
SSNP171 - Fermeture d'une fissure en flexion

Résumé

Ce test permet d'évaluer la méthode XFEM avec contact, lors de la fermeture de fissures.

On considère une éprouvette 2D en flexion, comportant une fissure centrale. La flexion de l'éprouvette provoque une fermeture partielle de la fissure. Sur le fond de fissure demeurant en ouverture, on teste le facteur d'intensité de contrainte K_I . La théorie prévoit que la prise en compte de contact corrige le facteur K_I d'environ 8 %.

Pour jauger l'influence du contact lors de la fermeture, on envisage sept modélisations :

- Modélisation A : une modélisation 2D et des éléments linéaires, avec interpénétration des lèvres de la fissure.
- Modélisation B : une modélisation 2D et des éléments linéaires, avec contact entre les lèvres de la fissure.
- Modélisation C : une modélisation 2D et des éléments quadratiques, avec interpénétration des lèvres de la fissure.
- Modélisation D : une modélisation 2D et des éléments quadratiques, avec contact entre les lèvres de la fissure.
- Modélisation E : une modélisation 3D et des éléments linéaires, avec interpénétration des lèvres de la fissure.
- Modélisation F : une modélisation 3D et des éléments linéaires, avec contact entre les lèvres de la fissure.
- Modélisation G : une modélisation 3D et des éléments quadratiques, avec interpénétration des lèvres de la fissure.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

La structure 2D est une éprouvette rectangulaire ($LX=10$, $LY=20$), comportant une fissure centrale droite et horizontale [Figure 1.1-1]. La demi-longueur de la fissure est constante ($a=1$).

La structure 3D correspond à une extrusion dans la direction Z de l'éprouvette 2D. L'éprouvette devient parallélépipédique de dimensions : $LX=10$, $LY=20$, $LZ=1$. La fissure de longueur $a=1$ dans le plan (X,Y) est aussi extrudée suivant Z.

Les nœuds notés *NOEUD1*, *NOEUD2* sur la Figure 1.1-1 servent à imposer les conditions aux limites, qui sont explicitées au paragraphe [§1.3].

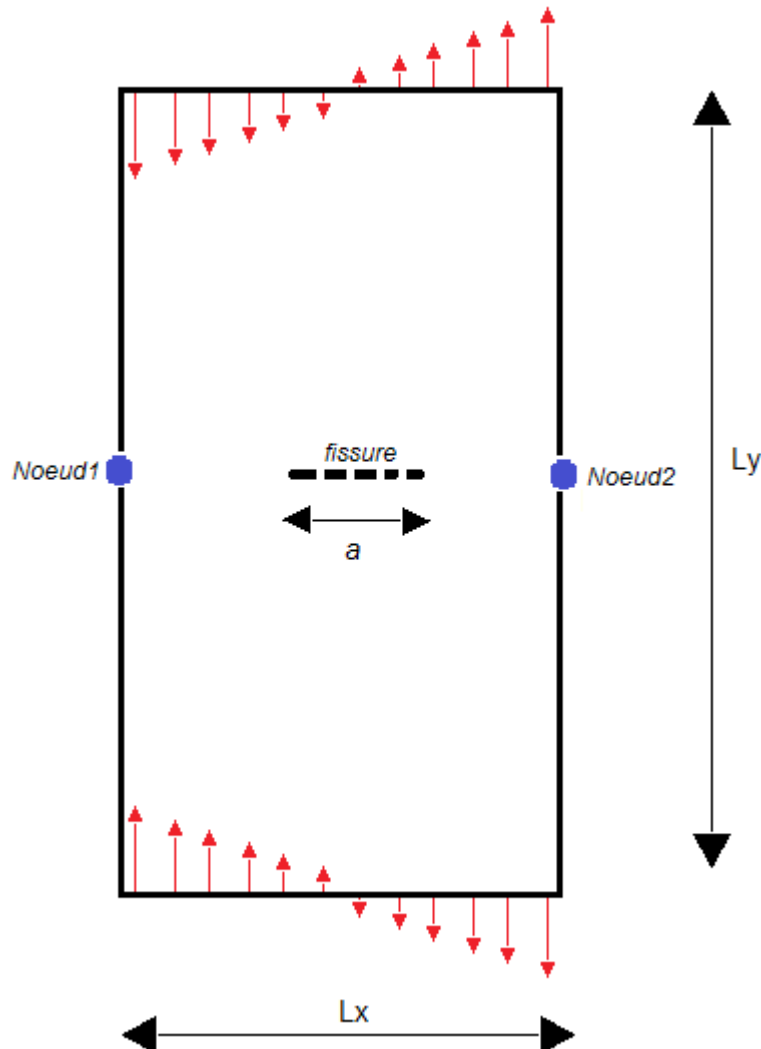


Figure 1.1-1: géométrie de la plaque fissurée 2D

1.2 Propriétés du matériau

Module d'Young : $E=10^6 Pa$

Coefficient de Poisson : $\nu = 0$
Masse volumique : $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Problème 2D (modélisations A, B, C, D):

