

SSNV219 – Méthode des solutions manufacturées en contact 3D et grandes déformations

Résumé :

L'objectif de ce test est de vérifier la modélisation du contact 3D en grandes déformations grâce à la méthode des solutions manufacturées [bib1].

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

On considère un cube de coté 1 m .

1.2 Propriétés du matériau

$E = 1 \text{ MPa}$ Module d'Young
 $\nu = 0.15$ Coefficient de Poisson

1.3 Conditions aux limites et chargements

Sur le bord HAUT , on impose un déplacement(voir paragraphe 2).

Sur les bords BORDX , BORDMX , BORDY , BORDMY , BORDZ et ESCLAVE , on impose une pression (voir paragraphe 2).

Dans tout le domaine, on impose une force de volume (voir paragraphe 2).

La surface MAITRE de nature paraboloïde est décrite par l'équation :

$$Z = -0.2 \times (1 + X^2 + Y^2) - 0.3 \quad (1)$$

1.4 Conditions initiales

Néant

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

La solution de référence analytique est donnée par :

$$\begin{aligned} U_x &= 0.2 \times Z^2 \times X \times Y \\ U_y &= 0.2 \times Z^2 \times X \times Y \\ U_z &= -0.2 \times (1 + X^2 + Y^2) \times (1 + 0.01 \times Z) - 0.01 \times Z - 0.3 \end{aligned} \quad (2)$$

Les conditions de Dirichlet, de Neumann et le terme source sont obtenus par la méthode des solutions manufacturées [bib1].

On commence par déterminer le gradient de la transformation \underline{F} :

$$\underline{\underline{F}} = \nabla \underline{U} + \underline{\underline{Id}} \quad (3)$$

Connaissant la normale $\underline{N} = [0, 0, -1]^T$ à la surface ESCLAVE dans la configuration non-déformée, on obtient son expression dans la configuration déformée par la formule de Nanson :

$$\underline{n} = \frac{\underline{F}^{-T} \underline{N}}{\|\underline{F}^{-T} \underline{N}\|} \quad (4)$$

Connaissant le tenseur de Hooke $\underline{\underline{A}}$ et le tenseur de Green-Lagrange $\underline{\underline{E}}$, on calcule le second tenseur de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{S}}$:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{Id}}) \quad (5)$$

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{E}} \quad (6)$$

On rappelle que le second tenseur de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{S}}$ permet d'obtenir des efforts en configuration non déformée par unité de surface non déformée :

$$\frac{d f_0}{dA} = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{N} \quad (7)$$

Comme nous cherchons à déterminer des efforts en configuration déformée, nous allons déterminer le premier tenseur de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{\underline{\Pi}}}$

$$\underline{\underline{\underline{\Pi}}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} \quad (8)$$

On peut ainsi déterminer les forces de volume \underline{f}_{vol} :

$$\underline{f}_{vol} = -\operatorname{div} \underline{\underline{\underline{\Pi}}} \quad (9)$$

Connaissant la normale en configuration initiale sur les différentes faces et le premier tenseur de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{\underline{\Pi}}}$, on peut calculer les efforts de surface en configuration déformée :

$$\underline{f}_{surf} = \underline{\underline{\underline{\Pi}}} \cdot \underline{N} \quad (10)$$

Sur la surface **BAS** qui est en contact, il faut un traitement particulier. En effet, les efforts normaux y sont pris en compte par le contact :

$$\begin{aligned} \underline{f}_{surf}^{BAS} &= \underline{f}_{surf_n}^{BAS} + \underline{f}_{surf_i}^{BAS} \\ &= \underline{f}_{contact} + \underline{f}_{surf_i}^{BAS} \\ &= p * \underline{n} + \underline{f}_{surf_i}^{BAS} \end{aligned} \quad (11)$$

Où p désigne la pression de contact. Elle peut être déterminée par l'expression :

$$p = (\underline{\underline{\underline{\Pi}}} \cdot \underline{N}) \cdot \underline{n} \quad (12)$$

Il ne faut donc y appliquer que les efforts tangentiels. On les calcule par l'expression :

$$\begin{aligned} \underline{f}_{surf_i}^{BAS} &= \underline{f}_{surf}^{BAS} - \underline{f}_{surf_n}^{BAS} \\ &= \underline{f}_{surf}^{BAS} - (\underline{f}_{surf_n}^{BAS} \cdot \underline{n}) \underline{n} \end{aligned} \quad (13)$$

Concernant les efforts de contact, *il est absolument indispensable de construire la solution manufacturée de manière à ce qu'ils vérifient les équations du contact* [bib2], à savoir :

$$\begin{aligned} \text{gap}(\underline{U}) &\geq 0 \\ p &\leq 0 \\ p \cdot \text{gap}(\underline{U}) &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Cette vérification se fait après avoir calculé de façon analytique la pression et le saut de déplacement associés à la solution manufacturée, en général avec un outil de calcul formel (en l'occurrence, il s'agit du module Python *sympy*). On doit alors les visualiser, afin de vérifier *rétrospectivement* que la solution que l'on a construite vérifie bien (14). Dans le cas de ce test, nous avons représenté pression et saut de déplacement analytiques en figures 2.1-1 et 2.1-2. On remarque qu'ils vérifient $p < 0$ et $\text{gap}(\underline{U}) = 0$, ce qui est caractéristique d'une surface entièrement contactante, et conforme à (14).

