

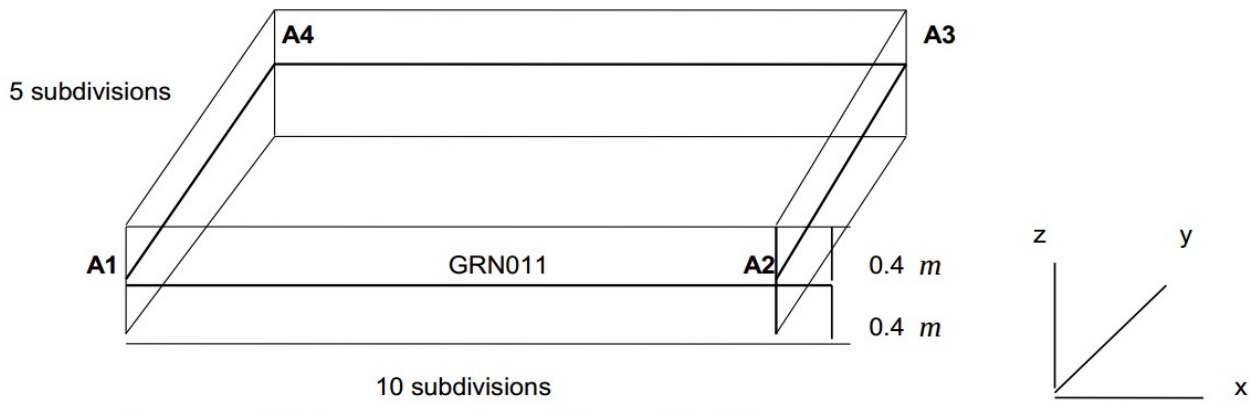
SSLS141 – Plaque en Flexion et cisaillement

Résumé :

L'objectif de ce test est de valider la réponse en cisaillement des éléments coques DST (QUAD4) et Q4G (QUAD4).

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Les coordonnées des points sont données en mètres (m):

$$\begin{array}{ll} A1(0,0,0) & A3(10,5) \\ A2(10,0,0) & A4(0,5) \end{array}$$

Tableau 1.1-1

L'épaisseur de la plaque est $e=0,8\text{ m}$

1.2 Propriétés du matériau

Le matériau a un comportement élastique isotrope :

Module d'Young : $E=200000\text{ MPa}$

Coefficient de Poisson : $\nu=0$

1.3 Conditions aux limites et chargements

L'arête $A1A4$ est encastree.

On applique une force nodale $F_z=-1000\text{ N}$ sur l'arête $A2A3$.

1.4 Modélisations

Les différentes modélisations sont :

Modélisation	Type d'élément	Mailles	Nombre d'éléments du maillage
A	DST	QUAD4	50

B	DST (multi-couches, <i>ncou</i> = 2)	QUAD4	50
C	Q4G	QUAD4	800
D	Q4G (multi-couches, <i>ncou</i> = 2)	QUAD4	800
E	DST	TRIA3 (maillage régulier)	1600
F	DST	TRIA3 (maillage irrégulier)	1600

Tableau 1.4-1

2 Solution de référence

2.1 Grandeurs et résultats de référence

2.1.1 Modèle analytique de la plaque

On considère que la réponse de la plaque correspond à la réponse d'une poutre en console (car $v=0$). Dans ce cas, le déplacement de la plaque est donné par les déplacements de chaque section de plaque, suivant la direction $x(u)$, $z(w)$ et leur rotation par rapport à l'axe $y(\theta_y)$.

$$U_x(x, z) = u(x) + z \theta_y(x) \quad U_z(x, z) = w(x)$$

En tout point, les déformations sont:

$$\varepsilon_{xx}(x, z) = u' + z \theta_y' \quad \text{et} \quad 2\varepsilon_{xz}(x, z) = \theta_y + w' = \gamma_z$$

La poutre est encastree en $x=0$ et soumise à une force verticale F en $x=L$.