Le chargement consiste à appliquer une densité de force linéaire, répartie sur les bords inférieur et supérieur de l'éprouvette [Figure 1.3-2].

Sur le bord supérieur on applique une densité de force : $F_1(X, Y) = X$

Sur le bord inférieur on applique une densité de force : $F_2(X, Y) = -X$

Ce chargement exerce une compression sur une moitié de l'éprouvette (moitié à gauche), une traction sur l'autre moitié de l'éprouvette (moitié à droite). Il s'en suit une flexion de l'éprouvette [Figure 3.4-1].

Grâce à ce chargement, on impose :

- la fermeture de la fissure, au voisinage du fond de fissure $P1 = (-a, 0)$, contenu dans la moitié de l'éprouvette en compression ;
- l'ouverture de la fissure, au voisinage du fond de fissure $P2 = (a, 0)$, contenu dans la moitié de l'éprouvette en traction (voir [Figure 1.3-1])

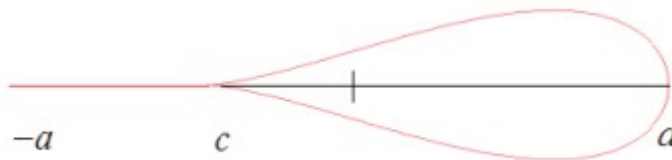


Figure 1.3-1: Fissure partiellement fermée

Afin de bloquer les modes rigides, on bloque les déplacements des nœuds $NOEUD1$, $NOEUD2$ comme suit :

- $DX^1 = DY^1 = 0$
- $DY^2 = 0$.

Ce blocage est appliqué compte tenu du champ de déplacement [Figure 3.4-1]. En effet, le déplacement est rigoureusement nul aux nœuds considérés, car ils appartiennent au plan de symétrie de l'éprouvette, autour duquel l'éprouvette fléchit.

Problème 3D (modélisations E, F, G,):

Le problème 3D reprend l'ensemble des conditions limites du problème 2D en rajoutant seulement la direction Z :

- les efforts sur la face supérieure $F_1(X, Y, Z) = X$,
- les efforts sur la face inférieure $F_2(X, Y, Z) = -X$,

- le blocage des modes rigides $DX^1=DY^1=DZ^1=0$, $DX^2=DY^2=0$ et un 3^e point dans le plan de symétrie pour le dernier mode rigide $DZ^3=0$.

