la relation :

$$d\varphi = (b - \varphi) \left( d\varepsilon_v - 3\alpha_0 dT + \frac{dp_w}{K_s} \right) \quad (2)$$

avec  $\alpha_0$  la dilatation linéique du squelette (assimilable au milieu poreux). On rappelle que le coefficient de Biot  $b$  et le module de compressibilité des grains solides  $K_s$  sont reliés au module de compressibilité « drainé » du milieu poreux  $K_0$ , tel que :

$$b = 1 - \frac{K_0}{K_s}$$

Par ailleurs, la variation de la masse volumique de l'eau s'écrit :

$$\frac{d\rho_w}{\rho_w} = \frac{dp_w}{K_w} - 3\alpha_w dT \quad (3)$$

avec le module de compressibilité de l'eau  $K_w$  et son module de dilatation  $\alpha_w$ .

Enfin, si la loi de comportement est élastique, on rappelle que la déformation est reliée à la contrainte effective tel que :

$$d\varepsilon_v = \frac{d\sigma'}{K_0} + 3\alpha_0 dT \quad (4)$$

Par ailleurs, la formulation en contrainte totale, nous indique que :

$d\sigma' = d\sigma + b dp_w$ , considérant ici que le milieu est à confinement constant, on a donc :

$d\sigma' = b dp_w$ , ce qui nous donne au final

$$d\varepsilon_V = \frac{b dp_w}{K_0} + 3\alpha_0 dT \quad (5)$$

On peut maintenant injecter (2), (3), (4) et (5) dans l'équation (1) et on obtient que :

$$\frac{dm_w}{\rho_w} = \left( \frac{b^2}{K_0} + \frac{(b-\phi)}{K_s} + \frac{\phi}{K_w} \right) dp_w + \phi (3\alpha_0 - 3\alpha_w) dT \quad (6)$$

Considérant que le milieu est non drainé on a donc :

$$\left( \frac{b^2}{K_0} + \frac{(b-\phi)}{K_s} + \frac{\phi}{K_w} \right) dp_w = \phi (3\alpha_w - 3\alpha_0) dT \quad (7)$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$dp_w = \Lambda dT \quad (8)$$

Avec  $\Lambda$  le coefficient de pressurisation thermique tel que :

$$\Lambda = \frac{\phi (3\alpha_w - 3\alpha_0)}{\left( \frac{b^2}{K_0} + \frac{(b-\phi)}{K_s} + \frac{\phi}{K_w} \right)}$$

On remarque que ce coefficient fait apparaître le différentiel thermique  $(\alpha_w - \alpha_0)$

## 2.1 Dilatation thermique de l'eau constante

Dans le cas où  $\alpha_w = cte$  l'application numérique est immédiate.

**Application numérique :**

Avec les données définies précédemment, on obtient :

$$\Lambda = 2,25 \cdot 10^5 \text{ Pa. K}^{-1}$$

Ce qui donne pour une variation de température  $\Delta T = 40^\circ\text{C}$ , une variation de pression de  $\Delta p = 9,01 \text{ Mpa}$ .

## 2.2 Dilatation thermique de l'eau fonction de la température

Dans ce cas, on écrira

$$\Lambda(T) = \frac{\phi (3\alpha_w(T) - 3\alpha_0)}{\left( \frac{b^2}{K_0} + \frac{(b-\phi)}{K_s} + \frac{\phi}{K_w} \right)} \text{ et}$$

$$dp_w = \Lambda(T) dT$$

Pour pouvoir intégrer cette formule, on considère que la dilatation thermique de l'eau est une fonction linéaire de la température telle que  $\alpha_w = a \cdot T + b$ .  $\Lambda(T)$  est alors également une fonction linéaire que l'on intègre entre la température initiale  $T_0$  et la température finale  $T_1$ , ce qui donne :

$$\Delta p = \frac{A}{2} \cdot (T_2^2 - T_1^2) + B(T_2 - T_1) \text{ avec}$$

$$A = \frac{3\phi a}{\left( \frac{b^2}{K_0} + \frac{(b-\phi)}{K_s} + \frac{\phi}{K_w} \right)}$$

et

$$B = \frac{\phi(3b - 3\alpha_0)}{\left( \frac{b^2}{K_0} + \frac{(b-\phi)}{K_s} + \frac{\phi}{K_w} \right)}$$

## Application numérique :

On prend ici

$a = 2,63 \cdot 10^{-6}$  et  $b = -7 \cdot 10^{-4}$  ce qui correspond à  $\alpha_w(293) = 6,67 \cdot 10^{-5} K^{-1}$  et  $\alpha_w(333) = 1,72 \cdot 10^{-4} K^{-1}$  et qui constituent des valeurs réalistes pour l'eau.