La résolution (principe des travaux virtuels et l'équilibre des forces) donne l'expression des efforts généralisés dans le cas d'une réponse linéaire élastique:

N est la force axiale, M_y le moment suivant l'axe y et T l'effort tranchant.

$$\begin{aligned} N(x) &= E A u'(x) & \text{et} & & N(x) &= 0 \\ M_y(x) &= E I \theta_y'(x) & & & M_y(x) &= -F(L-x) \\ T(x) &= G k A \gamma_z & & & T(x) &= F \end{aligned}$$

où le paramètre k est le facteur de correction en cisaillement

avec les conditions aux limites, on en déduit les déplacements u, w et θ_y :

$$u(x) = 0, \quad w(x) = \frac{F}{6EI} x^2 (3L - x) + \frac{F x}{G k A}, \quad \theta_y(x) = \frac{F}{EI} \frac{x(x-2L)}{2}$$

Les déformations et contraintes sont:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= z \frac{-F}{EI} (L-x) & \text{et} & & \sigma_{xx} &= z \frac{-F}{I} (L-x) \\ 2\varepsilon_{xz} &= \frac{F}{G k A} = \gamma_z & \text{et} & & \sigma_{xz} &= \frac{-F}{A} 6(z^2/h^2 - 1/4) \end{aligned}$$

où h est la hauteur de la plaque. La distribution des contraintes en cisaillement est parabolique dans l'épaisseur de la plaque pour respecter les conditions de surface libre ($\sigma_{xz}(z=h/2) = \sigma_{xz}(z=-h/2) = 0$).

La réponse verticale en déplacement du point $x=L$ est:

$$U_z(L) = \frac{F}{3EI} L^3 + \frac{F L}{G k A}$$

2.2 Incertitudes sur la solution

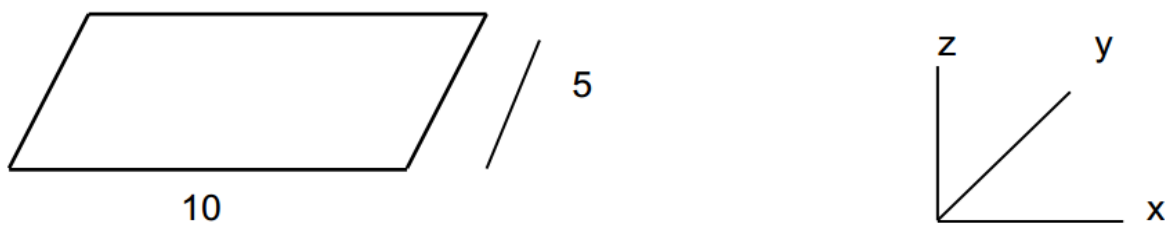
La solution de référence est analytique. Il n'y a donc pas d'incertitude.

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est constitué de 1 plaque avec une couche.
Les éléments utilisés sont des éléments de plaque `DST`.

3.2 Caractéristiques du maillage



Le maillage est régulier. On a 10 subdivisions selon x et 5 subdivisions selon y ; soit au total 50 mailles `DSQ` (`QUAD4`) et 66 nœuds.

