

## SSLS124 - Poutre en flexion avec divers élancements

---

### Résumé :

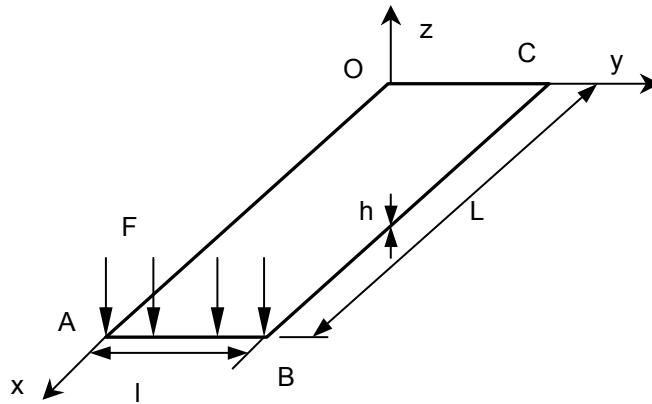
Ce test représente un calcul quasi-statique d'une poutre en flexion, encastrée à une extrémité, et soumise à une force verticale à l'autre extrémité. Ce test permet de valider, pour un calcul élastique linéaire, jusqu'à cinq valeurs d'élancement (épaisseurs variables), dans chacune des modélisations suivantes :

- Les éléments finis SHB8 pour un maillage régulier (modélisation *A*)
- Les éléments finis SHB8 pour un maillage non régulier (modélisation *B*)
- Les éléments finis SHB6 pour un maillage régulier (modélisation *C*)
- Les éléments finis SHB20 pour un maillage régulier (modélisation *D*)
- Les éléments finis SHB20 pour un maillage non régulier (modélisation *E*)
- Les éléments finis SHB15 pour un maillage régulier (modélisation *F*)
- Les éléments finis SHB15 pour un maillage non régulier (modélisation *G*)

Les déplacements obtenus sont comparés à la solution analytique élastique d'une poutre en flexion. Ce test permet de montrer les limites des éléments en terme d'élancement, d'une part, et de montrer leur bonne convergence pour un maillage très irrégulier, d'autre part.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



Longueur  $L=100\text{ m}$ , largeur  $l=10\text{ m}$ .

Épaisseur : **cas 1**  $h=10\text{ m}$ , **cas 2**  $h=1\text{ m}$ , **cas 3**  $h=0.1\text{ m}$ , **cas 4**  $h=0.05\text{ m}$ , **cas 5**  $h=0.02\text{ m}$

### 1.2 Propriétés des matériaux

On considère un matériau élastique :

$$E=2.10^{11}\text{ Pa}$$

$$\nu=0.3$$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Encastrement sur le côté  $OC$  :  $u=v=w=0$ ,  $\theta_x=\theta_y=\theta_z=0$

À l'extrémité  $AB$ , une charge uniformément répartie de résultante :

$$F_z=1\text{ N}$$

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Les résultats de référence sont obtenus par la théorie des poutres élastiques.

Le déplacement vertical à l'extrémité  $AB$  est donné par :

$$U_y = \frac{F L^3}{3 E I_z}$$

Avec :

$$I_z = \frac{l h^3}{12}$$

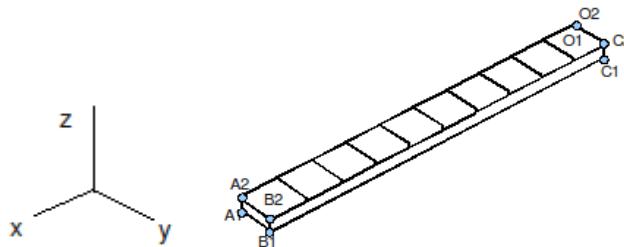
### 2.2 Résultats de référence

Déplacement des points  $A$  et  $B$  suivant  $Z$ .

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Élément SHB8



Découpage : un maillage régulier est considéré dans cette modélisation.

