

## FORMA03 - Travaux pratiques de la formation « Utilisation avancée » : charge limite d'une plaque trouée

---

### Résumé :

Ce test 2D en contraintes planes quasi-statique permet d'illustrer sur un cas simple les questions relatives à la modélisation élastoplastique ; il met en évidence les effets de structure, de concentration de contraintes, de charge limite.

Il s'agit d'une plaque rectangulaire homogène, trouée en son centre, constituée d'un matériau élastoplastique avec écrouissage isotrope, dont l'état initial est non contraint, qui est soumise à une traction à ses extrémités. On s'intéresse à la solution élastoplastique en charge.

L'objectif du test est de montrer les possibilités de modélisation, l'utilisation de la commande `STAT_NON_LINE` et le post-traitement avec la plate-forme `Salome-Meca`.

La modélisation A correspond au calcul à force imposée en élasticité. Il illustre l'usage de la commande `STAT_NON_LINE` dans une configuration simplifiée (calcul purement élastique linéaire). Il sert également de référence pour les autres modélisations.

La modélisation B correspond au calcul à force imposée, de référence avec le comportement `VMIS_ISOT_TRAC`, et illustre l'usage des différents paramètres de la commande `STAT_NON_LINE`, ainsi que les commandes de dépouillement.

La modélisation C explicite le mode opératoire pour effectuer le calcul jusqu'à la charge limite, en utilisant le pilotage du chargement par un déplacement.

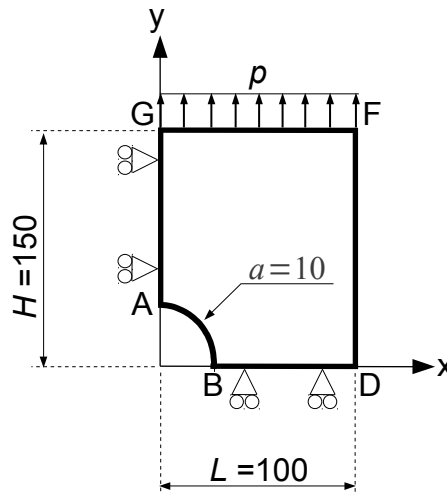
## Table des Matières

1	Problème de référence.....	3
1.1	Géométrie.....	3
1.2	Conditions aux limites et chargements.....	3
1.3	Propriétés des matériaux.....	3
2	Solution de référence.....	5
2.1	Solution élastique.....	5
2.2	Solution élastoplastique (charge limite).....	5
2.3	Références bibliographiques.....	6
3	Mise en œuvre du TP.....	7
3.1	Déroulement du TP.....	7
3.2	Géométrie.....	7
3.3	Maillage.....	7
3.4	Calcul élastique avec STAT_NON_LINE.....	8
3.4.1	Réalisation du calcul.....	8
3.4.2	Post-traitements des résultats avec Aster_Study.....	8
3.5	Calcul élasto-plastique avec STAT_NON_LINE.....	10
3.5.1	Préparation du fichier de commande.....	10
3.5.2	Calcul élastique.....	11
3.5.3	Calcul élasto-plastique en charge.....	11
3.5.4	Calcul élasto-plastique en charge puis décharge.....	13
3.6	Calcul avec charge limite.....	14
3.6.1	Détection « manuelle » de la charge limite.....	14
3.6.2	Calcul au-delà de la charge limite par pilotage.....	15
4	Modélisation A.....	17
4.1	Caractéristiques de la modélisation.....	17
4.2	Caractéristiques du maillage.....	17
4.3	Grandeurs testées et résultats.....	17
5	Modélisation B.....	18
5.1	Caractéristiques de la modélisation.....	18
5.2	Caractéristiques du maillage.....	18
5.3	Grandeurs testées et résultats.....	18
6	Modélisation C.....	19
6.1	Caractéristiques de la modélisation.....	19
6.2	Caractéristiques du maillage.....	19
6.3	Grandeurs testées et résultats.....	19
7	Synthèse des résultats.....	20

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

Il s'agit d'une plaque rectangulaire, comportant un trou, modélisée en 2D contraintes planes. On modélise seulement un quart de la plaque grâce aux symétries. Les dimensions sont données en millimètres.



### 1.2 Conditions aux limites et chargements

#### Conditions de symétrie

La plaque est bloquée suivant  $Ox$  le long du côté  $AG$  et suivant  $Oy$  le long du côté  $BD$ .

#### Chargement en contrainte imposée

Elle est soumise à une traction  $p$  suivant  $Oy$  répartie sur le côté  $FG$ .

### 1.3 Propriétés des matériaux

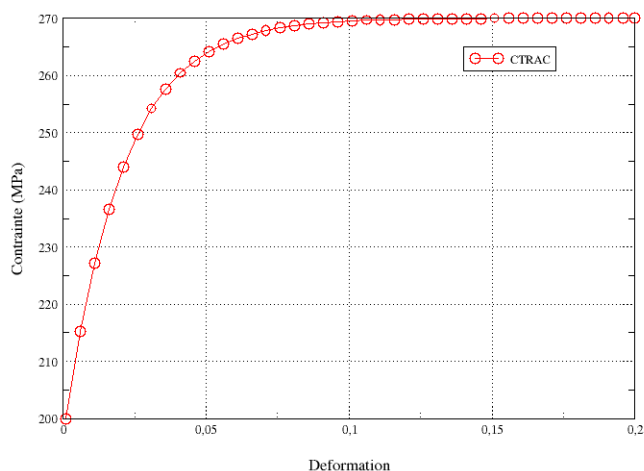
Le comportement est élastoplastique de Von Mises, à écrouissage isotrope.

Les caractéristiques élastiques sont :

- Module d'Young  $E = 200\,000\text{ MPa}$  ;
- Coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$  ;
- Limite d'élasticité :  $200\text{ MPa}$  .

