

## SSLS133 - Plaque en flexion à épaisseur variable

---

### Résumé :

Ce test représente un calcul quasi-statique d'une plaque en flexion à épaisseur variable. Elle est encastrée à une extrémité, et soumise à une force verticale à l'autre extrémité. Ce test permet de tester les éléments de coque volumique SHB8 et SHB20 à gérer les variations d'épaisseurs. Quatre modélisations sont testées :

Les éléments finis SHB8 pour une variation linéaire de l'épaisseur de la plaque (modélisation A ).

Les éléments finis SHB20 pour une variation linéaire de l'épaisseur de la plaque (modélisation B ).

Les éléments finis SHB8 pour une variation quadratique de l'épaisseur de la plaque (modélisation C ).

Les éléments finis SHB20 pour une variation quadratique de l'épaisseur de la plaque (modélisation D ).

Les déplacements obtenus sont comparés à la solution analytique élastique d'une poutre en flexion. Ce test permet de montrer les capacités et les limites des éléments SHB8 et SHB20 à gérer les variations d'épaisseurs.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

#### 1.1.1 Plaque à épaisseur variant linéairement

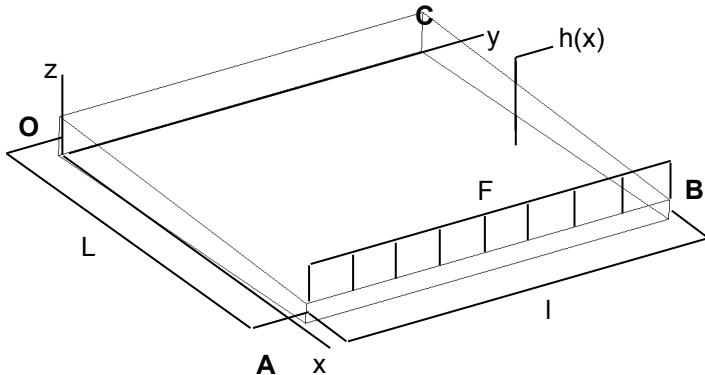


Figure 1.1.1-1 :

Longueur  $L = 100\text{ m}$ , largeur  $l = 100\text{ m}$ .

L'épaisseur  $h$  varie linéairement :

$$h(x) = ax + b$$

Nous posons  $h(x=0) = h_1 = 10\text{ m}$  et  $h(x=L) = h_2 = 5\text{ m}$  ce qui nous donne :

$$a = (h_2 - h_1)/L \text{ et } b = h_1$$

#### 1.1.2 Plaque à épaisseur variant quadratiquement

L'épaisseur  $h$  varie de manière quadratique :

$$h(x) = ax^2 + bx + c$$

Nous posons  $h(x=0) = h_1 = 10\text{ m}$ ,  $h(x=L) = h_2 = 5\text{ m}$  et  $h(x=L/2) = h_{12} = 6,25\text{ m}$  ce qui nous donne

$$a = (2(h_1 + h_2) - 4h_{12})/L^2, b = (4h_{12} - h_2 - 3h_1)/L \text{ et } c = h_1$$

## 1.2 Propriétés de matériaux

Module d'Young :  $E = 2.10^{11}\text{ Pa}$

Coefficient de Poisson :  $\nu = 0.0$

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

Conditions aux limites :

Encastrée sur le côté  $OC$  :  $u=v=w=0$  ,  $\theta_x=\theta_y=\theta_z=0$

Chargement :

A l'extrémité  $AB$  , une charge uniformément répartie de résultante :

Force parallèle à l'axe  $Z$  ;  $F_z=1N$

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Les résultats de référence sont obtenus par la théorie des poutres élastiques.

