

SSNL112 - Barre soumise a un chargement thermique cyclique

Résumé :

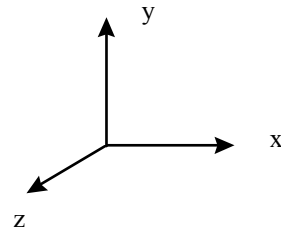
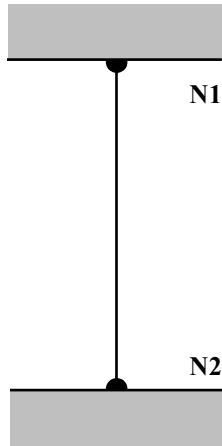
Ce cas test entre dans le cadre de la validation des relations de comportement en élastoplasticité des éléments barre pour la mécanique quasi-statique des structures.

Une barre encastree a ces deux extrémités subit un chargement thermique cyclique induisant des efforts de traction-compression.

Chaque modélisation permet de valider une des relations de comportement non-linéaire introduite : Écrouissage isotrope linéaire avec critère de Von-Misès (modélisation A), écrouissage cinématique linéaire avec critère de Von-Misès (modélisation B), ainsi qu'un modèle dit de Pinto-Menegotto, représentant le comportement cyclique des armatures en acier dans le béton armé (modélisations C et D).

1 Problème de référence

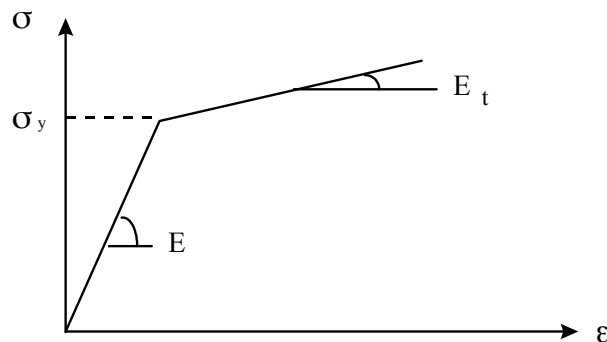
1.1 Géométrie



Longueur de la barre : 1 m
Section de la barre : 5 cm^2

1.2 Propriétés des matériaux

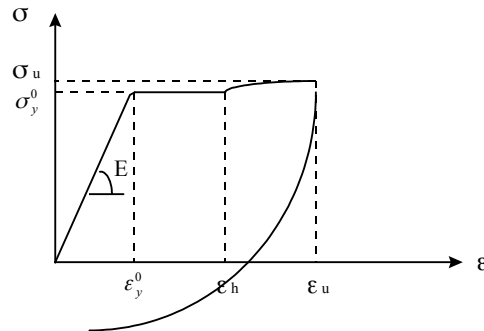
1.2.1 Écrouissages isotrope et cinématique linéaires



Module d'Young : $E = 2 \cdot 10^{11}\text{ Pa}$
Pente d'écrouissage : $E_t = 2 \cdot 10^9\text{ Pa}$
Limite d'élasticité : $\sigma = 2 \cdot 10^8\text{ Pa}$
Coefficient de Poisson : $\nu = 0,3$
Coefficient de dilatation thermique : $\alpha = 1 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$

Ce test permet de valider le fonctionnement de MFront (comportement plasticité) pour les barres (méthodes de Deborst).

1.2.2 Modèle de Pinto-Menegotto



Module d'Young :	E	=	$2 \cdot 10^{11} Pa$
Limite d'élasticité :	σ_y^0	=	$2 \cdot 10^8 Pa$
Coefficient de Poisson :	ν	=	0,3
Coefficient de dilatation thermique :	α	=	$1 \cdot 10^{-5} K^{-1}$
Déformation d'écroutissage :	ϵ_h	=	$2 \cdot 3 \cdot 10^{-3}$
Contrainte ultime :	σ_u	=	$2 \cdot 58 \cdot 10^8 Pa$
Déformation ultime :	ϵ_u	=	$3 \cdot 10^{-2}$
Coefficient définissant la courbe ζ :	R_0	=	20
Coefficient définissant la courbe ζ :	A_1	=	18.5
Coefficient définissant la courbe ζ :	A_2	=	0.15
Coefficient de flambage :	C	=	0.5
Coefficient de flambage :	A	=	0.008

1.3 Conditions aux limites et chargement

Conditions aux limites :

La barre est encastée. Les déplacements sont donc bloqués dans les trois directions.