L'écrouissage est déduit de la courbe de traction définie par les données suivantes (prolongement droit constant `PROL_DROITE='CONSTANT'`) :

Courbe de traction



Epsilon	Sigma ( Mpa )		Epsilon	Sigma ( Mpa )
1.00000E-03	2.00000E+02		1.06000E-01	2.69626E+02
6.00000E-03	2.15275E+02		1.11000E-01	2.69709E+02
1.10000E-02	2.27253E+02		1.16000E-01	2.69773E+02
1.60000E-02	2.36630E+02		1.21000E-01	2.69823E+02
2.10000E-02	2.43964E+02		1.26000E-01	2.69862E+02
2.60000E-02	2.49694E+02		1.31000E-01	2.69893E+02
3.10000E-02	2.54168E+02		1.36000E-01	2.69917E+02
3.60000E-02	2.57659E+02		1.41000E-01	2.69935E+02
4.10000E-02	2.60382E+02		1.46000E-01	2.69949E+02
4.60000E-02	2.62506E+02		1.51000E-01	2.69961E+02
5.10000E-02	2.64161E+02		1.56000E-01	2.69969E+02
5.60000E-02	2.65451E+02		1.61000E-01	2.69976E+02
6.10000E-02	2.66457E+02		1.66000E-01	2.69981E+02
6.60000E-02	2.67240E+02		1.71000E-01	2.69986E+02
7.10000E-02	2.67850E+02		1.76000E-01	2.69989E+02
7.60000E-02	2.68325E+02		1.81000E-01	2.69991E+02
8.10000E-02	2.68696E+02		1.86000E-01	2.69993E+02
8.60000E-02	2.68984E+02		1.91000E-01	2.69994E+02
9.10000E-02	2.69209E+02		1.96000E-01	2.69996E+02
9.60000E-02	2.69384E+02		2.00000E-01	2.69996E+02
1.01000E-01	2.69520E+02			

## 2 Solution de référence

### 2.1 Solution élastique

En élasticité, pour une plaque **infinie**, comportant un trou de diamètre  $a$ , soumise à un chargement  $P$  selon  $y$  à l'infini, la solution analytique en contraintes planes et coordonnées polaires  $(r, \theta)$  est :

$$\sigma_{rr} = \frac{P}{2} \cdot \left[ \left( 1 - \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right) - \left( 1 - 4 \cdot \left( \frac{a}{r} \right)^2 + 3 \cdot \left( \frac{a}{r} \right)^4 \right) \cdot \cos(2\theta) \right] \quad (1)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{P}{2} \cdot \left[ \left( 1 + \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right) + \left( 1 + 3 \cdot \left( \frac{a}{r} \right)^4 \right) \cdot \cos(2\theta) \right] \quad (2)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{P}{2} \cdot \left[ \left( 1 + 2 \cdot \left( \frac{a}{r} \right)^2 - 3 \cdot \left( \frac{a}{r} \right)^4 \right) \cdot \sin(2\theta) \right] \quad (3)$$

En particulier, au bord du trou ( $r=a$ ), on a :

$$\sigma_{\theta\theta} = p \cdot [1 + 2 \cdot \cos(2\theta)] \quad (4)$$

Et le long de l'axe  $x$  :

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{yy} = \frac{P}{2} \cdot \left[ \left( 1 + \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right) + \left( 1 + 3 \cdot \left( \frac{a}{r} \right)^4 \right) \right] \quad (5)$$

Numériquement, pour  $P = 10 \text{ MPa}$ , et pour une plaque infinie

Point	Composante	MPa
A	SIGXX	-10
B	SIGYY	30

Pour une plaque de dimension **finie**, les abaques [bib1] permettent d'obtenir le coefficient de concentration de contraintes, et on trouve que pour une traction de  $1 \text{ MPa}$ ,  $SIGYY$  maximum vaut environ  $30.3 \text{ MPa}$  au point  $B$ .

### 2.2 Solution élastoplastique (charge limite)

En élastoplasticité, par une approche statique en contraintes planes, on peut obtenir une borne inférieure de la charge limite pour une bande de largeur  $2L$  finie et de longueur infinie, comportant un trou de largeur  $2a$  et soumise à une contrainte imposée à l'infini  $p$  :

$$\tilde{p}_{\text{lim}} = \frac{\sigma_y \cdot (L - a)}{L} \quad (6)$$

Ici on obtient comme borne inférieure de la charge limite :  $\tilde{p}_{\text{lim}} = 0.9 \times 270 = 243 \text{ MPa}$ . (On prend ici  $\sigma_y = 270 \text{ MPa}$ , car la charge limite est identique entre un matériau élastoplastique parfait et un matériau dont la courbe de traction présente une asymptote horizontale à  $270 \text{ MPa}$ ). Dans ce test

(en particulier la modélisation B), on aimerait trouver, par un calcul élastoplastique, une approximation de cette charge limite, sachant que les méthodes analytiques permettent d'en connaître une borne inférieure. Nous prendrons donc la valeur  $\tilde{p}_{\text{lim}}$  comme référence.

## 2.3 Références bibliographiques

- [1] Analyse limite des structures fissurées et critères de résistance. F. VOLDOIRE : Note EDF/DER/HI/74/95/26 1995
- [2] « Stress concentration factors », Peterson R.E., Wiley, 1974.

## 3 Mise en œuvre du TP

### 3.1 Déroutement du TP

Il s'agit de mener à bien le calcul élastique en générant la géométrie, le maillage et le fichier de commandes AsterStudy à l'aide de la plate-forme Salome-Meca.

Ce TP permet de :

- Mettre en œuvre un calcul non-linéaire standard dans le module AsterStudy : gestion du chargement, des matériaux, du comportement et des paramètres de `STAT_NON_LINE` ;
- Comprendre et mettre en œuvre la notion de pilotage ;
- Faire des post-traitements « évolués » (en particulier tracer des courbes).

### 3.2 Géométrie

On créera la face plane du quart supérieur droit de la plaque.

Lancer le module `Geometry`.

Les principales étapes pour construire cette géométrie sont les suivantes :

- Pour définir les contours de la plaque, on peut, par exemple, utiliser l'outil « Sketcher » (Menu `New Entity` → `Basic` → `2D Sketch`). Il est plus simple de commencer par le point  $B$  de coordonnées  $(10,0)$ . En partant de  $B$ , pour l'arc de cercle, utiliser `Direction / Perpendicular`, et définir l'angle et le rayon. On obtient le point  $A$ . Puis donner les autres points par leurs coordonnées absolues. Terminer par `Sketch Closure`.
- On obtient alors un contour fermé (`Sketch_1`) sur lequel on doit construire une face (Menu `New Entity` → `Build` → `Face`). La géométrie de la plaque est alors complète.
- Construire les groupes des arêtes sur lesquels s'appuieront les conditions aux limites (symétries et chargement) (Menu `New Entity` → `Group` → `Create Group`). Sélectionner le type d'entité géométrique (ici la ligne, `edge`) et sélectionner le bord directement dans la fenêtre graphique. Ensuite, cliquer sur `Add`. Un numéro d'objet doit alors apparaître. On peut changer le nom du groupe avant de le valider par `Apply`. Construire ainsi les groupes de bord suivants pour le calcul : gauche pour le bord  $AG$ , haut pour le bord  $GF$ , droite pour le bord  $FD$ , bas pour le bord  $DB$  et trou pour l'arc  $BA$ .
- On peut également créer les groupes s'appuyant sur les sommets, ils seront utiles pour créer des groupes de nœuds (pour le post-traitement ou le pilotage) (Menu `New Entity` → `Group` → `Create Group`). Sélectionner le type d'entité géométrique (ici le sommet, `vertex`) et sélectionner le sommet directement dans la fenêtre graphique. Ensuite, il faut cliquer sur `Add`. Un numéro d'objet doit alors apparaître. On peut changer le nom du groupe avant de le valider par `Apply`. Construire ainsi les groupes de sommets utiles : les cinq sommets  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $F$  et  $G$ .