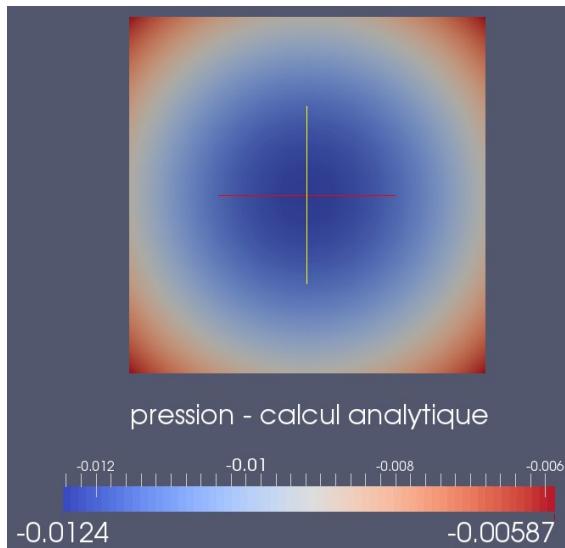


Figure 2.1-1: Validité de la solution manufacturée : pression p

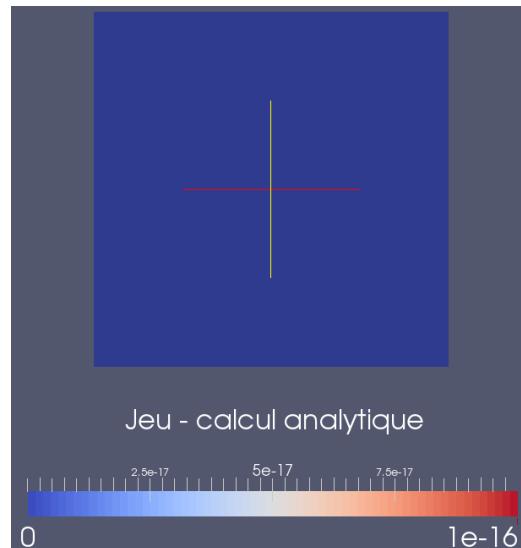


Figure 2.1-2: Validité de la solution manufacturée : jeu $\text{Gap}(\underline{U})$

2.2 Grandeur et résultats de référence

La valeur de l'écart entre solutions analytique et calculée sur le maillage : $\sum_{\text{noeuds } n} |\underline{U}_n^{\text{calc}} - \underline{U}_n^{\text{ref}}|$ et $\sum_{\text{noeuds } n} |p_n^{\text{calc}} - p_n^{\text{ref}}|$.

Dans le cas des modélisations qui réalisent une analyse de convergence avec la finesse du maillage, la vitesse de convergence avec la finesse du maillage de la solution calculée vers la solution analytique en norme L_2 :

- le plus grand réel $\alpha_U > 0$ tel que $\|\underline{U}^{\text{calc}} - \underline{U}^{\text{ref}}\|_{0,\Omega} < C_U \times h^{\alpha_U}$ où C_U est indépendant de h pour le déplacement;
- le plus grand réel $\alpha_p > 0$ tel que $\|p^{\text{calc}} - p^{\text{ref}}\|_{0,\Gamma_c} < C_p \times h^{\alpha_p}$ où C_p est indépendant de h pour la pression de contact.

2.3 Incertitudes sur la solution

Aucune

2.4 Références bibliographiques

- [1] Document U2.08.08, Utilisation de la Méthode des Solutions Manufacturées pour la validation logicielle, Documentation U2 de Code_Aster
- [2] Document R5.03.50, Formulation discrète du contact-frottement, Documentation R de Code_Aster_

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation 3D et la méthode CONTINUE de traitement du contact.

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage contient 1 élément de type QUAD8, 768 éléments de type TRIA6 et 3072 éléments de type TETRA10.

3.3 Grandeur testées et résultats

On teste la somme des valeurs absolues de l'écart entre la solution calculée et la solution analytique.

Identification	Type de référence	Valeur de référence
noeuds n $\sum U_n^{\text{calc}} - U_n^{\text{ref}} $	'NON_REGRESSION'	0.0410211809958

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation 3D et la méthode CONTINUE de traitement du contact.