Dans le cas d'une variation linéaire de l'épaisseur, le déplacement vertical à l'extrémité  $AB$  est donné par [1] :

$$w(x) = -\frac{FL^2}{2EI_{y_i}c^3} \frac{\left(2Lcx + c^2x^2 - c^3x^2 + 2L(L+cx)\ln\left(\frac{L}{L+cx}\right)\right)}{(L+cx)}$$

Avec

$$c = \left(\frac{I_{y_2}}{I_{y_1}}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \quad \text{et} \quad I_{y_i} = \frac{bh_i^3}{12}$$

Dans le cas d'une variation quadratique de l'épaisseur, il est possible de trouver une formule exacte du déplacement. Cependant son expression générale est suffisamment complexe pour ne pas pouvoir être écrite ici. Nous avons formulé la fonction approximative du déplacement vertical selon  $x$  de notre cas :

$$w(x) = 3 \cdot 10^{-8} \frac{2x - 200}{x^2 - 200x + 20000} + 6 \cdot 10^{-10} \arctan(0.01x - 1) - 3 \cdot 10^{-12}x + 7.71238 \cdot 10^{-10}m$$

### 2.2 Grandeur et résultats de référence

Déplacement des points  $A$  et  $B$  suivant  $Z$ .

### 2.3 Références bibliographiques

- [1] [V3.01.400] SSLL400 – Poutre de section variable, soumise à des efforts ponctuels ou répartis.

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Élément SHB8 et épaisseur variant linéairement

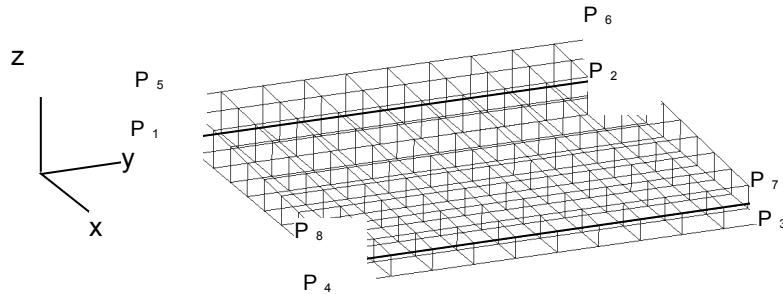


Figure 3.1-1 : Maillage de la modélisation A

Découpage : un maillage régulier est considéré dans cette modélisation.

Maillage régulier :

100 mailles SHB8 : 10 selon la largeur, 10 selon la longueur, 1 selon l'épaisseur

Conditions aux limites :

Tous les nœuds à l'intérieur du côté  $P_1P_2P_6P_5$  : déplacement bloqué suivant X

Tous les nœuds sur l'arête  $P_1P_5$  : déplacement bloqué suivant Y

Tous les nœuds sur l'arête  $P_2P_1$  : déplacement bloqué suivant Z

Chargement :

Force linéairement répartie sur l'arête  $P_8P_7$  :  $F = 1$

Nom des nœuds :

|             |      |             |      |
|-------------|------|-------------|------|
| Point $P_1$ | N022 | Point $P_5$ | N020 |
| Point $P_2$ | N002 | Point $P_6$ | N001 |
| Point $P_3$ | N102 | Point $P_7$ | N100 |
| Point $P_4$ | N172 | Point $P_8$ | N171 |

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 242

Nombre de mailles et types : 100 SHB8

### 3.3 Grandeur testées et résultats

Maillage régulier :

| Point            | Grandeur en unité   | Référence                | % différence |
|------------------|---------------------|--------------------------|--------------|
| P <sub>7</sub>   | déplacement W ( m ) | 3.2710 10 <sup>-10</sup> | +0.004       |
| P <sub>8</sub>   | déplacement W ( m ) | 3.2710 10 <sup>-10</sup> | +0.004       |
| POINT 1 MAILLE 1 | SIEF_ELGA           | 0.0543525374822          | 0,1 %        |
| POINT 2 MAILLE 1 | SIEF_ELGA           | 0.0322992227094          | 0,1 %        |
| POINT 3 MAILLE 1 | SIEF_ELGA           | 0,0                      | 1E-9 %       |
| POINT 4 MAILLE 1 | SIEF_ELGA           | -0.0322734188761         | 0,1 %        |
| POINT 5 MAILLE 1 | SIEF_ELGA           | -0.0542794829818         | 0,1 %        |
| N22 MAILLE 1     | SIGM_ELNO           | 0.0543350532544          | 0,1 %        |
| N20 MAILLE 1     | SIGM_ELNO           | 0.0322992227094          | 0,1 %        |