### 3.3 Maillage

On créera un maillage plan du quart supérieur droit de la plaque, en éléments quadratiques, pour avoir une précision suffisante.

Lancer le module `Mesh`.

Les principales étapes pour générer le maillage sont les suivantes :

- Construire le maillage (Menu `Mesh` → `Create Mesh`). Sélectionner la géométrie à mailler, puis l'algorithme `Netgen 1D-2D` avec l'hypothèse `Netgen 2D Parameters`. Dans cette hypothèse, il suffit de sélectionner `Fineness` → `Very Fine` et cocher la case `Second Order`. On obtient alors un maillage raffiné près du trou avec de grands éléments dans le haut de la plaque.

- Pour raffiner ce maillage, il faut diminuer `Max Size` dans les paramètres de Netgen, en choisissant par exemple `10`.
- Si on veut raffiner autour du trou, il est possible d'utiliser les cartes de taille dans Netgen :
  - Éditer les paramètres Netgen.
  - Sélectionner l'onglet `Local sizes`.
  - Ajouter le groupe trou avec le bouton `On Edge`. Il suffit alors de modifier la valeur associée. En la diminuant, le maillage sera raffiné sur le trou.
- Calculer le maillage (Menu `Mesh` → `Compute`).
- Créer les groupes de mailles correspondants aux groupes géométriques (Menu `Mesh` → `Create Groups from Geometry`). Sélectionner tous les groupes géométriques.
- Exporter le maillage au format MED.

## 3.4 Calcul élastique avec STAT\_NON\_LINE

Il s'agit de mener à bien le calcul élastique en générant le fichier de commandes Aster Study à l'aide de la plate-forme Salome-Meca. La modélisation est `C_PLAN`. Un quart de la plaque est modélisé. Cette modélisation permet d'effectuer un calcul en élasticité pour  $p$  allant jusqu'à  $10\text{ MPa}$ . On doit trouver les mêmes résultats qu'en utilisant la commande `MECA_STATIQUE`.

### 3.4.1 Réalisation du calcul

Lancer le module `AsterStudy`.

Puis en colonne gauche, cliquer sur l'onglet `Case View`.

On définit le fichier de commandes du cas de calcul (Menu `Operations` → `Add Stage`).

Nota : ajouter des commandes par le menu `Commands` → `Show All`.

Les principales étapes pour la création et le lancement du cas de calcul sont les suivantes :

- Lire le maillage au format MED : Commande `LIRE_MAILLAGE`.
- Orienter le maillage sur le bord affecté par le chargement de Neumann : Commande `MODI_MAILLAGE` / `ORIE_PEAU_2D` en utilisant le groupe `haut`. Mettre le même nom que celui de la commande `LIRE_MAILLAGE`.
- Définir les éléments finis utilisés : Commande `AFFE_MODELE` pour la modélisation en contraintes planes 2D (`C_PLAN`).
- Définir le matériau : Commande `DEFI_MATERIAU`.
- Affecter le matériau : Commande `AFFE_MATERIAU`.
- Affecter les conditions aux limites cinématiques : Commande `AFFE_CHAR_CINE` / `MECA_IMPO` pour la symétrie sur le quart de plaque.
- Affecter le chargement : Commande `AFFE_CHAR_MECA` / `FORCE_CONTOUR` pour la force répartie sur le haut de la plaque. Le plus simple est de définir une charge unitaire ( $FY=1.0$ ), que l'on multipliera ensuite par une fonction rampe.
- Créer une fonction rampe linéaire unitaire variant entre `0.` et `1000.` pour appliquer le chargement mécanique : Commande `DEFI_FONCTION`.
- Créer la discrétisation temporelle à l'aide des commandes `DEFI_LIST_REEL` et `DEFI_LIST_INST`.
- Calculer l'évolution élastique : Commande `STAT_NON_LINE` / `COMPORTEMENT` / `RELATION= ' Elastic (ELAS) '` avec la liste d'instant définie précédemment. Mettre également les conditions aux limites. Si on indique `End time step ( INST_FIN ) =10` dans le mot-clef `Timestepping ( INCREMENT )`, on aura bien appliqué une force de  $10\text{ MPa}$ .

Pour lancer le cas de calcul, en colonne gauche, cliquer sur l'onglet `History View`.

### 3.4.2 Post-traitements des résultats avec Aster\_Study

Pour un calcul non-linéaire, la commande `STAT_NON_LINE` sort en standard trois champs (selon les options du mot-clef `Storing (ARCHIVAGE)`) :

- Le champ des déplacements aux nœuds `DEPL` ;
- Le champ des contraintes aux points de Gauss `SIEF_ELGA` ;
- Le champ des variables internes aux points de Gauss `VARI_ELGA` .

Pour le post-traitement, on propose en plus de calculer :

- Le champ des contraintes aux nœuds (`SIGM_NOEU`). Il faut utiliser pour cela la commande `CALC_CHAMP / CONTRAINTE` .
- Le champ des variables internes aux nœuds (`VARI_NOEU`). Il faut utiliser pour cela la commande `CALC_CHAMP / VARI_INTERNE` .
- Les contraintes équivalentes (Von Mises, Tresca, etc.) aux points de Gauss avec l'option `SIEQ_ELGA` de la commande `CALC_CHAMP / CRITERES` .

On propose ensuite plusieurs post-traitements plus évolués :

Extraction de la contrainte `SIYY` en fonction du déplacement vertical `DY` pour le point `G` :

Extraire les valeurs du déplacement au point `G` dans le résultat en utilisant la commande `RECU_FONCTION` sur le champ `DEPL` , la composante `DY` .

Extraire les valeurs de la contrainte au point `G` dans le résultat en utilisant la commande `RECU_FONCTION` sur le champ `SIGM_NOEU` , la composante `SIYY` .