3.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
DZ (<i>A3</i>)	'ANALYTIQUE'	-3.92125E-05	0.001
MXX(<i>A1</i>)	'ANALYTIQUE'	10000	0.001
QX(<i>A1</i>)	'ANALYTIQUE'	-1000	0.001
SIXX(<i>M1</i> , <i>PT1</i> , <i>SSPT2</i>)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX(<i>M1</i> , <i>PT1</i> , <i>SSPT3</i>)	'ANALYTIQUE'	1981.17	0.001
SIXZ(<i>M1</i> , <i>PT1</i> , <i>SSPT2</i>)	'ANALYTIQUE'	-1875.0	0.001
SIXZ(<i>M1</i> , <i>PT1</i> , <i>SSPT3</i>)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX(<i>M50</i> , <i>PT2</i> , <i>SSPT2</i>)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX(<i>M50</i> , <i>PT2</i> , <i>SSPT3</i>)	'ANALYTIQUE'	91768.83	0.001
SIXZ(<i>M50</i> , <i>PT2</i> , <i>SSPT2</i>)	'ANALYTIQUE'	-1875.0	0.001
SIXZ(<i>M50</i> , <i>PT2</i> , <i>SSPT3</i>)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
EPXX(<i>M50</i> , <i>PT2</i> , <i>SSPT2</i>)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
EPXX(<i>M50</i> , <i>PT2</i> , <i>SSPT3</i>)	'ANALYTIQUE'	4.58844E-07	0.001
EPXZ(<i>M50</i> , <i>PT2</i> , <i>SSPT2</i>)	'ANALYTIQUE'	-7.5E-09	0.001
EPXZ(<i>M50</i> , <i>PT2</i> , <i>SSPT3</i>)	'ANALYTIQUE'	-7.5E-09	0.001

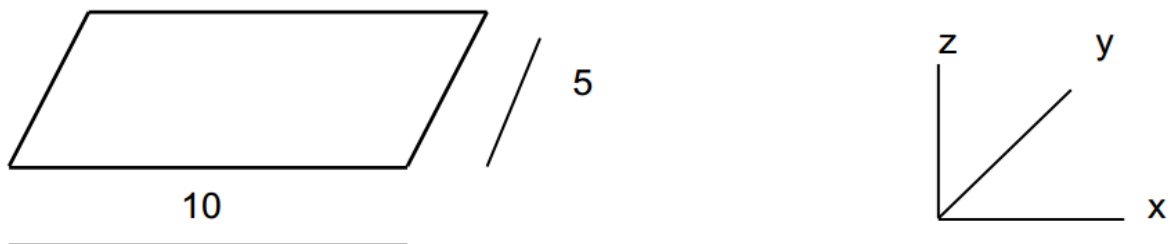
Tableau 3.3-1

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est constitué de 1 plaque avec 2 couches.
Les éléments utilisés sont des éléments de plaque `DST`.

4.2 Caractéristiques du maillage



Le maillage est régulier. On a 10 subdivisions selon x et 5 subdivisions selon y ; soit au total 50 mailles `DST` (`QUAD4`) et 66 nœuds.

4.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
DZ (<i>A3</i>)	'ANALYTIQUE'	-3.92125E-05	0.001
MXX(<i>A1</i>)	'ANALYTIQUE'	10000	0.001
QX(<i>A1</i>)	'ANALYTIQUE'	-1000	0.001
SIXX(<i>M1, PT1, SSPT3</i>)	'ANALYTIQUE'	0.	1.0E-8
SIXX(<i>M1, PT1, SSPT6</i>)	'ANALYTIQUE'	1981.17	0.001
SIXZ(<i>M1, PT1, SSPT3</i>)	'ANALYTIQUE'	-1875.0	0.001
SIXZ(<i>M1, PT1, SSPT6</i>)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX(<i>M50, PT2, SSPT3</i>)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX(<i>M50, PT2, SSPT6</i>)	'ANALYTIQUE'	91768.83	0.001
SIXZ(<i>M50, PT2, SSPT3</i>)	'ANALYTIQUE'	-1875.0	0.001
SIXZ(<i>M50, PT2, SSPT6</i>)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
EPXX(<i>M50, PT2, SSPT3</i>)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
EPXX(<i>M50, PT2, SSPT6</i>)	'ANALYTIQUE'	4.58844E-07	0.001
EPXZ(<i>M50, PT2, SSPT3</i>)	'ANALYTIQUE'	-7.5E-09	0.001
EPXZ(<i>M50, PT2, SSPT6</i>)	'ANALYTIQUE'	-7.5E-09	0.001