Maillage régulier :

10 mailles SHB8 : 1 selon la largeur, 10 selon la longueur, 1 selon l'épaisseur

Cinq valeurs d'épaisseur sont considérées dans cette modélisation : **cas 1**  $h=10\text{ m}$  , **cas 2**  $h=1\text{ m}$  , **cas 3**  $h=0.1\text{ m}$  , **cas 4**  $h=0.05\text{ m}$  , **cas 5**  $h=0.02\text{ m}$  .

Conditions aux limites :

- En tous les nœuds du côté  $OC$  : déplacement bloqué suivant  $X$
- en  $C1$  : déplacement bloqué suivant  $Y$  et  $Z$
- en  $C2$  : déplacement bloqué suivant  $Y$
- en  $O1$  : déplacement bloqué suivant  $Z$

Chargement :

- en  $A2$  : force nodale suivant  $X$  :  $FX=0,5$
- en  $B2$  : force nodale suivant  $Y$  :  $FY=0,5$

Nom des nœuds :

Point $O1$	$N40$	Point $O2$	$N44$
Point $A1$	$N03$	Point $A2$	$N01$
Point $B1$	$N04$	Point $B2$	$N02$
Point $C1$	$N43$	Point $C2$	$N39$

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 44

Nombre de mailles et types : 11 SHB8

Dans le cas du maillage régulier, chaque élément est un carré parfait de côté de longueur 10m

### 3.3 Grandeur testées et résultats

Maillage régulier :

On teste des valeurs de référence analytiques.

Épaisseur	Point	Grandeur en unité	Référence	% tolérances
Cas 1	<i>A2</i>	déplacement $W(m)$	2.0E-9	1
$h=10\text{ m}$	<i>B2</i>	déplacement $W(m)$	2.0E-9	1
	POINT 1 MAILLE 1	SIEF_ELGA	0.516522512185	0,1 %
	POINT 2 MAILLE 1	SIEF_ELGA	0.30692750676	0,1 %
	POINT 3 MAILLE 1	SIEF_ELGA	0,0	1E-9 %
	POINT 4 MAILLE 1	SIEF_ELGA	-0.30692750676	0,1 %
	POINT 5 MAILLE 1	SIEF_ELGA	-0.516522512185	0,1 %
Cas 2	<i>A2</i>	déplacement $W(m)$	2.0E-6	1
$h=1\text{ m}$	<i>B2</i>	déplacement $W(m)$	2.0E-6	

On teste les valeurs analytiques de `VMIS_SG` à partir des valeurs analytiques de `SIEF_ELGA` pour le cas 1 ainsi que la non-régression du calcul des champs `SIEQ_ELGA` et `SIEQ_ELNO`.

Épaisseur	Point	Grandeur en unité	Référence	% tolérances
Cas 3	<i>A2</i>	déplacement $W(m)$	0.00199500122746	1E-6 %
$h=0,1\text{ m}$	<i>B2</i>	déplacement $W(m)$	0.0019950008334	1E-6 %
Cas 4	<i>A2</i>	déplacement $W(m)$	0.0159975015609	1E-6 %
$h=0,05\text{ m}$	<i>B2</i>	déplacement $W(m)$	0.0159975015627	1E-6 %

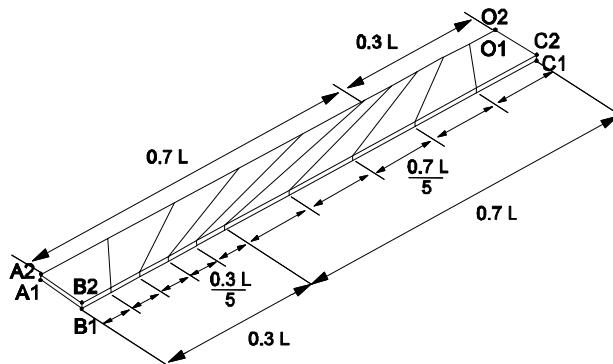
## 3.4 Remarques

L'utilisation de l'opérateur `STAT_NON_LINE` pour les cas 3, 4 et 5 permet de mieux approcher la solution de référence. En effet, pour les forts élancements, la matrice de rigidité devient quasi-singulière (il est nécessaire d'augmenter le nombre de décimales perdues à la résolution, à l'aide du mot-clé `NPREC`) et la précision de résolution du système linéaire diminue. Le solveur non-linéaire, en réalisant des itérations, permet de converger vers la solution analytique.