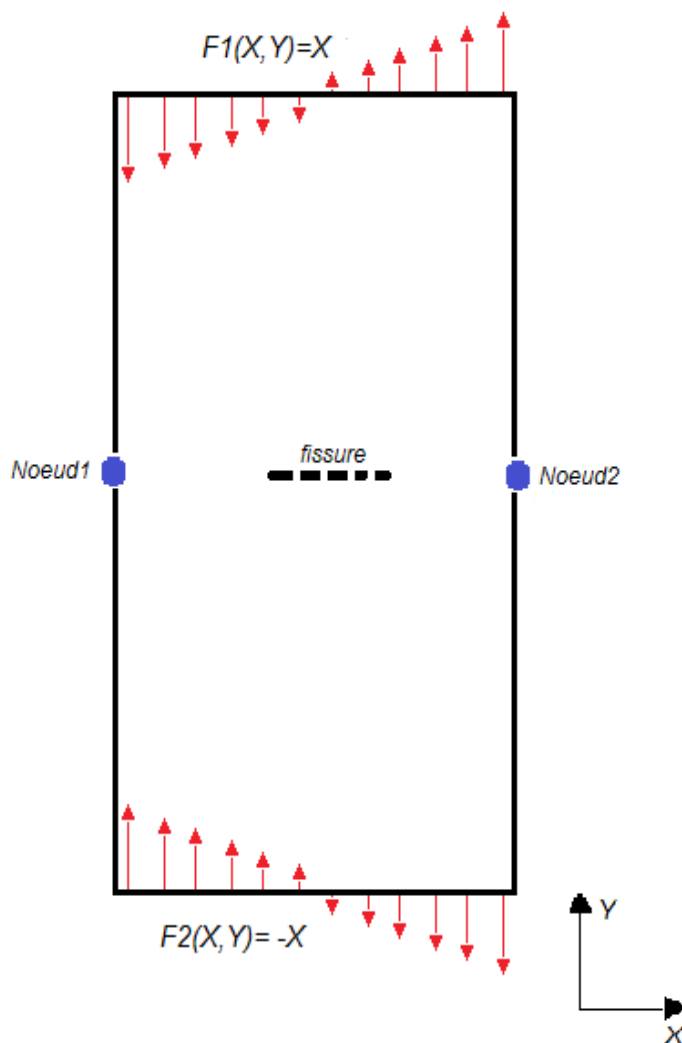


Figure 1.3-2: Conditions limites du problème 2D

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

2.1.1 Modélisations A, C, E, G

On teste le facteur d'intensité de contrainte K_I par rapport à la valeur analytique sans contact.

Pour une éprouvette en flexion et une fissure droite d'abscisse $[-a, a]$, la valeur analytique de K_I sans fermeture de la fissure, est déterminée par la formule de Bui [7] :

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a -t \sqrt{\frac{a-t}{t+a}} dt$$

où a désigne la demi-longueur de la fissure.

A partir de l'intégrale ci-dessus, on calcule l'expression simplifiée de K_I suivante :

$$K_I = \frac{a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}}{2}$$

En effet dans l'intégrale, on effectue plusieurs changements de variables :

$$t \rightarrow at \text{ on a } K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} a^2 \int_{-1}^1 -t \sqrt{\frac{1-t}{t+1}} dt$$

$$t \rightarrow t-1 \text{ on a } K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} a^2 \int_0^2 -(t-1) \sqrt{\frac{2-t}{t}} dt$$

$$t \rightarrow 2t \text{ on a } K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} 2a^2 \int_0^1 -(2t-1) \sqrt{\frac{1-t}{t}} dt$$

$$t \rightarrow t^2 \text{ on a } K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} 2a^2 \int_0^1 -2(2t^2-1) \sqrt{1-t^2} dt$$

$$t \rightarrow \sin t \text{ on a } K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos 2t \cos^2 t dt$$

Après développement du produit de $\cos$:

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \cos 2t + \frac{1}{2} \cos 4t \right) dt$$

D'où l'expression finale (après l'intégration) :

$$K_I = \frac{a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}}{2}$$

La demi longueur étant unitaire ($a=1$), on teste donc le facteur d'intensité de contrainte :

$$K_I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0,88629$$

Par construction, il n'existe pas de mode II. On teste donc : $K_{II}=0$

D'autre part, le taux de restitution d'énergie analytique vaut:

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \approx 7,853982 E^{-7}$$

2.1.2 Modélisation B, D, F

Pour une éprouvette en flexion et une fissure droite d'abscisse $[-a, a]$, la valeur analytique de K_I avec fermeture de la fissure, est déterminée par la formule de Bui [7] :

$$K_I = \sqrt{\frac{2}{\pi(a-c)}} \int_c^a t \sqrt{\frac{t-c}{a-t}} dt$$

où c est l'abscisse du point pour lequel la fissure commence à s'ouvrir (voir [Figure 1.3-1]) et a désigne la demi-longueur de la fissure.

On montre analytiquement [7] que l'abscisse $c = -\frac{a}{3}$

$$\text{Alors, } K_I = \sqrt{\frac{3}{2\pi a}} \int_{-a/3}^a t \sqrt{\frac{t+a/3}{a-t}} dt$$

A partir de l'intégrale ci-dessus, on calcule l'expression simplifiée de K_I suivante:

$$K_I = \left(\frac{2}{3}a\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}$$

En effet dans l'intégrale, on effectue plusieurs changements de variables :

$$t \rightarrow at \text{ on a } K_I = \sqrt{\frac{3}{2\pi a}} a^2 \int_{-1/3}^1 t \sqrt{\frac{t+1/3}{1-t}} dt$$

$$t \rightarrow t - \frac{1}{3} \text{ on a } K_I = \sqrt{\frac{3}{2\pi a}} a^2 \int_0^{4/3} \left(t - \frac{1}{3}\right) \sqrt{\frac{t}{4/3-t}} dt$$

$$t \rightarrow \frac{4}{3}t \text{ on a } K_I = \sqrt{\frac{3}{2\pi a}} a^2 \frac{4}{9} \int_0^1 (4t-1) \sqrt{\frac{t}{1-t}} dt$$

$$t \rightarrow t^2 \text{ on a } K_I = \sqrt{\frac{3}{2\pi a}} a^2 \frac{4}{9} \int_0^1 (4t^2-1) \frac{2t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$t \rightarrow \sin t \text{ on a } K_I = \sqrt{\frac{3}{2\pi a}} a^2 \frac{4}{9} \int_0^{\pi/2} (4\sin^2 t - 1) (2\sin^2 t) dt$$

