

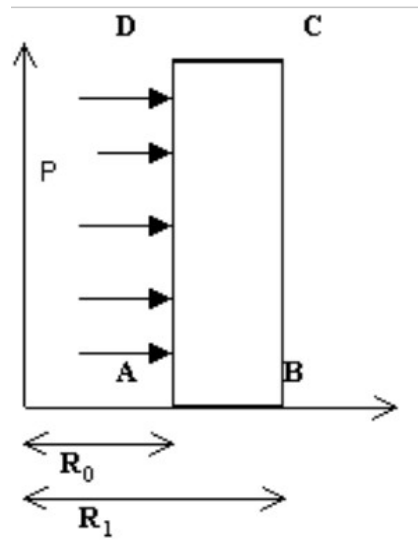
SSNA104 - Cylindre creux soumis à une pression, viscoélasticité linéaire

Résumé :

Ce cas-test permet de valider les lois de `LEMAITRE` et `LEMA_SEUIL` implantée dans *Code_Aster* dans le cas de comportement viscoélastique linéaire. Les résultats trouvés sont comparés à une solution analytique.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Dimensions du cylindre :

$$R_0 = 1 \text{ m}$$

$$R_1 = 2 \text{ m}$$

Figure 1.1-a : Coupe du cylindre creux et chargement

1.2 Propriétés des matériaux

Module d'Young : $E = 1 \text{ MPa}$

Coefficient de Poisson : $\nu = 0.3$

Loi de LEMAITRE :

$$g(\sigma, \lambda, T) = \left(\frac{1}{K} \frac{\sigma}{\lambda^m} \right)^n \text{ avec } \frac{1}{K} = 1, \frac{1}{m} = 0, n = 1$$

Loi LEMA_SEUIL :

$$g(\sigma, \lambda, T) = A \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma \right) \Phi \text{ avec } A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \Phi = 1 \text{ sur tout le maillage}$$

$$S = 10^{-10}$$

étant donné la valeur des différents paramètres matériaux, les deux lois sont absolument identiques et peuvent donc être comparés à la même solution analytique.

1.3 Conditions aux limites et chargement

Conditions aux limites :

Le cylindre est bloqué en DY sur les côtés $[AB]$ et $[CD]$.

Chargement :

Le cylindre est soumis à une pression interne sur $[DA]$ $P0 = 1.E-3 \text{ MPa}$

2 Solutions de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour les solutions de référence

L'ensemble de cette démonstration peut être lue avec plus de détails dans le document [bib1].

Dans le cas d'un matériau isotrope viscoélastique linéaire, on peut décrire le comportement au cours du temps à l'aide de deux fonctions $I(t)$ et $K(t)$ de telle sorte que les déformations et les contraintes peuvent s'écrire :

$$\varepsilon(t) = (I + K) * \frac{d\sigma(t)}{d\tau} - K * \frac{d(\text{Tr}(\sigma(t)))}{d\tau} I_3$$

où I_3 désigne la matrice identité de rang 3

et $*$ le produit de convolution : $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$

On trouve $I(t) = \frac{1}{E} + kt$, $K(t) = \frac{\nu}{E} + \frac{1}{2}kt$

On impose la pression P_0 à l'instant $t=0$, la pression interne vaut $p(t) = H(t) P_0$ où
 $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t-\tau < 0 \\ 1 & \text{si } t-\tau \geq 0 \end{cases}$ avec dans ce cas $\tau=0$

On utilise la transformée de Laplace Carson $f^+(n) = L(f(t)) = n \int_0^\infty f(t) e^{-nt} dt$

D'où $p^+ = P_0$

La solution du problème élastique équivalent est :

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} \gamma \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^+ \end{pmatrix} \quad \text{où } \gamma = \frac{P_0 r_0^2}{r_1^2 - r_0^2}$$

On détermine σ_z^+ par la condition sur ε_z^+ donnée par les conditions aux limites :

$$\varepsilon_z^+ = 0 = (I^+ + K^+) \sigma_z^+ - K^+ (2\gamma + \sigma_z^+) = I^+ \sigma_z^+ - 2K^+ \gamma$$

$$\text{D'où } \sigma_z^+ = \gamma \left(1 + \frac{(2\nu - 1)p}{p + Ek} \right).$$

On trouve par la transformée de Laplace inverse $\sigma_z(t) = \gamma(1 - (1 - 2\nu)e^{-Eht})$, de même en appliquant la transformée de Laplace inverse sur σ_r et σ_θ , on trouve

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} \gamma \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(1 - (1 - 2\nu)e^{-Eht}) \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\dot{\varepsilon}_V = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}k\gamma \left(\frac{1-2\nu}{3}e^{-Ekt} - \frac{r_1^2}{r^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}k\gamma \left(\frac{1-2\nu}{3}e^{-Ekt} - \frac{r_1^2}{r^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -k\gamma((1-2\nu)e^{-Eht}) \end{pmatrix}$$

et en intégrant avec $\varepsilon_V(0) = 0$;

$$\varepsilon_V = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\gamma \left(\frac{1-2\nu}{3}e^{-Ekt} - k\frac{r_1^2}{r^2}t\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}\gamma \left(\frac{1-2\nu}{3}e^{-Ekt} - k\frac{r_1^2}{r^2}t\right) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \frac{(1-2\nu)}{E}(1 - e^{-Eht}) \end{pmatrix}.$$

On en déduit le déplacement radial

$$w(r, t) = r\gamma \left[\frac{1}{E} \left[(1+\nu)\frac{r_1^2}{r^2} + \frac{1-2\nu}{2}(3 - (1-2\nu)e^{-Ekt}) \right] + \frac{3}{2}k\frac{r_1^2}{r^2}t \right]$$

2.2 Résultats de référence

Déplacement DX sur le nœud B et les contraintes $SIXX$, $SIYY$ et $SIZZ$ en B

2.3 Incertitude sur la solution

0% : solution analytique

2.4 Références bibliographiques

Ph. De BONNIÈRES : Deux solutions analytiques de problèmes axisymétriques en viscoélasticité linéaire et avec contact unilatéral, Note HI-71/8301

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le problème est modélisé en axisymétrie.

3.2 Caractéristiques du maillage

1000 mailles QUAD4

3.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Référence
$DX(B)$	0.9	2.14498 E-3
$SIXX(B)$	0.9	0.0
$SIYY(B)$	0.9	2.7912 E-4
$SIZZ(B)$	0.9	6.66 E-4

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Le problème est modélisé en axisymétrie

4.2 Caractéristiques du maillage

1000 mailles QUAD4

4.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Référence
$DX(B)$	0.9	2.14498 E-3
$SIXX(B)$	0.9	0.0
$SIYY(B)$	0.9	2.7912 E-4
$SIZZ(B)$	0.9	6.66 E-4

5 Synthèse des résultats

Les résultats calculés par *Code_Aster* sont en accord avec les solutions analytiques mais dépendent très fortement du raffinement du maillage.