On teste également des champs analytiques de contraintes équivalentes de Von Mises.

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Élément SHB20 et épaisseur variant linéairement

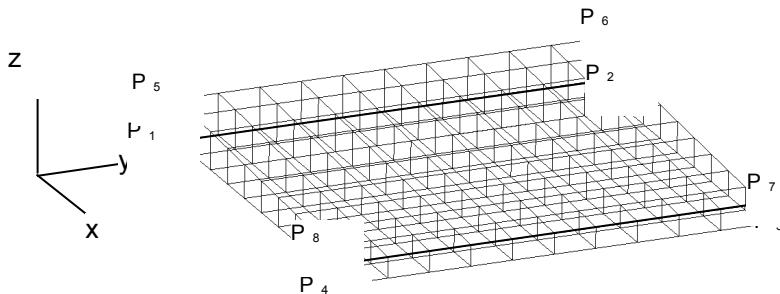


Figure 4.1-1 : Maillage de la modélisation B

Découpage : un maillage régulier est considéré dans cette modélisation.

Maillage régulier :

100 mailles SHB20 : 10 selon la largeur, 10 selon la longueur, 1 selon l'épaisseur

Conditions aux limites :

Tous les nœuds à l'intérieur du côté  $P_1 P_2 P_6 P_5$  : déplacement bloqué suivant x

Tous les nœuds sur l'arête  $P_1 P_5$  : déplacement bloqué suivant y

Tous les nœuds sur l'arête  $P_2 P_1$  : déplacement bloqué suivant z

Chargement :

Force linéairement répartie sur l'arête  $P_8 P_7$  :  $F=1$

Nom des nœuds :

|                      |      |                      |      |
|----------------------|------|----------------------|------|
| Point P <sub>1</sub> | N347 | Point P <sub>5</sub> | N340 |
| Point P <sub>2</sub> | N579 | Point P <sub>6</sub> | N572 |
| Point P <sub>3</sub> | N006 | Point P <sub>7</sub> | N002 |
| Point P <sub>4</sub> | N074 | Point P <sub>8</sub> | N067 |

## 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 803

Nombre de mailles et types : 100 SHB20

## 4.3 Grandeurs testées et résultats

Maillage régulier :

| Point          | Grandeur en unité   | Référence                | Aster                    | % différence |
|----------------|---------------------|--------------------------|--------------------------|--------------|
| P <sub>7</sub> | déplacement W ( m ) | 3.2710 10 <sup>-10</sup> | 3.2866 10 <sup>-10</sup> | +0.476       |
| P <sub>8</sub> | déplacement W ( m ) | 3.2710 10 <sup>-10</sup> | 3.2866 10 <sup>-10</sup> | +0.476       |

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Élément SHB8 et épaisseur variant quadratiquement

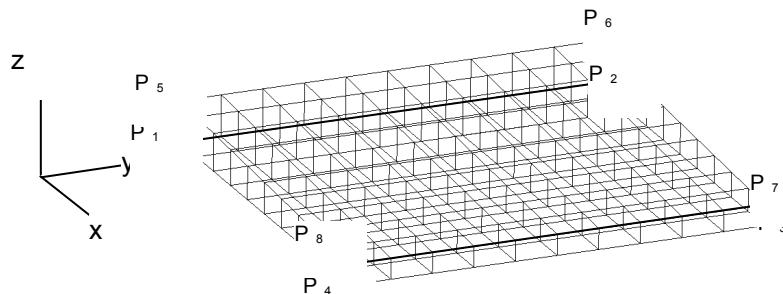


Figure 5.1-1 : Maillage de la modélisation C

Les caractéristiques sont les mêmes que pour la modélisation A

Nom des nœuds :

