# SSNL138 - Validation de l'algorithme d'optimisation sous contrainte d'inégalités de l'option DDL_STAB

**Résumé :**

Ce test permet la validation de l'option DDL_STAB de CRIT_STAB, qui évalue la stabilité des états d'équilibre trouvés par la simulation numérique des problèmes non conservatifs comme les problèmes d'endommagement. Ce qui nécessite d'appliquer un algorithme d'optimisation sous contraintes d'inégalités. L'option peut être appliquée à une liste contenant n'importe quel degré de liberté disponible dans *Code_Aster.*

# 1 Problème de référence

## 1.1 Cadre théorique

On définit l'unicité de la solution d'un problème d'endommagement discrétisé, par la positivité du quotient suivant, écrit à partir de l'opérateur tangent $K$ :

$$\underset{x=(u,a)}{Min}\left(\frac{x^T.Kx}{x^T.x}\right)>0$$ **Équation 1.1**

où $u$ désigne les degrés de liberté de déplacement et *a* les degrés de liberté d'endommagement. Lorsque ce critère n'est plus vérifié, il peut exister plusieurs solutions au problème discrétisé par la méthode des éléments finis, qui consiste à vérifier les conditions premières d'équilibre. Il est alors nécessaire de discuter de la stabilité de la solution, en vérifiant la positivité de la dérivée seconde de l'énergie, dans la direction des endommagements croissants (condition d'irréversibilité sur l'endommagement) :

$$\underset{x=(u,a\geq 0)}{Min}\left(\frac{x^T.Kx}{x^T.x}\right)\geq 0$$ **Équation 1.2**

L'unicité et la stabilité de la solution homogène d'une barre en traction ont été étudiées analytiquement (Pham, Amor, Marigo et Maurini*, « Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture »,* 2009) et Les critères ont été écrits comme des rapports entre l'endommagement *a* de la barre, sa longueur $L$ et la longueur interne $l$. On s'intéresse ici plus particulièrement à la formulation énergétique suivante, qui correspond à la loi de comportement `ENDO_CARRE` pour la modélisation `GVNO` :

$$\phi=\frac{1}{2}(1-a)^2 E_0\varepsilon(u)^2+\frac{{\sigma_M}^2}{E_0}a+\frac{E_0 l^2}{2}\nabla a.\nabla a$$ **Équation 1.2**

où $E_0$ et $\sigma_M$ sont respectivement la rigidité saine du matériau et la contrainte limite et où $\varepsilon(u)$ est la déformation de la barre associée au déplacement $u$.

Le critère d'unicité se définit alors par l'inégalité :

$$L^2<\frac{2\pi^2 E_0^2(1-a)}{6\sigma_M^2}l^2$$ **Équation 1.4**

et le critère stabilité, par l'inégalité :

$$L^2\leq\frac{128\pi^2 E_0^2(1-a)}{216{\sigma_M}^2}l^2$$ **Équation 1.5**

En observant les deux inégalités présentées (équations 1.4 et 1.5), on voit que la perte d'unicité se produit avant la perte de stabilité. L'objectif du cas test est alors d'estimer le critère de stabilité, dans un premier temps entre le chargement de perte d'unicité et celui de perte de stabilité (la valeur du minimum du quotient de Rayleigh (1,2) doit alors être positive), et dans un second temps après le chargement de perte de stabilité (le minimum calculé doit alors être négatif).

## 1.2 Géométrie

On considère une barre $2\mathrm{D}$ de longueur $L=100\,\mathrm{m}$ est de hauteur $h=1\,\mathrm{m}$ .

**Figure 1 : Représentation du problème**

## 1.3 Propriétés du matériau

### 1.3.1 Paramètres matériau

Caractéristiques élastiques :
$E=1\,\mathrm{Pa}$
$\nu=0$
Caractéristique de la loi d'endommagement :
$\sigma_M=0.01\,\mathrm{Pa}$
Caractéristique non-linéaire :
$l=1\,\mathrm{m}$

## 1.4 Conditions aux limites et chargements

**Encastrement** : Déplacements imposés nuls $DY=0\,m$ sur les nœuds du bas de la barre ( $y=0.$ ), ainsi que sur les nœuds du haut ( $y=1.$ ). Déplacement imposé nul $DX=0\,m$ sur la face gauche ( $x=0.$ ). Voir figure1.

**Chargement 1** : Déplacement linéaire imposé $U=2\times t\,\mathrm{m}$ sur la face droite ( $x=100.$ ).

# 2 Solution de référence

La valeur de l'estimation du minimum du quotient de Rayleigh sous contraintes d'inégalités (1.2), obtenue à partir de l'option `DDL_STAB` de l'opérateur `CRIT_STAB` avec comme paramètres : `NB_FREQ = 25` et `COEF_DIM_ESPACE = 2`, est de $3.430938\,E-8$ au premier pas de temps pour lequel la solution homogène est encore stable et de $-5.598244\,E-9$ au second pas de temps où la solution est théoriquement instable. Ces valeurs sont utilisées comme références et le cas test est un cas de non régression.

On voit que l'on retrouve bien avec l'option `DDL_STAB` , une estimation du critère de stabilité positive pour le premier pas de temps, puis négative pour le second. Les résultats sont donc en accord avec la théorie, ce qui valide l'algorithme développé.

# 3 Modélisation A

## 3.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise la modélisation D_PLAN_GVNO.

## 3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage contient 1416 éléments QUAD8.

## 3.3 Résultats

| NUMERO | TYPE_REFERENCE | VALE_REF | TOLE |
|---|---|---|---|
| 1 | 'NON_REGRESSION' | 3.430938 E-08 | 5.0E-5% |
| 2 | 'NON_REGRESSION' | -5.598244 E-09 | 5.0E-5% |

**Tableau 1: Comparaison de l'estimation du critère de stabilité avec la valeur de référence**

# 4 Synthèse des résultats

On retrouve les résultats de référence et cela permet la validation des développements de l'algorithme d'optimisation sous contraintes d'inégalités disponible avec l'option DDL_STAB de CRIT_STAB.