Imprimer la fonction  $SIYY=f(DY)$  : Commande `IMPR_FONCTION` au format `XMGRACE`.

Extraction de la contrainte `SIYY` sur l'arête inférieure `BD` :

La commande `MACR_LIGN_COUPE` permet d'extraire dans une `TABLE` les composantes d'un champ suivant un chemin donné (mot-clef `LIGN_COUPE` ) . Appliquer la commande sur la composante `SIYY` du champ `SIGM_ELNO` , sur le chemin `BD` .

Imprimer la table issue de la commande `MACR_LIGN_COUPE` en filtrant sur le dernier instant et en affichant les colonnes de l'abscisse curviligne `ABSC_CURV` et de la contrainte `SIYY` : Commande `IMPR_TABLE` .

Extraction des contraintes sur le bord du trou :

On utilise la commande `MACR_LIGN_COUPE` : on extrait les contraintes  $\sigma_{\theta\theta}$  le long du bord du trou en projetant les composantes `SIXX` , `SIYY` et `SIXY` du champ `SIGM_ELNO` dans le repère `POLAIRE` (mot-clef `LIGN_COUPE / REPERE` ) . On produit ainsi une table .

Extraire  $\sigma_{\theta\theta}=f(s)$  avec `s` l'abscisse curviligne ( `ABSC_CURV` ) dans la table précédente à l'aide de la commande `RECU_FONCTION` .

En élasticité, on peut comparer cette courbe à la référence analytique (équation 4 ) . On va créer la fonction analytique : construction la formule (4) à l'aide de la commande `FORMULE` qui dépend de la coordonnée curviligne `s` (`NOM_PARA='S' / VALE='p*(1.+2.*cos(2.*S/R))'` avec  $p=10\text{MPa}$  et  $R=10\text{mm}$  ) .

Interpolation de la formulation par la définition d'une liste de réels (Commande `DEFI_LIST_REEL`)

divisant la coordonnée curviligne de 0 à  $s_{\max}=\frac{\pi}{2.R}$  puis utilisation de la commande `CALC_FONC_INTERP` .

Extraction de la force résultante en haut de la plaque en fonction du déplacement vertical :

Calcul de l'option FORC\_NODA avec la commande CALC\_CHAMP / FORCE .

Extraire les valeurs du déplacement au point  $G$  dans le résultat en utilisant la commande RECU\_FONCTION sur le champ DEPL , composante DY .

On utilise la commande MACR\_LIGN\_COUPE : on calcule la résultante des forces nodales (mot-clef LIGN\_COUPE / RESULTANTE ) le long du groupe haut . On produit ainsi une table .

Extraire  $DY=f(t)$  dans la table précédente à l'aide de la commande RECU\_FONCTION .

## 3.5 Calcul élasto-plastique avec STAT\_NON\_LINE

Il s'agit de mener à bien le calcul élasto-plastique avec écrouissage isotrope donné par une courbe de traction telle que la contrainte uniaxiale tende vers une valeur constante (  $270\text{ MPa}$  ).

Il existe donc une charge limite pour cette structure dont une borne inférieure est connue  $p_{\text{lim}} > 243\text{ MPa}$  . Dans cette modélisation, on ne charge que jusqu'à  $230\text{ MPa}$  et on procède à un retour élastique. Le cas de la charge limite sera traité dans le paragraphe suivant.

### 3.5.1 Préparation du fichier de commande

Lancer le module AsterStudy .

Puis en colonne gauche, cliquer sur l'onglet Case View .

On définit le fichier de commandes du cas de calcul (Menu Operations → Add Stage).

Nota : ajouter des commandes par Menu Commands → Show All .

On définit le fichier de commandes du cas de calcul. Le fichier de commande est très semblable à la modélisation précédente , ci-dessous, en gras, on indique les différences :

- Lire le maillage au format MED : Commande **LIRE\_MALLAGE** .
- Orienter le maillage sur le bord affecté par le chargement de Neumann : Commande **MODI\_MALLAGE / ORIE\_PEAU\_2D** en utilisant le groupe haut . Mettre le même nom que celui de la commande **LIRE\_MALLAGE** .
- Définir les éléments finis utilisés : Commande **AFFE\_MODELE** pour la modélisation en contraintes planes 2D ( **C\_PLAN** ).
- **Lire la courbe de traction fournie dans le fichier forma03b.21 : Commande LIRE\_FONCTION .**
- **Définir le matériau : Commande DEFI\_MATERIAU / Linear isotropic elasticity ( ELAS ) et TRACTION.**
- Affecter le matériau : Commande **AFFE\_MATERIAU** .
- Affecter les conditions aux limites cinématiques et le chargement : Commande **AFFE\_CHAR\_CINE / MECA\_IMPO** pour la symétrie sur le quart de plaque.
- Affecter les conditions aux limites mécaniques et le chargement : Commande **AFFE\_CHAR\_MECA / FORCE\_CONTOUR** pour la force répartie sur le haut de la plaque. Le plus simple est de définir une charge unitaire ( **FY=1.0** ), que l'on multipliera ensuite par une fonction rampe.
- **Créer une première fonction rampe linéaire unitaire variant entre 0. et 1000. pour appliquer le chargement mécanique : Commande DEFI\_FONCTION.**
- **Créer la discrétisation temporelle à l'aide de s commandes DEFI\_LIST\_REEL (30 pas de temps) et DEFI\_LIST\_INST en activant la découpe automatique du pas de temps : ECHEC / EVENEMENT= ' ERREUR ' et ACTION= ' DECOUPE ' ) .**
- **Calculer l'évolution élasto-plastique : Commande STAT\_NON\_LINE ( COMPORTEMENT / RELATION= ' VMIS\_ISOT\_TRAC ' ) avec la liste d'instant définie précédemment. Mettre également les conditions aux limites.**

## 3.5.2 Calcul élastique

Si on indique `End time step ( INST_FIN ) = 1 0` dans le mot-clef `Timestepping ( INCREMENT )` de la commande `STAT_NIN_LINE`, on aura bien appliqué une force de  $10\text{ MPa}$ , ce qui équivaut strictement au cas élastique (paragraphe § 3.4).

Voici quelques éléments à vérifier :

- Vérifier qu'on retrouve les mêmes résultats que dans la modélisation précédente : déplacements et contraintes .
- Vérifier l'indicateur de plasticité ( composante `V1` de `VARI_ELGA` ) . Il doit être nul partout, idem pour la déformation plastique cumulée (composante `V2` ) .
- Observer le tableau de convergence : nombre d'itérations de Newton .
- Faites varier la discrétisation temporelle (nombre de pas de temps) .
- Comparer la contrainte  $\sigma_{00}$  sur le bord du trou et comparer avec la solution analytique (voir « **Extraction des contraintes sur le bord du trou** » dans le paragraphe §3.4.2).