4.2 Caractéristiques du maillage

On réalise une étude de convergence avec la finesse du maillage de la solution calculée vers la solution analytique. Une suite de maillages obtenus par raffinement uniforme à l'aide de la commande MACR_ADAP_MAIL est utilisée :

- maillage 0 : 1 élément de type QUAD8, 12 éléments de type TRIA6 et 6 éléments de type TETRA10
- maillage 1 : 1 élément de type QUAD8, 48 éléments de type TRIA6 et 48 éléments de type TETRA10
- maillage 2 : 1 élément de type QUAD8, 192 éléments de type TRIA6 et 384 éléments de type TETRA10
- maillage 3 : 1 élément de type QUAD8, 768 éléments de type TRIA6 et 3072 éléments de type TETRA10

4.3 Grandeur testées et résultats

On teste la vitesse de convergence avec la finesse du maillage de la solution calculée vers la solution analytique en norme L_2 :

- le plus grand réel $\alpha_U > 0$ tel que $\|\underline{U}^{\text{calc}} - \underline{U}^{\text{ref}}\|_{0,\Omega} < C_U \times h^{\alpha_U}$ où C_U est indépendant de h pour le déplacement;
- le plus grand réel $\alpha_p > 0$ tel que $\|p^{\text{calc}} - p^{\text{ref}}\|_{0,\Gamma_c} < C_p \times h^{\alpha_p}$ où C_p est indépendant de h pour la pression de contact.

On teste aussi la somme des valeurs absolues de l'écart entre la solution calculée et la solution analytique pour le déplacement.

Identification	Type de référence	Valeur de référence
----------------	-------------------	---------------------

$\sum_{\text{noeuds } n} \underline{U}_{\text{n}}^{\text{calc}} - \underline{U}_{\text{n}}^{\text{ref}} $	'NON_REGRESSION'	4.13935026178E-05
α_U	'ANALYTIQUE'	3.0
α_p	'NON_REGRESSION'	2.534025066720
α_p	'ANALYTIQUE'	2.5

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation 3D et la méthode DISCRETE du gradient conjugué projeté (GCP) de traitement du contact.

5.2 Caractéristiques du maillage

On réalise une étude de convergence avec la finesse du maillage de la solution calculée vers la solution analytique. Une suite de maillages obtenus par raffinement uniforme à l'aide de la commande MACR_ADAP_MAIL est utilisée :

- maillage 0 : 14 éléments de type TRIA6 et 6 éléments de type TETRA10
- maillage 1 : 50 éléments de type TRIA6 et 48 éléments de type TETRA10
- maillage 2 : 194 éléments de type TRIA6 et 384 éléments de type TETRA10
- maillage 3 : 770 éléments de type TRIA6 et 3072 éléments de type TETRA10

On note que, par rapport aux modélisations A et B, la base est maillée avec 2 TRIA6 au lieu d'un QUAD8. En effet, les méthodes discrètes ne sont pas adaptées à l'usage de ces éléments (voir [R5.03.50]).

5.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la vitesse de convergence avec la finesse du maillage de la solution calculée vers la solution analytique en norme L_2 :

- le plus grand réel $\alpha_U > 0$ tel que $\|\underline{U}^{\text{calc}} - \underline{U}^{\text{ref}}\|_{0,\Omega} < C_U \times h^{\alpha_U}$ où C_U est indépendant de h pour le déplacement dans le domaine Ω ;
- le plus grand réel $\alpha_s > 0$ tel que $\|\underline{U}^{\text{calc}} - \underline{U}^{\text{ref}}\|_{0,\Gamma_c} < C_s \times h^{\alpha_s}$ où C_s est indépendant de h pour le déplacement sur la surface Γ_c .

On teste aussi la somme des valeurs absolues de l'écart entre la solution calculée et la solution analytique pour le déplacement.

Identification	Type de référence	Valeur de référence
$\sum_{\text{noeuds } n} \underline{U}_{\text{n}}^{\text{calc}} - \underline{U}_{\text{n}}^{\text{ref}} $	'NON_REGRESSION'	4.25881911029E-05
α_U	'ANALYTIQUE'	3.0
α_p	'ANALYTIQUE'	3.5

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation 3D et la méthode DISCRETE du gradient conjugué projeté (GCP) de traitement du contact.

6.2 Caractéristiques du maillage

On réalise une étude de convergence avec la finesse du maillage de la solution calculée vers la solution analytique. Une suite de maillages obtenus par raffinement uniforme à l'aide de la commande MACR_ADAP_MAIL est utilisée :

- maillage 0 : 2 éléments de type TRIA6, 6 éléments de type QUAD9 et 1 élément de type HEXA27
- maillage 1 : 2 éléments de type TRIA6, 24 éléments de type QUAD9 et 8 élément de type HEXA27
- maillage 2 : 2 éléments de type TRIA6, 96 éléments de type QUAD9 et 64 élément de type HEXA27
- maillage 3 : 2 éléments de type TRIA6, 384 éléments de type QUAD9 et 512 élément de type HEXA27

On note que, par rapport aux modélisations A et B, la base est maillée avec 2 TRIA6 au lieu d'un QUAD8. En effet, les méthodes discrètes ne sont pas adaptées à l'usage de ces éléments (voir [R5.03.50]).

6.3 Grandeur testées et résultats

On teste la somme des valeurs absolues de l'écart entre la solution calculée et la solution analytique pour le déplacement. On ne teste pas le taux de convergence car l'élément HEXA27 fournit la solution exacte avec un unique élément.

Identification	Type de référence	Valeur de référence
noeuds n $\sum U_n^{\text{calc}} - U_n^{\text{ref}} $	'NON_REGRESSION'	0

7 Synthèse des résultats

Les résultats sont en très bon accord avec la théorie.