Tout calcul fait, on obtient pour une variation de température entre 20°C et 60°C, une variation de pression de  $\Delta p = 10,9 MPa$  et donc une pression finale de  $14,9 MPa$ .

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation A

- Modélisation plane 'AXIS\_THMS'. Loi mécanique 'ELAS'. Couplage 'LIQU\_SATU'.
- $20 \times 20$  éléments  $Q4$  de largeur égale.
- Dilatation thermique de l'eau constante

### 3.2 Résultats de la modélisation A

Discrétisation en temps : 10 pas de temps de 180 s chacun. La solution calculée par Aster tenant compte des mouvements du fluide et de la chaleur (phénomènes diffusifs), il est normal de ne pas obtenir exactement la solution de référence. Les différences restent très faibles.

Résultat à l'instant final 3600 s :

N° Nœud	COOR_X	COOR_Y	Référence PRE1 (MPa)	Aster PRE1 (MPa)	Défauts (%)	Tolérance (%)
1	0	0	13,01	12,98	0,158	1
2	0	0,01	13,01	12,99	0,098	1

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation B

- Modélisation plane 'AXIS\_THMS'. Loi mécanique 'ELAS\_ORTH'. Couplage 'LIQU\_SATU'. 20×20 éléments  $Q4$  de largeur égale. Termes de couplages également anisotropes.

Il s'agit de la même modélisation que précédemment mais en passant par les modules d'orthotropie (bien que l'éprouvette soit considérée comme isotrope et que les caractéristiques demeurent les mêmes dans chaque direction). En théorie les résultats devraient donner exactement la même chose. Le modèle diffère cependant ici légèrement et la solution analytique indiquée précédemment n'est plus tout à fait exacte. En effet au lieu de la relation utilisée en isotrope :

$$d\varphi = (b - \varphi) \left( d\varepsilon_V - 3\alpha_0 dT + \frac{dp_w}{K_s} \right)$$

La relation utilisée dans ce cas devient tensorielle (cf. doc R7.01.11) et est :

$$d\varphi = \mathbf{B} : \mathbf{d}\varepsilon - \varphi d\varepsilon_V - 3\alpha_\varphi dT + \frac{dp_g - S_{lg} dp_c}{M_\varphi}$$

avec

$$\frac{1}{M_\varphi} = (\mathbf{B} - \varphi \boldsymbol{\delta}) : \mathbf{S}_0^S : \boldsymbol{\delta}$$

où  $\mathbf{S}_0^S$  la matrice de souplesse du squelette, fonction du module de Young de la matrice solide  $E^S$  et du coefficient de Poisson de la matrice solide  $\nu^S$ .

Par ailleurs la porosité ne peut ici être intégrée analytiquement et l'est donc de manière explicite (porosité prise au temps précédent). La résolution est donc ici moins précise.

Cette modélisation a pour objectif de quantifier la différence obtenue en passant par cette modélisation.

### 4.2 Résultats de la modélisation B

On teste les mêmes résultats que précédemment d'abord sur 10 pas de temps comme pour la modélisation A

Résultat à l'instant final 3600 s :

N° NŒUD	COOR_X	COOR_Y	Référence PREI(MPa)	Aster PREI(MPa)	Différences (%)	Tolérance (%)
1	0	0	13,01	12,258	3,25	5
2	0	0.01	13,01	12,259	2,80	5

Les résultats obtenus ici sont un peu moins précis que précédemment ce qui s'explique par le traitement explicite de la porosité.

Pour s'en assurer on teste le même cas mais avec 15 pas de temps :

Résultat à l'instant final 3600 s :

N° NŒUD	COOR_X	COOR_Y	Référence PREI(MPa)	Aster PREI(MPa)	Différences (%)	Tolérance (%)
1	0	0	13,01	12,994	0,04	1

2	0	0.01	13,01	13.001	0,01	1
---	---	------	-------	--------	------	---

On converge parfaitement vers la solution analytique.

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation C

- Modélisation plane 'AXIS\_THMS'. Loi mécanique 'ELAS'. Couplage 'LIQU\_SATU'.
- 2 éléments triangulaires
- Dilatation thermique de l'eau suivant une loi linéaire (cf. section 2.2)

### 5.2 Résultats de la modélisation C

Discréétisation en temps : 30 pas de temps de 120 s chacun. La solution calculée par Aster tenant compte des mouvements du fluide et de la chaleur (phénomènes diffusifs), il est normal de ne pas obtenir exactement la solution de référence. Les différences restent très faibles.

Résultat à l'instant final 3600 s :

N° NŒUD	COOR_X	COOR_Y	Référence PREI(MPa)	Aster PREI(MPa)	Différences (%)	Tolérance (%)
4	0	0	14,9	14,84	0,7	1
1	0	0.01	14,9	14,84	0,7	1

## 6 Synthèse des résultats

Les résultats sont en cohérence avec la solution analytique.