Après développement des puissances du $\sin t$:

$$K_I = \sqrt{\frac{3}{2\pi a}} a^2 \frac{4}{9} \int_0^{\pi/2} (2 - 3\cos 2t + \cos 4t) dt$$

D'où l'expression finale (après l'intégration) :

$$K_I = \left(\frac{2}{3}a\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}$$

La demi longueur étant unitaire ($a=1$), on teste donc le facteur d'intensité de contrainte :

$$K_I = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi} \approx 0,9648017$$

Par construction, il n'existe pas de mode II. On teste donc : $K_{II}=0$

D'autre part, le taux de restitution d'énergie analytique vaut:

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \approx 9,308423 E - 7$$

2.2 Grandeurs et résultats de référence

On teste K_I , K_{II} et G .

2.2.1 Modélisations A, C, E, F, G

$$K_I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0,88629$$

$$K_{II} = 0$$

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \approx 7,853982 E - 7$$

2.2.2 Modélisation B et D

$$K_I = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi} \approx 0,9648017$$

$$K_{II} = 0$$

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \approx 9,308423 E - 7$$

2.3 Incertitude sur la solution

Faible, solution semi-analytique.

2.4 Références bibliographiques

- [1] GENIAUT S., MASSIN P.: eXtended Finite Element Method, Manuel de référence de Code_Aster, [R7.02.12]

- [2] GENIAUT S. : Approche XFEM pour la fissuration sous contact de structures industrielles, Thèse de doctorat Laboratoire GeM, 2006.
- [3] H.D. Bui: Mécanique de la rupture fragile, Ed. Masson, 1978.
- [4] THRESHER R.W., SMITH F.W. : The partially closed Griffith crack, *International Journal of Fracture* , vol. 9, n°1, pp. 33-41, 1973
- [5] Rice, J. R. (1968), "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks", *Journal of Applied Mechanics* **35** : 379–386

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Dans cette modélisation, la méthode des éléments finis étendue (X-FEM) est utilisée. Les éléments finis sont linéaires.

On définit un rayon d'enrichissement éléments X-FEM fond de fissure $R_{ENRI}=0.5$. Ce rayon d'enrichissement permet de capter plus précisément la solution asymptotique singulière en fond de fissure. La taille de rayon relativement large (25 % de la longueur de la fissure) n'introduit pas des problème de conditionnement, compte-tenu de la nouvelle approximation en fond de fissure [R7.02.12].

3.2 Caractéristiques du maillage

On raffine le maillage au centre de l'éprouvette, afin d'optimiser le calcul de la solution en déplacement au voisinage de la fissure [Figure 3.2-1].

NOMBRE DE NOEUDS	4088	
NOMBRE DE MAILLES	4360	
SEG2		80
TRIA3		466
QUAD4		3814

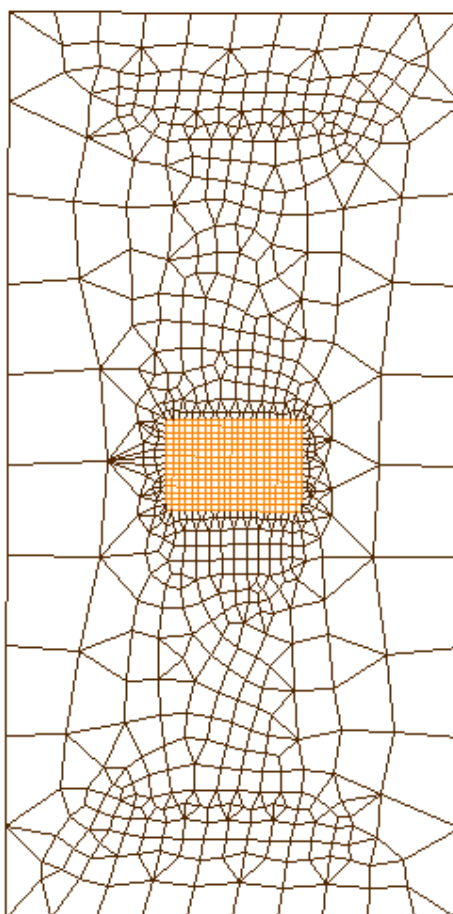


Figure 3.2-1: Maillage du domaine

3.3 Grandeurs testées et résultats

Sur le fond de fissure en ouverture $P2=(a,0)$, on teste le facteur d'intensité de contraintes K_I donné par la commande `CALC_G`, par rapport à la valeur analytique explicitée au paragraphe [5].