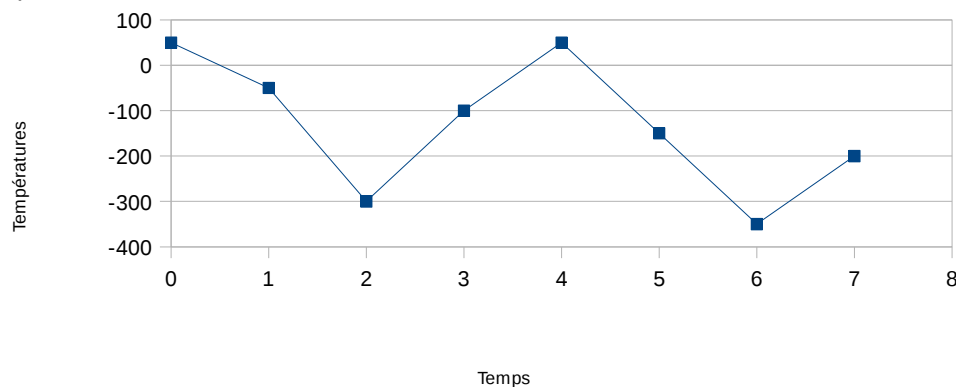
En $N1$ et $N2$: $DX = DY = DZ = 0$

Chargement :

Le trajet de chargement est décrit par l'évolution de la température, uniforme dans la barre :

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$T(^{\circ}C)$	50	-50	-300	-100	50	-150	-350	-200

La température de référence est $0^{\circ}C$.



2 Solutions de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour les solutions de référence

2.1.1 Écrouissages linéaires

Écrouissage isotrope

Pour une traction uniaxiale, le critère de plasticité s'écrit :

$$|\sigma_L| - R(p) \leq 0$$

où p est la déformation plastique cumulée

$$R(p) = R' p + \sigma^y \text{ et } R' = \frac{E E_1}{E - E_1}$$

Le critère s'écrit alors :

$$|\sigma_L| - R' p - \sigma^y \leq 0$$

Le tenseur des contraintes s'obtient par :

$$\sigma = A \cdot (\varepsilon(u) - \varepsilon^p) - 3K \alpha (T - T^{ref}) Id$$

On en déduit donc l'expression de σ_L

$$\sigma_L = E(\varepsilon - \alpha T) - E \varepsilon^p \quad (T^{ref} = 0)$$

Dans notre cas, $\varepsilon = 0$ donc :

$$\sigma_L = E \varepsilon_L - E \varepsilon^p \quad \text{avec } \varepsilon_L = -\alpha T$$

Donc :

- Si $|\sigma_L| - R(p) < 0$:

$$p=0 \text{ et } \sigma_L = E \varepsilon_L$$

- Si $|\sigma_L| - R(p) = 0$:

$$p = \left(\frac{|\sigma_L| - \sigma^y}{R'} \right)$$

$$\sigma_L = E \varepsilon_L - E \varepsilon^p$$

Application au trajet de chargement

Instant 1 :

$$\sigma = E \varepsilon = 200 \text{ MPa et } R(p) = R' p + \sigma^y = 100 \text{ MPa car } p=0.$$

On a bien $\sigma_L - R(p) \leq 0$.

Le critère n'est pas franchi, l'évolution est élastique : $\sigma_L = 100 \text{ MPa}$ et $N = 100 \text{ kN}$

Instant 2 :

Le critère est atteint :

$$\sigma_L = \frac{E}{E + R'} (R' \varepsilon_L + \sigma^y) = \frac{2 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 10^{11} + 2.02 \cdot 10^9} (2.02 \cdot 10^9 \times 3.5 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^8) = 205 \text{ MPa}$$

$$N = 102.5 \text{ kN}$$

$$\text{et } p = 2.475 \cdot 10^{-3}$$

Instant 3 :

On décharge élastiquement :

$$\sigma_L = E \varepsilon_L - E \varepsilon^p = 2 \cdot 10^{11} (1.5 \cdot 10^{-3} - 2.475 \cdot 10^{-3}) = -195 \text{ MPa}$$

$$N = -97.5 \text{ kN}$$

Instant 4 :

On plastifie à nouveau :

Le critère s'écrit : $|\sigma| - R' p - \sigma^y = 0$ avec $p = p_1 + p_2$ où $p_1 = 2.475 \cdot 10^{-3}$

On obtient donc :

$$p_2 = \frac{|\sigma| - \sigma^y}{R'} - p_1$$

$$\sigma = -E \varepsilon^p = -E (p_1 - p_2)$$

$$\sigma = \left(\frac{R'}{R' + E} \right) \left(-2 E p_1 - \frac{E \sigma^y}{R'} \right) = -207.9 \text{ MPa}$$

