

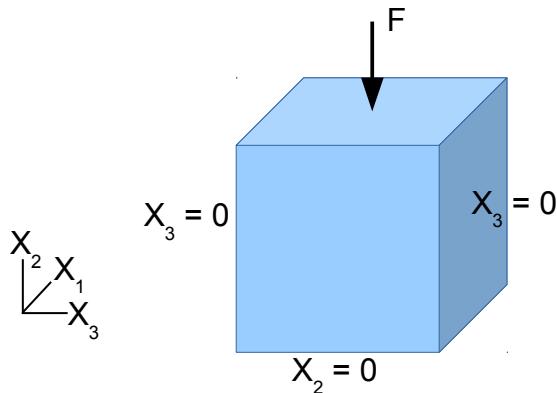
SSNV187 - Validation de la loi ELAS_HYPER sur un cube

Résumé :

Ce test permet de valider le comportement hyper-élastique de type Signorini (matériau ELAS_HYPER). On s'appuie sur un test élémentaire en déformations planes et en 3D, par rapport à une référence analytique.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



On considère un cube de coté 1m qui repose sur un plan ($x_2=0$ sur la face inférieure), soumis à une pression F sur la face supérieure et en situation de déformation plane suivant x_3 ($x_3=0$ sur les faces droite et gauche). Le cube ne peut donc que s'étirer suivant l'axe x_1).

1.2 Propriétés des matériaux

On teste sur trois matériaux différents, correspondant à trois modèles courants en hyper-élasticité.

| Comportement ELAS_HYPER | Mooney-Rivlin | Néo-Hookeen | Signorini |
|----------------------------|---------------|-------------|-----------|
| C10 | 0.709 | 1.2345 | 0.1234 |
| C01 | 2.3456 | 0 | 1.2345 |
| C20 | 0 | 0 | 0.456 |
| NU | 0.499 | 0.499 | 0.499 |

1.3 Conditions aux limites et chargements

- Face inférieure : $DY=0$
- Face supérieure : $F=0.876 \text{ Pa}$
- Face gauche et droite : $DZ=0$ en 3D, rien en D_PLAN

Le chargement est croissant de $F=0$ à $F=0.876 \text{ Pa}$, en 20 incrément.

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

On se repose sur le résultat de [bib1]. L'état de déformations planes permet d'écrire le champ de déplacement uniforme dans le cube très facilement :

$$\begin{cases} u_1 = a_1 \cdot x_1 \\ u_2 = w \cdot x_2 \\ u_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

avec w le déplacement vertical (négatif) de la face supérieure et a_1 une constante arbitraire. La condition d'incompressibilité permet d'écrire :

$$a_1 = \frac{-w}{1+w} \quad (2)$$

Et on trouve la relation entre la force appliquée F et le déplacement w de la face supérieure :

$$F = 2S \cdot \frac{w \cdot (2+w) \cdot (1+(1+w)^2)}{(1+w)^3} \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial J_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial J_2} \right) \quad (3)$$

S est la surface, Ψ est le potentiel de déformation et J_1 , J_2 sont les invariants du tenseur de Green-Lagrange. Le potentiel de déformation utilisé par ELAS_HYPER est le suivant :

$$\Psi = C_{10} \cdot (J_1 - 3) + C_{01} \cdot (J_2 - 3) + C_{20} \cdot (J_1 - 3)^2 + \Psi_{vol} \quad (4)$$

Ψ_{vol} est le potentiel correspondant à l'incompressibilité. Il dépend des invariants J_1 et J_2 et de C_{10} , C_{01} et C_{20} qui sont les caractéristiques matériau. Comme de plus $S=1$ on obtient :

$$F = 2 \cdot \frac{w \cdot (2+w) \cdot (1+(1+w)^2)}{(1+w)^3} \cdot \left[C_{10} + C_{01} + 2 \cdot C_{20} \cdot \frac{w^2 \cdot (2+w)^2}{(1+w)^2} \right] \quad (5)$$

La résolution de cette équation non linéaire en w se fait simplement par dichotomie pour les $w < 0$.