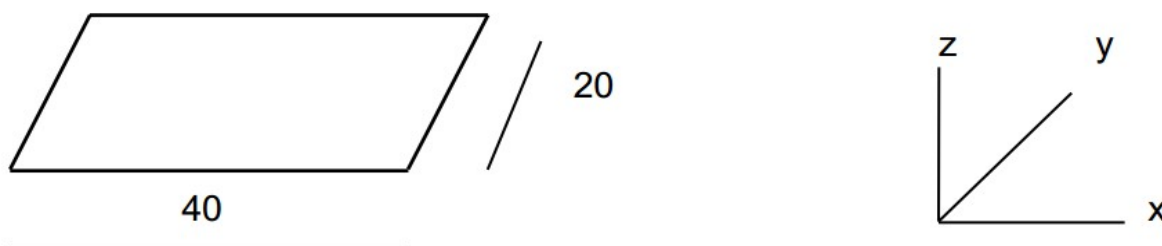
Tableau 4.3-1

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est constitué de 1 plaque avec une couche.
Les éléments utilisés sont des éléments de plaque Q4G.

5.2 Caractéristiques du maillage



Le maillage est régulier. On a 40 subdivisions selon x et 20 subdivisions selon y ; soit au total 800 mailles Q4G (QUAD4) et 861 nœuds.

5.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
DZ (A3)	'ANALYTIQUE '	-3.92125E-05	0.001
MXX(A1)	'ANALYTIQUE '	10000	0.02
QX(A1)	'ANALYTIQUE '	-1000	0.001
SIXX(M141 , PT1 , SSPT2)	'ANALYTIQUE '	0.0	1.0E-8
SIXX(M141 , PT1 , SSPT3)	'ANALYTIQUE '	2839.04	0.3
SIXZ(M141 , PT1 , SSPT2)	'ANALYTIQUE '	-1875.0	0.001
SIXZ(M141 , PT1 , SSPT3)	'ANALYTIQUE '	0.0	1.0E-8
SIXX(M901 , PT2 , SSPT2)	'ANALYTIQUE '	0.0	1.0E-8
SIXX(M901 , PT2 , SSPT3)	'ANALYTIQUE '	93254.70	0.01
SIXZ(M901 , PT2 , SSPT2)	'ANALYTIQUE '	-1875.0	0.001
SIXZ(M901 , PT2 , SSPT3)	'ANALYTIQUE '	0.0	1.0E-8
EPXX(M901 , PT2 , SSPT2)	'ANALYTIQUE '	0.0	1.0E-8
EPXX(M901 , PT2 , SSPT3)	'ANALYTIQUE '	4.66273E-07	0.01
EPXZ(M901 , PT2 , SSPT2)	'ANALYTIQUE '	-7.5E-09	0.001
EPXZ(M901 , PT2 , SSPT3)	'ANALYTIQUE '	-7.5E-09	0.001

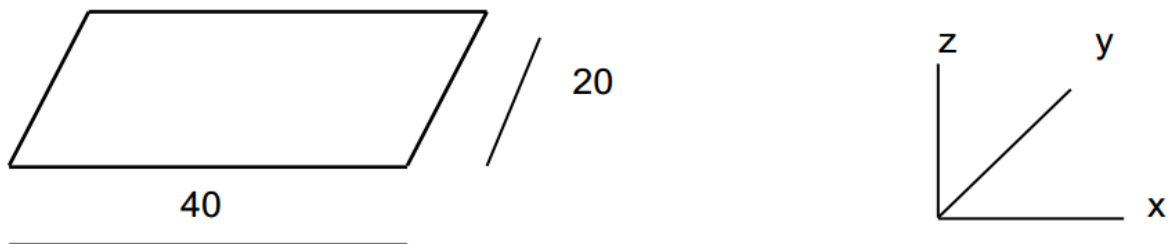
Tableau 5.3-1

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est constitué de 1 plaque avec 2 couches.
Les éléments utilisés sont des éléments de plaque Q4G.