Et donc $N = -103.95 \text{ kN}$ **Instant 5 :**

On décharge élastiquement :

$$\sigma_L = E \varepsilon_L - E \varepsilon^p = 2 \cdot 10^{11} (2 \cdot 10^{-3} - 1.0395 \cdot 10^{-3}) = 192.1 \text{ MPa}$$

$$N = 96.05 \text{ kN}$$

Instants 6 et 7 :

Le raisonnement est identique

On trouve :

$$N_{(inst.6)} = 105.87 \text{ kN}$$

$$N_{(inst.7)} = -44.13 \text{ kN}$$

Écrouissage cinématique

La méthode de calcul est identique, mais dans ce cas, le critère de plasticité s'écrit :

$$\sigma - X_{eq} - \sigma^y \leq 0 \text{ avec } X_{eq} = C (\varepsilon^p)_{eq} = \frac{3}{2} C \varepsilon^p = \frac{E E_t}{E - E_t} \varepsilon^p$$

Avec les notations précédentes, le critère s'écrit :

$$|\sigma_L - R' \varepsilon^p| - \sigma^y \leq 0 \text{ d'où } \sigma_L = R' \varepsilon^p \pm \sigma^y \text{ (suivant le sens de l'écoulement).}$$

Application au trajet de chargement**Instant 1 :**Le critère n'est pas franchi, l'évolution est élastique : $\sigma_L = 100 \text{ MPa}$ et $N = 100 \text{ kN}$ **Instant 2 :**Le critère est atteint : $|\sigma_L - R' \varepsilon^p| - \sigma^y = 0$

$$\sigma_L = R' \varepsilon^p + \sigma^y = 2.02 \cdot 10^9 \times 2.475 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^8 = 205 \text{ MPa}$$

Instant 3 :

On décharge élastiquement :

$$\sigma_L = E \varepsilon_L - E \varepsilon^p = 2 \cdot 10^{11} (1.5 \cdot 10^{-3} - 2.475 \cdot 10^{-3}) = -195 \text{ MPa}$$

$$N = -97.5 \text{ kN}$$

Instant 4 :

$$\begin{aligned} |\sigma - R' \varepsilon^p| - \sigma^y &= 0 && \text{avec } p_1 = 2.475 \cdot 10^{-3} \\ \varepsilon^p &= p_1 - p_2 \\ p_2 &= p_1 - \frac{|\sigma + \sigma^y|}{R'} \\ \sigma &= -E \varepsilon^p = -E(p_1 - p_2) \\ \sigma &= -E \left(\frac{|\sigma + \sigma^y|}{R'} \right) = -198 \text{ MPa} \\ N &= -99 \text{ kN} \end{aligned}$$

Instant 5 :

On décharge élastiquement :

$$\begin{aligned} \sigma_L &= E \varepsilon_L - E \varepsilon^p = 2 \cdot 10^{11} (2 \cdot 10^{-3} - 9.9 \cdot 10^{-4}) = 202 \text{ MPa} \\ N &= 101 \text{ kN} \end{aligned}$$

Instants 6 et 7 :

Le raisonnement est identique. On trouve :

$$\begin{aligned} N_{(inst.6)} &= 103 \text{ kN} \\ N_{(inst.7)} &= -47 \text{ kN} \end{aligned}$$

2.1.2 Modèle de Pinto-Menegotto

Ce modèle est décrit dans le Manuel de Référence de *Code_Aster* [R5.03.09] [bib1]. La loi constitutive des aciers est composée de deux parties distinctes : le chargement monotone composé de trois zones successives (élasticité linéaire, palier plastique et écrouissage) et le chargement cyclique où le trajet entre deux points d'inversion (demi-cycle) est décrit par une courbe d'expression analytique du type $\sigma = f(\varepsilon)$.