|                      |      |                      |      |
|----------------------|------|----------------------|------|
| Point P <sub>1</sub> | N005 | Point P <sub>5</sub> | N003 |
| Point P <sub>2</sub> | N006 | Point P <sub>6</sub> | N004 |
| Point P <sub>3</sub> | N008 | Point P <sub>7</sub> | N002 |
| Point P <sub>4</sub> | N007 | Point P <sub>8</sub> | N001 |

## 5.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est le même que la modélisation A à l'exception de l'épaisseur qui varie ici de manière quadratique.

## 5.3 Grandeurs testées et résultats

Maillage régulier :

| Point          | Grandeur en unité                           | Référence                | Aster | % différence |
|----------------|---|--------------------------|-------|--------------|
| P <sub>7</sub> | déplacement W ( m )4.7124 10 <sup>-10</sup> | 5.1212 10 <sup>-10</sup> |       | 9 %          |
| P <sub>8</sub> | déplacement W ( m )4.7124 10 <sup>-10</sup> | 5.1212 10 <sup>-10</sup> |       | 9 %          |

## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation

Élément SHB20 et épaisseur variant quadratiquement

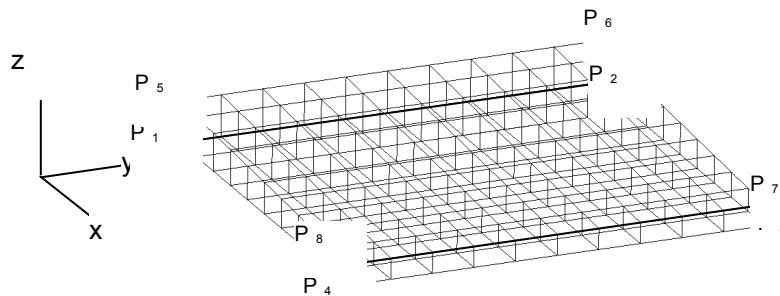


Figure 6.1-1 : Maillage de la modélisation D

Les caractéristiques sont les mêmes que pour la modélisation B

Nom des nœuds :

|                      |      |                      |      |
|----------------------|------|----------------------|------|
| Point P <sub>1</sub> | N005 | Point P <sub>5</sub> | N003 |
| Point P <sub>2</sub> | N006 | Point P <sub>6</sub> | N004 |
| Point P <sub>3</sub> | N008 | Point P <sub>7</sub> | N002 |
| Point P <sub>4</sub> | N007 | Point P <sub>8</sub> | N001 |

### 6.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est le même que la modélisation B à l'exception de l'épaisseur qui varie ici de manière quadratique.

### 6.3 Grandeur testées et résultats

Maillage régulier :

| Point          | Grandeur en unité   | Référence                | Aster                    | % différence |
|----------------|---------------------|--------------------------|--------------------------|--------------|
| P <sub>7</sub> | déplacement W ( m ) | 4.7124 10 <sup>-10</sup> | 4.6754 10 <sup>-10</sup> | -0.784       |
| P <sub>8</sub> | déplacement W ( m ) | 4.7124 10 <sup>-10</sup> | 4.6754 10 <sup>-10</sup> | -0.784       |

## **7 Synthèse des résultats**

---

Dans le cas d'une variation linéaire de l'épaisseur de la plaque, de bonnes solutions sont obtenues quelque soit l'élément fini utilisé (SHB8 ou SHB20).

Lorsque la variation géométrique est d'ordre quadratique, les éléments SHB20 fournissent des résultats plus précis (erreur <1%) que les éléments SHB8 (erreur <9%).