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Élément SHB8



Découpage : un maillage irrégulier est considéré dans cette modélisation.

Maillage non-régulier :

10 mailles SHB8 : 1 selon la largeur, 10 selon la longueur, 1 selon l'épaisseur

Trois valeurs d'épaisseur sont considérées dans cette modélisation : **cas 1**  $h=10\text{ m}$  , **cas 2**  $h=1\text{ m}$  , **cas 3**  $h=0.1\text{ m}$

Conditions aux limites :

- En tous les nœuds du côté  $OC$  : déplacement bloqué suivant  $X$
- en  $C1$  : déplacement bloqué suivant  $Y$  et  $Z$
- en  $C2$  : déplacement bloqué suivant  $Y$
- en  $O1$  : déplacement bloqué suivant  $Z$

Chargement :

- en  $A2$  : force nodale suivant  $X$  :  $FX=0,5$
- en  $B2$  : force nodale suivant  $Y$  :  $FY=0,5$

Noms des nœuds :

Point $O1$	$N40$	Point $O2$	$N44$
Point $A1$	$N03$	Point $A2$	$N01$
Point $B1$	$N04$	Point $B2$	$N02$
Point $C1$	$N43$	Point $C2$	$N39$

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 44

Nombre de mailles et types : 11 SHB8

### 4.3 Grandeur testées et résultats

Maillage non-régulier :

Épaisseur	Point	Grandeur en unité	Référence	% tolérance
Cas 1	<i>A2</i>	déplacement $W(m)$	2.0E-09	4
$h=10m$	<i>B2</i>	déplacement $W(m)$	2.0E-09	4
Cas 2	<i>A2</i>	déplacement $W(m)$	2.0E-06	5
$h=1m$	<i>B2</i>	déplacement $W(m)$	2.0E-06	5

On teste également la non-régression du calcul des champs SIEQ\_ELGA et SIEQ\_ELNO.

## 4.4 Remarques

On peut faire la même remarque que pour la modélisation A : quand l'élancement augmente jusqu'à devenir très important, la matrice de rigidité devient très mal conditionnée et quasi-singulière. C'est d'autant plus marqué dans cette modélisation que le maillage est, volontairement, de mauvaise qualité (irrégulier avec des éléments distordus).

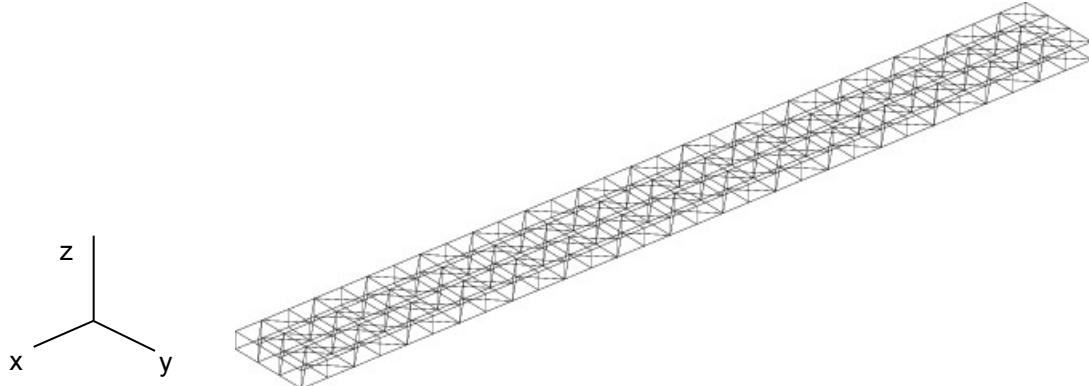
Le conditionnement évalué avec le solveur MUMPS dans le cas 3 dépasse  $10^{12}$  et la solution du système linéaire obtenue, même après raffinement itératif, présente une variabilité entre plate-formes de calcul. Pour cette raison, on ne calcule pas d'élancement supérieur dans cette modélisation.