6.2 Caractéristiques du maillage



Le maillage est régulier. On a 40 subdivisions selon x et 20 subdivisions selon y ; soit au total 800 mailles Q4G (QUAD4) et 861 nœuds.

6.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
DZ (A3)	'ANALYTIQUE'	-3.92125E-05	0.001
MXX(A1)	'ANALYTIQUE'	10000	0.02
QX(A1)	'ANALYTIQUE'	-1000	0.001
SIXX(M141, PT1, SSPT3)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX(M141, PT1, SSPT6)	'ANALYTIQUE'	2839.04	0.3
SIXZ(M141, PT1, SSPT3)	'ANALYTIQUE'	-1875.0	0.001
SIXZ(M141, PT1, SSPT6)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX(M901, PT2, SSPT3)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX(M901, PT2, SSPT6)	'ANALYTIQUE'	93254.70	0.01
SIXZ(M901, PT2, SSPT3)	'ANALYTIQUE'	-1875.0	0.001
SIXZ(M901, PT2, SSPT6)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
EPXX(M901, PT2, SSPT3)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
EPXX(M901, PT2, SSPT6)	'ANALYTIQUE'	4.66273E-07	0.01
EPXZ(M901, PT2, SSPT3)	'ANALYTIQUE'	-7.5E-09	0.001
EPXZ(M901, PT2, SSPT6)	'ANALYTIQUE'	-7.5E-09	0.001

Tableau 6.3-1

7 Modélisation E

7.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est constitué de 1 plaque avec 1 couche.
Les éléments utilisés sont des éléments de plaque DST.

7.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est régulier. On a 40 subdivisions selon x et 20 subdivisions selon y ; soit au total 1600 mailles DST (TRIA3) et 861 nœuds.

7.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
DZ (A3)	'ANALYTIQUE '	-3.92125E-05	0.13
DZ (A2)	'ANALYTIQUE '	-3.92125E-05	0.13
MXX(A4)	'ANALYTIQUE '	10000	0.33
MXX(A1)	'ANALYTIQUE '	10000	0.02

Tableau 7.3-1

8 Modélisation F

8.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est constitué de 1 plaque avec 1 couche.
Les éléments utilisés sont des éléments de plaque DST.

8.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est libre. On a 1600 mailles DST (TRIA3) et 853 nœuds.

8.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
DZ (A3)	'ANALYTIQUE '	-3.92125E-05	0.011
DZ (A2)	'ANALYTIQUE '	-3.92125E-05	0.009
MXX(A4)	'ANALYTIQUE '	10000	0.053
MXX(A1)	'ANALYTIQUE '	10000	0.022

Tableau 8.3-1

9 Synthèse des résultats

- Pour une plaque avec une ou plusieurs couches, les éléments `DST (QUAD4)` donnent de bonnes estimations des déplacements, forces généralisées, déformations et contraintes (Modélisation A et B).
- Pour un maillage plus fin, les éléments `Q4G (QUAD4)` conduisent à des erreurs un peu plus importantes, en particulier pour les contraintes axiales `SIXX` (Modélisation C et D).
- Les deux types d'éléments `DST (QUAD4)` et `Q4G (QUAD4)` donnent respectivement les mêmes résultats avec une (Modélisation A et C) ou deux couches (Modélisation B et D).
- Les éléments `DST (TRIA3)` donnent des résultats beaucoup moins bons (Modélisations E et F). En particulier on met en évidence des effets de maillage importants : les modélisations E et F ont le même nombre d'éléments mais le maillage E est réglé alors que le maillage F est libre. L'erreur sur la flèche est de 13 % pour E et 1 % pour F. On note des écarts analogues sur les moments. Il y a également une forte dissymétrie sur les moments entre les points *A1* et *A4* pour les 2 maillages. Ceci est dû au fait que les maillages ne sont pas symétriques par rapport au chargement. Sur un maillage symétrique le problème n'apparaît plus. Cet élément a donc un comportement en flexion très dépendant du maillage, ce qui mérite sans doute une étude plus approfondie.