Pour la méthode G -thêta (commande `CALC_G`), on choisit les couronnes du champ thêta suivantes :

	Couronne 1	Couronne 2	Couronne 3	Couronne 4	Couronne 5	Couronne 6
Rinf	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1	0,2
Rsup	0,2	0,3	0,4	0,3	0,4	0,4

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Précision
<code>CALC_G/K1</code>	'ANALYTIQUE '	0,88629	1,0%
<code>CALC_G/K2</code>	'ANALYTIQUE '	0,00	0,001%
<code>CALC_G/G</code>	'ANALYTIQUE '	7.85514E-07	2,0%

3.4 Résultats complémentaires

Voici le champ de déplacement calculé par Aster, sans activer de l'algorithme de contact entre les lèvres de fissure :

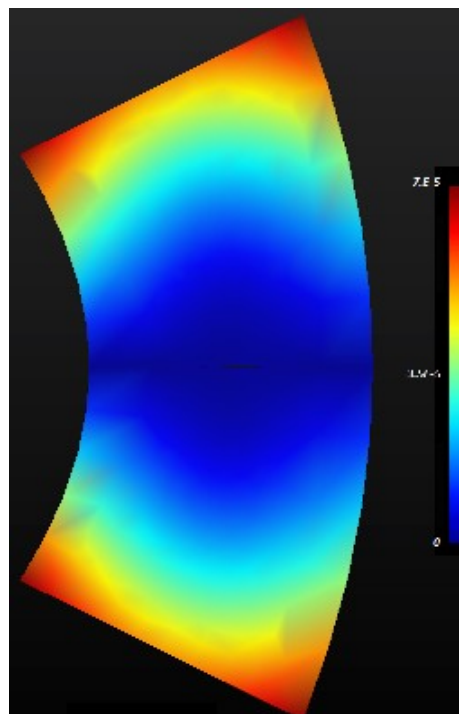


Figure 3.4-1: Champ de déplacement
(avec offset)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Dans cette modélisation, la méthode des éléments finis étendue (X-FEM) est utilisée. On définit un rayon d'enrichissement $R_{ENRI}=0.5$. Les éléments finis sont linéaires.

4.2 Caractéristiques du maillage

Identique à la modélisation A.

4.3 Grandeurs testées et résultats

Sur le fond de fissure en ouverture $P2=(a,0)$, on teste le facteur d'intensité de contraintes K_I donné par la commande `CALC_G`, par rapport à la valeur analytique explicitée au paragraphe [5].

Pour la méthode *G-thêta* (commande `CALC_G`), on choisit les couronnes du champ *thêta* suivantes :

	Couronne 1	Couronne 2	Couronne 3	Couronne 4	Couronne 5	Couronne 6
Rinf	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1	0,2
Rsup	0,2	0,3	0,4	0,3	0,4	0,4

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Précision
<code>CALC_G/K1</code>	'ANALYTIQUE '	0,9648	1,0 %
<code>CALC_G/K2</code>	'ANALYTIQUE '	0,00	0,001
<code>CALC_G/G</code>	'ANALYTIQUE '	9,3084E-7	2,0%

4.4 Résultats complémentaires

En activant l'algorithme de contact, on obtient la solution en déplacement au voisinage de la fissure donnée à la [Figure 1.3-1] (à comparer avec le post-traitement Figure 4.4-1).

D'autre part, on retrouve une conclusion analytique, à savoir l'abscisse du point pour lequel la fissure commence à s'ouvrir:

$$c = -\frac{a}{3} \approx -0.33$$

En effet, en post-traitement, nous avons analysé les pressions de contact pour déterminer l'abscisse du dernier point de contact . Graphiquement, on estime que la pression chute fortement autour du point d'abscisse $x_c \approx -0.325$, ce qui valide l'hypothèse d'estimation de K_I .