## 3.5.3 Calcul élasto-plastique en charge

Si on indique `End time step ( INST_FIN ) = 23 0` dans le mot-clef `Timestepping ( INCREMENT )` de la commande `STAT_NIN_LINE`, on aura bien appliqué une force de  $230\text{ MPa}$ .

On doit avoir plastification de la structure car la contrainte résultante dans une partie de la structure est supérieure à la limite élastique (qui vaut  $200\text{ MPa}$  ) .

Avec la discrétisation en 30 pas de temps du chargement et l'activation de la découpe du pas de temps, il n'y aura pas de convergence. L'algorithme de Newton échoue. Pour essayer de faire converger, vous pouvez jouer sur plusieurs paramètres :

- Augmenter la discrétisation du chargement (attention à ne pas aller trop loin, moins de 100 pas) pour que le calcul ne soit pas trop long! ) .
- Augmenter le nombre d'itérations maximum de Newton qui vaut 10 par défaut ( `STAT_NON_LINE / CONVERGENCE / ITER_GLOB_MAXI` ) .
- Activer la recherche linéaire ( `STAT_NON_LINE / RECH_LINEAIRE` ) .
- Augmenter le nombre de subdivisions possibles du pas de temps dans la gestion de la non-convergence ( `DEFI_LIST_INST/ECHEC/SUBD_NIVEAU` ) .
- La combinaison de toutes les techniques précédentes .

Voici une combinaison qui fonctionne dans notre cas :

- Discrétisation du chargement en 50 pas ;
- `STAT_NON_LINE / CONVERGENCE / ITER_GLOB_MAXI = 20` ;
- Recherche linéaire activée ;
- Découpe jusqu'à cinq sous-niveaux ( `DEFI_LIST_INST/ECHEC/SUBD_NIVEAU=5` ) .

Avec cette combinaison, on obtient la convergence en 358 pas (au lieu des 30 initiaux, à cause des découpes) et plus de 4300 itérations.

Quelques résultats intéressants à observer :

- A l'instant final du calcul, pour le chargement maximum, on peut remarquer sur les isovaleurs de déformation plastique cumulée, la localisation des déformations plastiques (variable interne `V1` ) au voisinage de  $B$  . On pourra utiliser la visualisation aux points de Gauss pour visualiser la déformation plastique équivalente cumulée aux lieux où elle est calculée .
- Pour un chargement inférieur à  $66,7\text{ MPa}$  , il n'y a pas de plastification .
- Jusqu'à  $230\text{ MPa}$  , on est constamment en charge.
- La valeur maximum du critère de Von Mises aux points de Gauss est toujours inférieure ou égale à  $270\text{ MPa}$  , ce qui montre que la solution vérifie bien la loi de comportement.

Observons le tableau de convergence à un pas quelconque :

Instant de calcul: 2.297250000000e+02 - Niveau de découpe: 2

	NEWTON ITERATION		RESIDU RELATIF		RESIDU ABSOLU		RECH. LINE. NB. ITER		RECH. LINE. COEFFICIENT RHO		OPTION ASSEMBLAGE
			RESI_GLOB_RELA		RESI_GLOB_MAXI						
	0	X	1.81843E-04	X	4.64155E-01		0		- SANS OBJET -		TANGENTE
	1	X	5.17708E-05	X	1.32145E-01		1		1.12982E+00		
	2	X	2.67685E-05	X	6.83265E-02		1		1.46356E+00		
	3	X	1.01270E-05	X	2.58491E-02		1		1.36817E+00		
	4	X	4.14516E-06	X	1.05805E-02		1		1.58835E+00		
	5	X	2.49245E-06	X	6.36199E-03		1		1.46980E+00		
	6	X	1.35865E-06	X	3.46796E-03		1		1.68851E+00		
	7		8.04731E-07		2.05407E-03		1		1.52519E+00		

Nous sommes à l'instant 229.725 , on a découpé deux fois la liste initiale et on converge en 8 itérations de Newton. On remarque :

- La recherche linéaire n'a pas été très coûteuse : une itération seulement (par défaut STAT\_NON\_LINE / RECH\_LINEAIRE / ITER\_LINE\_MAXI=3 ). On voit également qu'il n'y a pas de recherche linéaire en prédiction .
- La convergence est testée sur le critère RESI\_GLOB\_RELA . Sans changer les valeurs par défaut de la commande STAT\_NON\_LINE / CONVERGENCE , on doit donc avoir RESI\_GLOB\_RELA inférieur à  $1.0 \times 10^{-6}$  pour atteindre la convergence .
- La matrice tangente n'est calculée qu'en prédiction, sur plusieurs pas de temps, on voit qu'elle est toujours calculée à la première itération. Ceci correspond bien au réglage par défaut de la commande STAT\_NON\_LINE / NEWTON : REAC\_INCR=1 et REAC\_ITER = 0 .

Il est possible de demander à la commande STAT\_NON\_LINE d'afficher plus d'informations : suivre la valeur d'un degré de liberté (mot-clef SUIVI\_DDL ), ou demander à afficher l'endroit où le critère de convergence est le plus mauvais (mot-clef AFFICHAGE/INFO\_RESIDU='OUI' ). Ce dernier réglage permet, par exemple, de savoir quel endroit de la structure pilote la convergence.

A la fin du transitoire des informations statistiques sont affichées :

Statistiques sur tout le transitoire.

```
* Nombre de pas de temps : 358
* Nombre d'itérations de Newton : 4353
* Nombre de factorisations de la matrice : 358
* Nombre d'intégrations du comportement : 8715
* Nombre de résolutions K.U=F : 4353

* Nombre d'itérations de recherche linéaire : 4004
```

Temps CPU consommé dans le transitoire : 2 m 29 s

dont temps "perdu" dans les découpes : 55.640 s -> la liste d'instant est efficace à 62.8 %

```
* Temps assemblage matrice : 0.790 s
* Temps construction second membre : 5.690 s
* Temps total factorisation matrice : 1.390 s
* Temps total intégration comportement : 2 m 4 s
* Temps total résolution K.U=F : 3.030 s
* Temps autres opérations : 14.120 s
```

Nous n'allons pas détailler toutes les informations mais faire quelques remarques :

- Pour ce on voit que le poste le plus consommateur est l'intégration de la loi de comportement, bien devant la factorisation et la résolution du système. C'est souvent le cas en 2D, mais c'est surtout lié au fait qu'on utilise une version non complète de Newton. La matrice n'est factorisée qu'une fois par pas de temps (on le voit aussi sur le nombre de factorisations : 358, comme le nombre de pas de temps) .
- La liste de temps initiale découpé en 50 pas de temps n'était pas la plus efficace : le temps perdu dans le calcul à cause des échecs de convergence et donc de la redécoupe du pas de temps est d'environ un tiers du temps total .