3 Références bibliographiques

- 1 G. A. HOLZAPFEL: Nonlinear solid mechanics, 2001, Wiley.

4 Modélisation A

4.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation en 2D avec déformations planes D_PLAN, en utilisant des mailles linéaires.

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments linéaires : 207 dont 132 triangles et 47 quadrangles (le reste étant les mailles de bord).

Nombre de nœuds : 132

4.3 Grandeur testée et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

| Valeur testée | Instant | Référence | Type | Tolérance |
|-----------------|---------|-------------|------------|-----------|
| Déplacement w | 1,0 | -3,40091E-2 | Analytique | 0,20% |

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

| Valeur testée | Instant | Référence | Type | Tolérance |
|-----------------|---------|-----------|------------|-----------|
| Déplacement w | 1,0 | -0.078180 | Analytique | 0,20% |

Troisième calcul (SIGNORINI)

| Valeur testée | Instant | Référence | Type | Tolérance |
|-----------------|---------|-----------|------------|-----------|
| Déplacement w | 1,0 | -0.070936 | Analytique | 0,20% |

5 Modélisation B

5.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation en 2D avec déformations planes D_PLAN, en utilisant des mailles quadratiques.

5.2 Caractéristiques du maillage.

Nombre d'éléments quadratiques : 207 dont 132 triangles et 47 quadrangles (le reste étant les mailles de bord).

Nombre de nœuds : 132

5.3 Grandeur testée et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

| Valeur testée | Instant | Référence | Type | Tolérance |
|-----------------|---------|-------------|------------|-----------|
| Déplacement w | 1,0 | -3,40091E-2 | Analytique | 0,20% |

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

| Valeur testée | Instant | Référence | Type | Tolérance |
|-----------------|---------|-----------|------------|-----------|
| Déplacement w | 1,0 | -0.078180 | Analytique | 0,20% |

Troisième calcul (SIGNORINI)

| Valeur testée | Instant | Référence | Type | Tolérance |
|-----------------|---------|-----------|------------|-----------|
| Déplacement w | 1,0 | -0.070936 | Analytique | 0,20% |

6 Modélisation C

6.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation 3D.

6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments : 8734 tétraèdres et 1728 noeuds.

6.3 Grandeur testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

| Valeur testée | Instant | Référence | Type | Tolérance |
|-----------------|---------|-------------|------------|-----------|
| Déplacement w | 1,0 | -3,40091E-2 | Analytique | 0,20% |

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

| Valeur testée | Instant | Référence | Type | Tolérance |
|-----------------|---------|-----------|------------|-----------|
| Déplacement w | 1,0 | -0.078180 | Analytique | 0,20% |

Troisième calcul (SIGNORINI)

| Valeur testée | Instant | Référence | Type | Tolérance |
|-----------------|---------|-----------|------------|-----------|
| Déplacement w | 1,0 | -0.070936 | Analytique | 0,20% |

7 Modélisation D

7.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation 3D_SI (éléments TETRA10 sous-intégrés).

7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments : 271 tétraèdres et 514 nœuds.

7.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

| Valeur testée | Instant | Référence | Type | Tolérance |
|-----------------|---------|-------------|------------|-----------|
| Déplacement w | 1,0 | -3,40091E-2 | Analytique | 0,20% |

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

| Valeur testée | Instant | Référence | Type | Tolérance |
|-----------------|---------|-----------|------------|-----------|
| Déplacement w | 1,0 | -0.078180 | Analytique | 0,20% |

Troisième calcul (SIGNORINI)

| Valeur testée | Instant | Référence | Type | Tolérance |
|-----------------|---------|-----------|------------|-----------|
| Déplacement w | 1,0 | -0.070936 | Analytique | 0,20% |

8 Synthèse des résultats

Les résultats obtenus sont en bon accord avec la solution de référence.