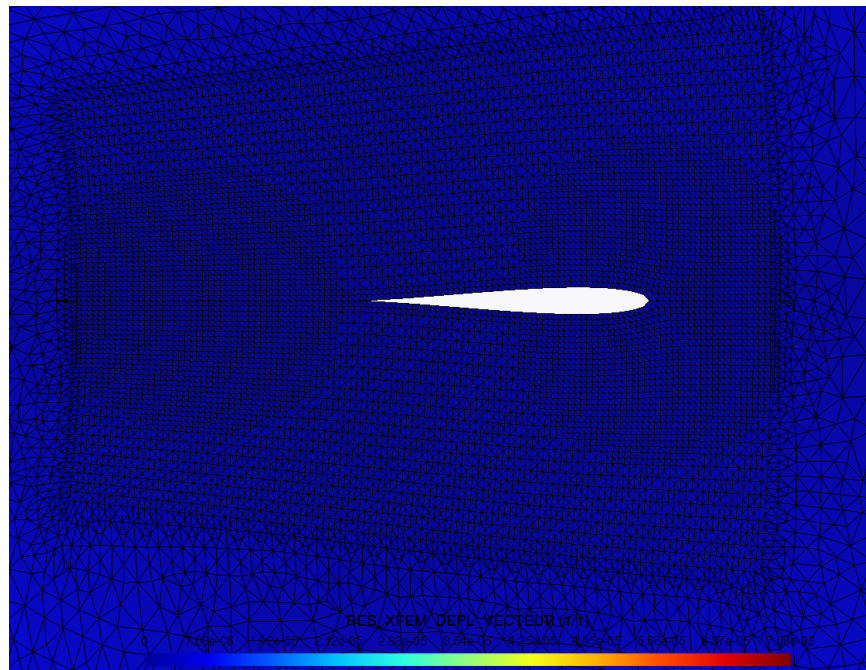


Figure 4.4-1 : faciès de fermeture de la fissure avec contact

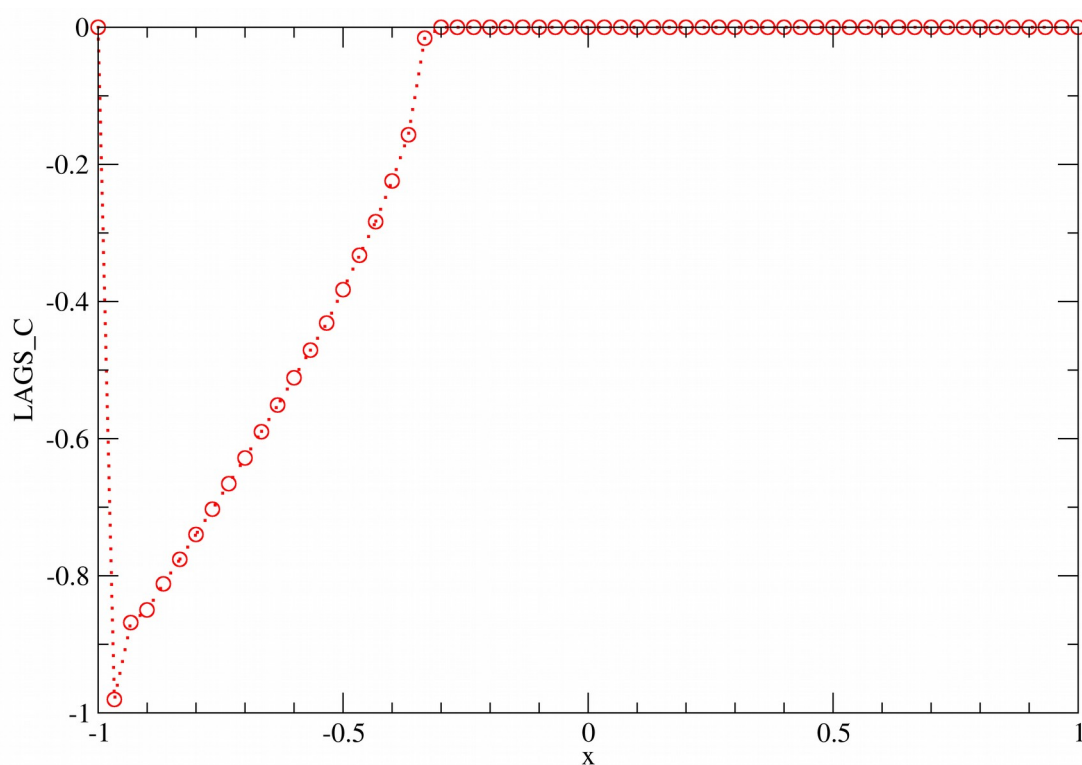


Figure 4.4-2: pression de contact le long de la fissure

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Identique à la modélisation A avec des éléments quadratiques.