Pour améliorer substantiellement la convergence, il suffit d'activer le Newton complet : STAT\_NON\_LINE / NEWTON / REAC\_ITER=1 . Sur 50 pas de temps on obtient les résultats suivants :

Statistiques sur tout le transitoire.

```
* Nombre de pas de temps : 50
* Nombre d'itérations de Newton : 152
* Nombre de factorisations de la matrice : 152
```

\* Nombre d'intégrations du comportement : 202  
\* Nombre de résolutions K.U=F : 152

Temps CPU consommé dans le transitoire : 5.330 s  
\* Temps assemblage matrice : 0.220 s  
\* Temps construction second membre : 0.520 s  
\* Temps total factorisation matrice : 0.650 s  
\* Temps total intégration comportement : 3.280 s  
\* Temps total résolution K.U=F : 0.110 s  
\* Temps autres opérations : 0.550 s

En plus de l'augmentation de la vitesse de convergence (30 fois plus rapide), on observe aucune découpe du pas de temps. On peut découper encore plus grossièrement la liste d'instant.

### 3.5.4 Calcul élasto-plastique en charge puis décharge

Nous allons maintenant procéder à la décharge. Pour cela, On définit une nouvelle rampe en forme de chapeau :

1.  $F=0$ . pour  $t=0$  .
2.  $F=230$ . pour  $t=230$ . .
3.  $F=0$ . pour  $t=300$ . .

Puis il faut définir une nouvelle liste d'instant en rapport : Commande `DEFI_LIST_REEL` (30 pas de temps jusqu'à  $t=230$ . , puis 10 pas de temps jusqu'à  $t=300$ . ) et de la commande `DEFI_LIST_INST` en activant la découpe automatique du pas de temps avec `ECHEC / EVENEMENT='ERREUR' et ACTION='DECOUPE'`).

Faites un nouveau calcul (une nouvelle commande `STAT_NON_LINE`) en prenant End time step (`INST_FIN`)= 300. dans le mot-clef `Timestepping` (`INCREMENT`) de la commande `STAT_NON_LINE`, et en oubliant pas d'utiliser la nouvelle rampe et la nouvelle liste d'instant .

Si on reprend la stratégie permettant de mener le calcul jusqu'au bout en plasticité (c'est-à-dire jusqu'à  $p=230 \text{ MPa}$  en utilisant `STAT_NON_LINE / NEWTON / REAC_ITER=1`), en minimisant la découpe temporelle (exercice précédent), on s'aperçoit que cette stratégie doit être améliorée sur la partie décharge plastique car elle ne converge pas avec ces réglages.

On rappelle que la décharge se fait de manière élastique et crée une déformation inélastique lorsque le chargement est nul. Pour que le calcul converge, il est donc nécessaire d'activer la matrice élastique en prédiction (`STAT_NON_LINE / NEWTON / PREDICTION='ELASTIQUE'`).

Il s'agit de mener à bien le calcul élasto-plastique avec écrouissage isotrope donné par une courbe de traction telle que la contrainte uniaxiale tende vers une valeur constante (  $270 \text{ MPa}$  ).

Il existe donc une charge limite pour cette structure dont une borne inférieure est connue :  $p_{\text{lim}} > 243 \text{ MPa}$  . Dans cette modélisation, on va montrer comment mener le calcul au delà de cette charge limite grâce au pilotage.

## 3.6 Calcul avec charge limite

### 3.6.1 Détection « manuelle » de la charge limite

Lancer le module AsterStudy.

Puis en colonne gauche, cliquer sur l'onglet Case View.

On définit le fichier de commandes du cas de calcul (Menu Operations → Add Stage).

Nota : ajouter des commandes par Menu Commands → Show All.

Le fichier de commande est presque identique à la modélisation précédente. La seule différence est que nous proposons ici d'activer la gestion automatique de la liste d'instants, c'est-à-dire que la discrétisation temporelle est entièrement gérée par STAT\_NON\_LINE.

- Lire le maillage au format MED : Commande `LIRE_MALLAGE`.
- Orienter le maillage sur le bord affecté par le chargement de Neumann : Commande `MODI_MALLAGE / ORIE_PEAU_2D` en utilisant le groupe `haut`. Mettre le même nom que celui de la commande `LIRE_MALLAGE`.
- Définir les éléments finis utilisés : Commande `AFFE_MODELE` pour la modélisation en contraintes planes 2D (`C_PLAN`).
- Lire la courbe de traction fournie dans le fichier `forma03c.21` Commande `LIRE_FONCTION`.
- Définir le matériau : Commande `DEFI_MATERIAU / Linear isotropic elasticity` (`ELAS`) et `TRACTION`.
- Affecter le matériau : Commande `AFFE_MATERIAU`.
- Affecter les conditions aux limites cinématiques et le chargement : Commande `AFFE_CHAR_CINE / MECA_IMPO` pour la symétrie sur le quart de plaque.
- Affecter les conditions aux limites mécaniques et le chargement : Commande `AFFE_CHAR_MECA / FORCE_CONTOUR` pour la force répartie sur le haut de la plaque. Le plus simple est de définir une charge unitaire (`FY=1.0`), que l'on multipliera ensuite par une fonction rampe.
- Créer une fonction rampe linéaire variant entre 0. et 1000. pour appliquer le chargement mécanique : Commande `DEFI_FONCTION`.
- Activer la gestion automatique du pas de temps avec la commande `DEFI_LIST_INST / METHODE='AUTO'` et `DEFI_LIST` avec `VALE=(0., 50., 243)`, `PAS_MINI=1.e-6` et `PAS_MAXI=100`. La liste `VALE` donne les trois instants de passage obligatoire de la liste automatique.
- Calculer l'évolution de l'élasto-plastique : Commande `STAT_NON_LINE / COMPORTEMENT / RELATION='VMIS_ISOT_TRAC'` avec la liste d'instant définie précédemment.

On propose d'abord de constater « à la main » la charge limite. La charge limite correspond au moment où un point de Gauss atteint la valeur équivalente de Von Mises d'environ 270MPa. Par le calcul analytique (voir §2.2), on a déterminé une borne inférieure du chargement qui provoque une plastification à cette valeur limite de 270MPa (autour du trou).