Comme précédemment les déformations imposées sont des déformations thermiques : $\varepsilon = -\alpha T$

2.1.2.1 Cas sans flambage Premier chargement

- Élasticité linéaire : $\sigma = E \varepsilon$

Instant 1 :

$$N = E \varepsilon S = 2 \cdot 10^{11} \times 1 \cdot 10^{-3} \times 5 \cdot 10^{-4} = 100 \text{ kN}$$

- Palier plastique : $\sigma = \sigma^y$
- Polynôme de degré 4 : $\sigma = \sigma_u - (\sigma_{su} - \sigma_y^0) \left(\frac{\varepsilon_u - \varepsilon}{\varepsilon_u - \varepsilon_h} \right)^4$

Instant 2 :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 3.5 \cdot 10^{-3} > \varepsilon_h = 2.3 \cdot 10^{-3}, \text{ on utilise le polynôme de degré 4 :} \\ \sigma &= 209.416 \text{ MPa et } N = 104.708 \text{ kN} \end{aligned}$$

Cycles

Demi-cycle 1 :

On détermine ζ_p^0 :

$$\zeta_p^0 = \varepsilon_r^0 - \varepsilon_y^0 = 3.5 \cdot 10^{-3} - 1.10^{-3} = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ car } \varepsilon_r^0 = \varepsilon_{(inst.2)}$$

Puis $\Delta \sigma^0$:

$$\Delta \sigma^0 = E_h \zeta_p^0 = 2 \cdot 10^9 \times 2.5 \cdot 10^{-3} = 5 \text{ MPa}$$

D'où $\sigma_y^1 = \sigma_y^0 \cdot \text{sign}(-\zeta_p^0) + \Delta \sigma^0 = -200 + 5 = -195 \text{ MPa}$

On calcule ensuite ε_y^1 :

$$\varepsilon_y^1 = \varepsilon_r^0 + \frac{\sigma_y^1 - \sigma_r^0}{E} = 3.5 \cdot 10^{-3} + \frac{(-195 - 209.416) 10^6}{2.0 \cdot 10^{11}} = 1.477 \cdot 10^{-3}$$

On détermine ainsi $\sigma^* = f(\varepsilon^*)$, définie par :

$$\sigma^* = b \varepsilon^* + \left(\frac{1-b}{(1+(\varepsilon^*)^R)^{(1/R)}} \right) \varepsilon^* , \text{ avec } b = \frac{E_h}{E}$$

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon - \varepsilon_r^0}{\varepsilon_y^1 - \varepsilon_r^0}$$

$$\sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_r^0}{\sigma_y^1 - \sigma_r^0}$$

$$\xi_p^0 = \frac{\zeta_p^0}{|\varepsilon_y^1 - \varepsilon_r^0|} \text{ et } R^I = R_0 - \frac{A_1 \cdot \xi_p^0}{A_2 + \xi_p^0}$$

On obtient $\xi_p^0 = -1.23$ et $R^I = 3.51$

On peut alors calculer la valeur de σ aux instants 3 et 4 :

Instant 3 :

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon_{(inst.3)} - \varepsilon_r^0}{\varepsilon_y^1 - \varepsilon_r^0} = \frac{1.5 \cdot 10^{-3} - 3.5 \cdot 10^{-3}}{1.477 \cdot 10^{-3} - 3.5 \cdot 10^{-3}} = 0.988$$

$$\sigma^* = b \varepsilon^* + \left(\frac{1-b}{(1+(\varepsilon^*)^R)^{(1/R)}} \right) \varepsilon^* = 0.01 \times 0.988 + \left(\frac{1-0.01}{(1+(0.988)^{3.51})^{(1/3.51)}} \right) = 0.82$$

et $\sigma = \sigma^* (\sigma_y^1 - \sigma_r^0) + \sigma_r^0 = 0.82 \times (-195 - 209.416) + 209.416 = -122 \text{ MPa}$

d'où $N = -61 \text{ kN}$

Instant 4 :

On utilise la même méthode, avec $\varepsilon = 0$.

$$\varepsilon^* = 1.73$$

$$\sigma^* = 0.56$$

$$\sigma = -20 \text{ MPa}$$

$$N = -10 \text{ kN}$$

Demi-cycle 2 : Instant 5 et 6 :

La méthode de calcul est identique, on détermine :

$$\zeta_p^1, \sigma_y^2, \varepsilon_y^2, \xi_p^1, R^2, \text{ puis } \sigma_{(inst.5)}^* = f(\varepsilon_{(inst.5)}^*) \text{ et } \sigma_{(inst.6)}^* = f(\varepsilon_{(inst.6)}^*)$$

et finalement $\sigma_{(inst.5)}$ et $\sigma_{(inst.6)}$.

Demi-cycle 3 : Instant 7 : Idem

2.1.2.2 Cas avec flambage

Premier chargement

Identique au cas précédent.