5.2 Caractéristiques du maillage

NOMBRE DE NOEUDS	12455
NOMBRE DE MAILLES	4360
SEG3	80
TRIA6	466
QUAD8	3814

5.3 Grandeurs testées et résultats

Pour la méthode G - θ (commande CALC_G), on choisit les couronnes du champ θ suivantes :

	Couronne 1	Couronne 2	Couronne 3	Couronne 4	Couronne 5	Couronne 6
Rinf	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1	0,2
Rsup	0,2	0,3	0,4	0,3	0,4	0,4

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Précision
CALC_G/K1	'ANALYTIQUE'	0,88629	0,05%
CALC_G/K2	'ANALYTIQUE'	0,00	0,001
CALC_G/G	'ANALYTIQUE'	7.85514E-07	1,0%

5.4 Commentaires

Les résultats sont plus précis que la modélisation A.

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Identique à la modélisation B avec des éléments quadratiques.

6.2 Caractéristiques du maillage

Identique à la modélisation C.

6.3 Grandeurs testées et résultats

Pour la méthode $G-\theta$ (commande `CALC_G`), on choisit les couronnes du champ θ suivantes :

	Couronne 1	Couronne 2	Couronne 3	Couronne 4	Couronne 5	Couronne 6
Rinf	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1	0,2
Rsup	0,2	0,3	0,4	0,3	0,4	0,4

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Précision
CALC_G/K1	'ANALYTIQUE '	0,9648	1,0 %
CALC_G/K2	'ANALYTIQUE '	0,00	0,01
CALC_G/G	'ANALYTIQUE '	9,3084E-7	2,0%

6.4 Commentaires

Avec les éléments quadratiques on ne note pas de gain en activant l'algorithme de contact par rapport aux éléments linéaires (modélisation B). La singularité au point de décollement pourrait engendrer une piètre convergence de l'algorithme de contact (l'espace des multiplicateurs capte difficilement la singularité du champ de contrainte au point de décollement, cf. Figure 4.4-2), ce qui engendrerait une difficulté à capter la solution attendue pour ce problème physique.

Néanmoins les résultats sont très satisfaisants étant donné le faible raffinement du maillage (moins de 1500 éléments).

7 Modélisation E

7.1 Caractéristiques de la modélisation

Extrusion de la modélisation A avec des éléments linéaires.

7.2 Caractéristiques du maillage

NOMBRE DE NOEUDS	3868	
NOMBRE DE MAILLES	3240	
	QUAD4	120
	PENTA6	564
	HEXA8	2556

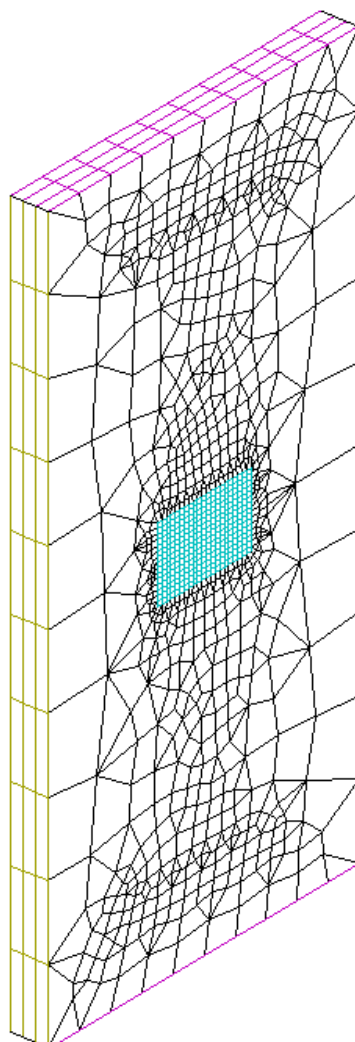


Figure 7.2-1 : Maillage avec zone centrale raffinée en HEXA20

7.3 Grandeurs testées et résultats

Pour la méthode $G-\theta$ (commande `CALC_G`), on choisit les couronnes du champ θ suivantes :

	Couronne 1	Couronne 2	Couronne 3	Couronne 4	Couronne 5	Couronne 6
Rinf	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1	0,2
Rsup	0,2	0,3	0,4	0,3	0,4	0,4

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Précision
CALC_G/K1 (MAX)	'ANALYTIQUE '	0,88629	2,0%
CALC_G/K1 (MIN)	'ANALYTIQUE '	0,88629	2,0%
CALC_G/K2 (MAX)	'ANALYTIQUE '	0,00	0,004
CALC_G/K2 (MIN)	'ANALYTIQUE '	0,00	0,004
CALC_G/G (MAX)	'ANALYTIQUE '	7.85514E-07	4,0%
CALC_G/G (MIN)	'ANALYTIQUE '	7.85514E-07	4,0%

7.4 Commentaires

En 3D, on constate une légère dégradation de la précision pour le calcul des facteurs par rapport à une modélisation 2D équivalente (modélisation A).