Pour cela, procéder comme dans la modélisation précédente mais faites un chargement au delà de  $p=230\text{MPa}$ . Dans un premier temps, une valeur de  $p=245\text{MPa}$  est une bonne référence.

On voit qu'au delà d'un certain chargement, la matrice tangente devient singulière : c'est le signe qu'on a atteint la charge limite et donc une tangente horizontale sur la courbe de traction. Le code va tenter de découper le pas de temps pour aller au-delà de ce point limite. Par dichotomie (découpe du pas de temps), il va s'approcher de la valeur de chargement limite. Selon les maillages, on trouve que  $p_{\text{lim}} \approx 243\text{MPa}$ .

La cause de la convergence difficile est bien la proximité de la charge limite. C'est pourquoi il faut subdiviser le pas de temps. On peut s'en rendre compte par la valeur du chargement et par la courbe contrainte-déplacement en haut de la structure : on peut constater que pour  $p=240\text{MPa}$  la charge limite n'est pas complètement atteinte (pas d'asymptote horizontale) mais que l'on s'en rapproche. Les isovaleurs de  $p$  montrent une zone de concentration de déformation plastique (assimilable à une ligne de glissement) inclinée de  $53^\circ$  environ par rapport à la verticale, allant du point  $B$  au bord droit. Ceci correspond assez bien à la théorie qui dit que les lignes de glissement sont inclinées de  $54,44^\circ$  (voir [bib2]). On a ici bien sûr une approximation de la ligne de

glissement qui est en théorie d'épaisseur nulle. On peut aussi relever le déplacement vertical maximum suivant  $Y$  du point  $G$ . Il est d'environ  $5.7\text{mm}$ .

### 3.6.2 Calcul au-delà de la charge limite par pilotage

La meilleure solution si on souhaite atteindre le chargement limite et même aller au-delà (par la résolution d'un problème élastoplastique incrémental) est d'utiliser le pilotage de la contrainte imposée par le déplacement d'un point. C'est ce qu'on propose ici. On pourra utiliser par exemple le déplacement  $DY$  du point  $G$  pour piloter la contrainte  $\sigma_{yy}$  imposée sur  $FG$ . On l'augmentera jusqu'à  $6\text{mm}$  par exemple (dans le calcul précédent, on a observé que le déplacement maximum suivant  $Y$  du point  $G$  était d'environ  $5.7\text{mm}$ ,  $6\text{mm}$  est donc bien au-delà de la charge limite). On prendra un coefficient égal à 1. On utilisera donc un temps fictif  $t$  tel que  $\Delta t = \Delta U_Y(G) \times 1$ . Donc le temps varie ici entre 0 et  $6\text{s}$  (pour représenter un déplacement entre 0 et  $6\text{mm}$ ).

Remarque : en alternative à ce type de calcul, une méthode de calcul de la charge limite est disponible dans Code\_Aster (en 3D, axisymétrique et déformation plane): elle utilise un matériau de Norton-Hoff, des éléments quasi-incompressibles et des méthodes directes d'analyse limite fournissant un encadrement de la charge limite (cf. les documents [U2.05.04] et [R7.07.01]).

Lancer le module `AsterStudy`.

Puis en colonne gauche, cliquer sur l'onglet `Case View`.

On définit le fichier de commandes du cas de calcul (Menu `Operations` → `Add Stage`).

Nota : ajouter des commandes par Menu `Commands` → `Show All`.

Les principales étapes pour la création et le lancement du cas de calcul sont les suivantes :

- Lire le maillage au format MED : Commande `LIRE_MALLAGE`.
- Orienter le maillage sur le bord affecté par le chargement de Neumann : Commande `MODI_MALLAGE / ORIE_PEAU_2D` en utilisant le groupe `haut`. Mettre le même nom que celui de la commande `LIRE_MALLAGE`.
- Définir les éléments finis utilisés : Commande `AFFE_MODELE` pour la modélisation en contraintes planes 2D (`C_PLAN`).
- Lire la courbe de traction fournie dans le fichier `forma03c.21` Commande `LIRE_FONCTION`.
- Définir le matériau : Commande `DEFI_MATERIAU / Linear isotropic elasticity (ELAS)` et `TRACTION`.
- Affecter le matériau : Commande `AFFE_MATERIAU`.
- Affecter les conditions aux limites cinématiques : Commande `AFFE_CHAR_CINE / MECA_IMPO` pour la symétrie sur le quart de plaque.
- Affecter le chargement : Commande `AFFE_CHAR_MECA / FORCE_CONTOUR` pour la force répartie sur le haut de la plaque. On définit une charge unitaire ( $FY=1.0$ ) qui sera pilotée dans `STAT_NON_LINE`.
- Créez la discrétisation temporelle à l'aide des commandes `DEFI_LIST_REEL` (10 pas de temps jusqu'à  $t=4$ ) et `DEFI_LIST_INST` en activant la découpe automatique du pas de temps : `ECHEC / EVENEMENT='ERREUR' et ACTION='DECOUPE'`.
- Modifier le type du chargement (force répartie) : dans la commande `STAT_NON_LINE / Loads (EXCIT)`, utiliser `Load type (TYPE_CHARGE)='FIXE_PILO'` pour la force appliquée. Et activer le pilotage : mot-clef facteur `PILOTAGE` :  
`TYPE='Enforce DOF (DDL_IMPO)'`.  
`COEF_MULT=1.0`.  
`GROUP_NO='G'`.  
`NOM_CMP='DY'`.
- Calculer l'évolution de l'élasto-plastique : Commande `STAT_NON_LINE / COMPOTEMENT / RELATION='VMIS_ISOT_TRA C'`.

Observez dans le fichier « message » la valeur du paramètre `ETA_PILOTAGE`. On obtient en principe une bonne approximation de la charge limite (par valeur supérieure) que l'on pourra comparer à la borne inférieure analytique (  $243\text{ MPa}$  ).

On pourra tracer, en poursuite, la courbe force résultante-déplacement en  $G$  en fonction du temps. On devrait retrouver sur cette courbe la valeur de la charge limite donnée par '`ETA_PILOTAGE`'.

**Extraction du paramètre de pilotage :**

Extraire les valeurs du coefficient de pilotage dans le résultat en utilisant la commande `RECU_FONCTION/ NOM_PARA_RESU` sur le paramètre `ETA_PILOTAGE` .