Cycles

Demi-cycle 1 (compression) :

La méthode de calcul est identique, mais la valeur de la pente de l'asymptote est modifiée :

On calcule un nouveau coefficient b_c :

$$b_c = a(5.0 - L/D) e \left(b \xi' \frac{E}{\sigma_y - \sigma^\infty} \right) = 0.006 \times (5.0 - 5.9) e^{(0.01 \times 1.477 \cdot 10^{-3} \frac{2 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 10^8 - 1.36 \cdot 10^8})} = -0.0057$$

Il faut ensuite, comme dans le modèle sans flambage, déterminer σ_y^n . La raisonnement est identique, mais on ajoute une contrainte complémentaire σ_s^* afin de positionner correctement la courbe par rapport à l'asymptote.

$$\sigma_s^* = \gamma_s b E \frac{b - b_c}{1 - b_c} = 0.028 \times 0.01 \times 2 \cdot 10^{11} \times \frac{0.01 + 0.0057}{1 + 0.0057} = 0.87 \text{ MPa}$$

$$\text{où } \gamma_s \text{ est donné par : } \gamma_s = \frac{11.0 - L/D}{10(e^{c(L/D)} - 1.0)} = 0.028$$

Demi-cycle 2 (traction) :

- En traction, on adopte un module d'Young réduit :

$$E_r = E \left(a_5 + (1.0 - a_5) e^{-a_6 \xi^{n_2}} \right) = 2 \cdot 10^{11} \times (0.88 + (1 - 0.88) e^{(-620 \times 1.473 \cdot 10^{-6})}) = 1.99 \cdot 10^{11} \text{ MPa}$$

avec $a_5 = 1.0 + (5.0 - L/D)/7.5 = 0.88$

Le reste de la méthode est identique.

2.2 Résultats de référence

Effort normal N constant sur la barre

2.3 Incertitude sur la solution

Aucune, la solution est analytique

2.4 Références bibliographiques

- [1] Manuel de référence du Code_Aster [R5.03.09].
- [2] S. ANDRIEUX : TD 1 Trois barres thermoélastoplastiques Von Mises parfait. In « Initiation à la thermoplasticité dans le Code_Aster », HI-74/96/013 novembre 1996 (manuel de référence du cours).

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé d'un élément de barre (BARRE).

Loi de comportement : élastoplasticité avec écrouissage isotrope linéaire - Critère de Von Mises

3.2 Caractéristiques du maillage

2 nœuds.

1 maille SEG2

3.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Référence	Écart (%)
effort normal N	1	1.0000E+05	0
effort normal N	2	1.0250E+05	0
effort normal N	3	-9.7500E+04	0
effort normal N	4	-1.0395E+05	0
effort normal N	5	9.6050E+04	0
effort normal N	6	1.0587E+05	0
effort normal N	7	-4.4129E+04	0

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé d'un élément de barre (BARRE).

Loi de comportement : élastoplasticité avec écrouissage cinématique linéaire - Critère de Von Mises

4.2 Caractéristiques du maillage

2 nœuds.

1 maille SEG2

4.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Référence	Écart (%)
effort normal N	1	1.0000E+05	0
effort normal N	2	1.0250E+05	0
effort normal N	3	-9.7500E+04	0
effort normal N	4	-9.9000E+04	0
effort normal N	5	1.0100E+05	0
effort normal N	6	1.0300E+05	0
effort normal N	7	-4.7000E+04	0

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé d'un élément de barre (BARRE).

Loi de comportement : modèle de Pinto-Menegotto sans flambage (valeur de ELAN inférieure à 5).

5.2 Caractéristiques du maillage

2 nœuds.

1 maille SEG2

5.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Référence	Écart (%)
effort normal N	1	1.0000E+05	0
effort normal N	2	1.0470E+05	0
effort normal N	3	-6.0777E+04	0
effort normal N	4	-9.1430E+04	0
effort normal N	5	7.6082E+04	0
effort normal N	6	1.0125E+05	0
effort normal N	7	-3.7965E+04	0

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé d'1 élément de barre (`BARRE`).

Loi de comportement : modèle de Pinto-Menegotto avec flambage (valeur de `ELAN` supérieure à 5).

6.2 Caractéristiques du maillage

2 nœuds.

1 maille `SEG2`

6.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Référence	Écart (%)
effort normal N	1	1.0000E+05	0
effort normal N	2	1.0470E+05	0
effort normal N	3	-6.0556E+04	0
effort normal N	4	-8.9078E+05	0
effort normal N	5	7.6905E+05	0
effort normal N	6	1.0125E+05	0
effort normal N	7	-3.8119E+04	0

7 Synthèse des résultats

Les résultats calculés par Code_Aster sont en excellent accord avec les solutions analytiques.