8 Modélisation F

Extrusion de la modélisation B avec des éléments linéaires.

8.1 Caractéristiques du maillage

Identique à la modélisation E.

8.2 Grandeurs testées et résultats

Pour la méthode $G-\theta$ (commande `CALC_G`), on choisit les couronnes du champ θ suivantes :

	Couronne 1	Couronne 2	Couronne 3	Couronne 4	Couronne 5	Couronne 6
Rinf	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1	0,2
Rsup	0,2	0,3	0,4	0,3	0,4	0,4

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Précision
CALC_G/K1 (MAX)	'ANALYTIQUE'	0,9648	2,0%
CALC_G/K1 (MIN)	'ANALYTIQUE'	0,9648	2,0%
CALC_G/K2 (MAX)	'ANALYTIQUE'	0,00	0,004
CALC_G/K2 (MIN)	'ANALYTIQUE'	0,00	0,004
CALC_G/G (MAX)	'ANALYTIQUE'	9,3084E-7	4,0%
CALC_G/G (MIN)	'ANALYTIQUE'	9,3084E-7	4,0%

8.3 Commentaires

En 3D, on constate une légère dégradation de la précision pour le calcul des facteurs par rapport à une modélisation 2D équivalente (modélisation B).

9 Modélisation G

Extrusion de la modélisation A avec des éléments quadratiques.

9.1 Caractéristiques du maillage

NOMBRE DE NOEUDS	14793
NOMBRE DE MAILLES	3240
QUAD8	120
PENTA15	564
HEXA20	2556

9.2 Grandeurs testées et résultats

Pour la méthode G - θ (commande CALC_G), on choisit les couronnes du champ θ suivantes :

	Couronne 1	Couronne 2	Couronne 3	Couronne 4	Couronne 5	Couronne 6
Rinf	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1	0,2
Rsup	0,2	0,3	0,4	0,3	0,4	0,4

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Précision
CALC_G/K1 (MAX)	'ANALYTIQUE '	0,88629	0,5%
CALC_G/K1 (MIN)	'ANALYTIQUE '	0,88629	0,5%
CALC_G/K2 (MAX)	'ANALYTIQUE '	0,00	0,001
CALC_G/K2 (MIN)	'ANALYTIQUE '	0,00	0,001
CALC_G/G (MAX)	'ANALYTIQUE '	7.85514E-07	1,0%
CALC_G/G (MIN)	'ANALYTIQUE '	7.85514E-07	1,0%

9.3 Commentaires

En 3D, on constate une amélioration des résultats par rapport à la modélisation avec les éléments linéaires (modélisation E).

10 Synthèses des résultats

Lors de la fermeture d'une fissure, la prise en compte du contact entre les lèvres affecte significativement le facteur d'intensité de contrainte K_I , par rapport à la méthode XFEM sans contact.

Dans ce cas-test, on retrouve une différence de l'ordre de 8% sur la valeur de K_I calculée par Aster, en passant de la modélisation A (sans contact entre les lèvres) à la modélisation B (avec contact). Cette différence est en accord avec les prévisions théoriques.

En effet, la théorie prévoit que la différence vaut:

$$\frac{K_I^{\text{avec contact}} - K_I^{\text{sans contact}}}{K_I^{\text{avec contact}}} = \frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} \approx 8,14413\%$$

Les résultats obtenus montrent que la valeur de K_I avec prise en compte du contact est bien correctement évaluée et supérieure à celle obtenue sans prise en compte du contact. Ce résultat souligne l'importance de la prise en compte des effets liés au contact dans les simulations numériques de fissuration, car cet exemple illustre un cas où la solution avec interpénétration (sans contact) n'est pas conservative du point de vue des facteurs d'intensité de contraintes. Cela peut s'avérer non sans conséquence pour l'étude de la propagation, basée sur des critères de propagation écrits en fonction des facteurs d'intensité de contraintes.