**Imprimer la fonction** `ETA_PILOTAGE=f(t)` : **Commande** `IMPR_FONCTION` .

On peut visualiser avec Salomé, la déformée, les isovaleurs de contraintes  $S_{IYY}$  et de la déformation plastique équivalente cumulée. A l'instant 6 , on peut remarquer sur les isovaleurs de déformation plastique cumulée, la localisation des déformations au voisinage de  $B$  .

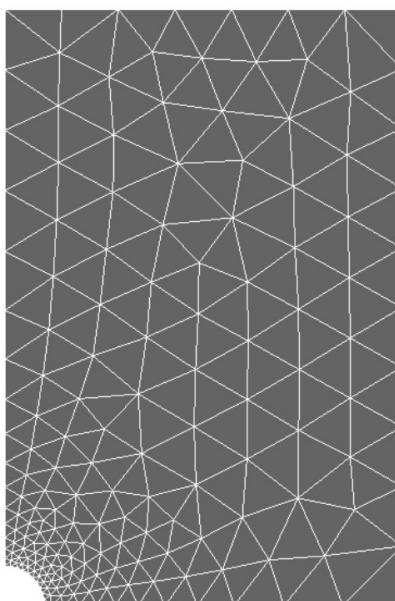
## 4 Modélisation A

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Calcul élastique sur un modèle en contraintes planes (C\_PLAN). Le chargement est défini dans le § 1.2 . On charge jusqu'à  $p = 10 \text{ MPa}$  .

### 4.2 Caractéristiques du maillage

On utilise un maillage.



### 4.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur des composantes de contraintes pour le chargement de  $10 \text{ MPa}$  :

Composante	Type de référence	Valeur	Tolérance
SIGM_NOEU – $S_{IYY}$ en $B$	ANALYTIQUE	$30 \text{ MPa}$	1,00%
SIGM_NOEU – $S_{IXX}$ en $A$	ANALYTIQUE	$-10 \text{ MPa}$	2,00%

## 5 Modélisation B

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

On fait trois calculs sur un modèle en contraintes planes (C\_PLAN) :

- Calcul élastique : on charge jusqu'à  $p = 10 \text{ MPa}$  ;
- Calcul élasto-plastique : on charge jusqu'à  $p = 230 \text{ MPa}$  ;
- Calcul élasto-plastique puis décharge : on charge jusqu'à  $p = 230 \text{ MPa}$  puis on décharge jusqu'à  $p = 0$  .

### 5.2 Caractéristiques du maillage

On utilise le même maillage que la modélisation A qui comporte 315 TRIA6 et 686 nœuds.

### 5.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur des composantes de contraintes pour le calcul élastique (chargement de  $10 \text{ MPa}$  ), on doit trouver la même chose que dans la modélisation A, soit :

Composante	Type de référence	Valeur	Tolérance
SIGM_NOEU – SIYY en B	AUTRE_ASTER	Identique A	
SIGM_NOEU – SIXX en A	AUTRE_ASTER	Identique A	

On teste la valeur des composantes de contraintes et des variables internes pour le calcul élasto-plastique (à l'instant correspond au chargement de  $230 \text{ MPa}$  ) :

Composante	Type de référence	Tolérance
SIGM_NOEU – SIYY en B	NON_REGRESSION	1,00E-006%
SIGM_NOEU – SIXX en A	NON_REGRESSION	1,00E-006%
VARI_NOEU – V1 en B	NON_REGRESSION	1,00E-006%
VARI_NOEU – V2 en B	NON_REGRESSION	1,00E-006%
VARI_NOEU – V1 en A	NON_REGRESSION	1,00E-006%
VARI_NOEU – V2 en A	NON_REGRESSION	1,00E-006%

On teste la valeur des composantes de contraintes et des variables internes pour le calcul élasto-plastique avec décharge (à l'instant correspond au déchargement final de  $0$  ) :

Composante	Type de référence	Tolérance
SIGM_NOEU – SIYY en B	NON_REGRESSION	1,00E-006%
SIGM_NOEU – SIXX en A	NON_REGRESSION	1,00E-006%
VARI_NOEU – V1 en B	NON_REGRESSION	1,00E-006%
VARI_NOEU – V2 en B	NON_REGRESSION	1,00E-006%
VARI_NOEU – V1 en A	NON_REGRESSION	1,00E-006%
VARI_NOEU – V2 en A	NON_REGRESSION	1,00E-006%

## 6 Modélisation C

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation

On fait deux calculs sur un modèle en contraintes planes (C\_PLAN) :

- Calcul élasto-plastique : on charge jusqu'à  $p=243 \text{ MPa}$  ;
- Calcul élasto-plastique : on fait un calcul par pilotage au-delà de la charge limite ;

### 6.2 Caractéristiques du maillage

On utilise le même maillage que la modélisation B qui comporte 315 TRIA6 et 686 nœuds.

### 6.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur de la charge limite pour le calcul élastoplastique sans pilotage, par rapport à la solution analytique de la borne minimale et par non-régression :

Composante	Type de référence	Valeur	Tolérance
SIGM_NOEU – SIYY en G	ANALYTIQUE	243 MPa	1,00%

On teste la valeur de la charge limite pour le calcul élastoplastique avec pilotage (déplacement imposé vertical de 6mm au point G), par rapport à la solution analytique de la borne minimale, de la solution sans pilotage et par non-régression :

Composante	Type de référence	Valeur	Tolérance
SIGM_NOEU – SIYY en G	ANALYTIQUE	243 MPa	1,00%
SIGM_NOEU – SIYY en G	AUTRE_ASTER	243.05 MPa	0.30%
ETA_PILOTAGE en INST=6	ANALYTIQUE	243 MPa	1,00%

---

## 7 Synthèse des résultats

---

Ce test permet de montrer comment mener le calcul d'une structure élasto-plastique et son dépouillement, et en particulier de mettre en évidence le bénéfice à utiliser le pilotage pour un problème de charge limite. On peut retenir de ce test quelques idées :

- Même en dehors d'un comportement élasto-plastique parfait, il peut exister une charge limite. C'est le cas avec toutes les courbes de traction réelles. Il faut alors adapter la méthode de résolution à la solution mécanique et par exemple utiliser le pilotage ;
- Le découpage en petits incréments de charge est souvent nécessaire pour intégrer correctement la relation de comportement. Cela peut aider aussi à la convergence, il est donc conseillé d'utiliser le redécoupage automatique du pas de temps ;
- La recherche linéaire peut être utilisée pour aider à la convergence, ainsi que la subdivision automatique des pas de temps. En cas de décharge, la prédiction élastique est une solution efficace.