Malgré la mauvaise qualité du maillage et avec des élancements tout de même importants, on constate le bon comportement de l'élément avec une bonne approximation de la solution en flexion.

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Élément SHB6



Dans cette modélisation on a adapté le maillage surfacique à l'épaisseur considérée :  
(le maillage ci-dessus correspond au cas 2)

- $nbl$  = nombre d'éléments selon la largeur,
- $nbL$  = nombre d'éléments selon la longueur,
- 1 élément selon l'épaisseur

	$h$	$nbL$	$nbl$
<b>cas 1</b>	10	10	1
<b>cas 2</b>	5	30	3
<b>cas 3</b>	2	100	10
<b>cas 4</b>	1	100	10

Conditions aux limites :

- En tous les nœuds du côté  $OC$  : déplacement bloqué suivant  $X$
- en  $C1$  : déplacement bloqué suivant  $Y$  et  $Z$
- en  $C2$  : déplacement bloqué suivant  $Y$
- en  $OI$  : déplacement bloqué suivant  $Z$

Chargement :

- en  $A2$  : force nodale suivant  $X$  :  $FX=0,5$
- en  $B2$  : force nodale suivant  $Y$  :  $FY=0,5$

### 5.2 Caractéristiques du maillage

**cas 1** Nombre de nœuds : 44

Nombre de mailles et types : 20 SHB6

**cas 2** Nombre de nœuds : 248

Nombre de mailles et types : 180 SHB6

**cas 3 et 4** Nombre de nœuds : 2222

Nombre de mailles et types : 500 SHB6

## 5.3 Grandeurs testées et résultats

Maillage régulier :

Épaisseur	Point	Grandeur en unité	Référence	% tolérance
Cas 1	A2	déplacement $W(m)$	2,00E-009	1
$h=10m$	B2	déplacement $W(m)$	2,00E-009	1.5
Cas 2	A2	déplacement $W(m)$	1,60E-006	1
$h=5m$	B2	déplacement $W(m)$	1,60E-006	1
Cas 3	A2	déplacement $W(m)$	2,50E-007	1
$h=2m$	B2	déplacement $W(m)$	2,50E-007	1
Cas 4	A2	déplacement $W(m)$	2,00E-006	4
$h=1m$	B2	déplacement $W(m)$	2,00E-006	4

On teste également la non-régression du calcul des champs SIEQ\_ELGA et SIEQ\_ELNO.

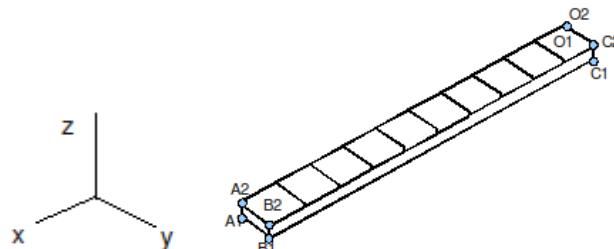
## 5.4 Remarques

Les élancements sont beaucoup plus faibles que pour les autres modélisations. L'élément SHB6 tolère en effet des élancements moins grands que les autres modélisations SHB et est plus sensible au verrouillage en cisaillement.

## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation

Élément SHB20



Découpage : un maillage régulier est considéré dans cette modélisation.

Maillage régulier :

10 mailles SHB20 : 1 selon la largeur, 10 selon la longueur, 1 selon l'épaisseur

Trois valeurs d'épaisseur sont considérées dans cette modélisation : **cas 1**  $h=10\text{m}$  , **cas 2**  $h=1\text{m}$  , **cas 3**  $h=0.1\text{m}$

Conditions aux limites :

- En tous les nœuds du côté  $OC$  : déplacement bloqué suivant  $X$
- en  $C1$  : déplacement bloqué suivant  $Y$  et  $Z$
- en  $C2$  : déplacement bloqué suivant  $Y$
- en  $O1$  : déplacement bloqué suivant  $Z$

Chargement :

- en  $A2$  : force nodale suivant  $X$  :  $FX=0,5$
- en  $B2$  : force nodale suivant  $Y$  :  $FY=0,5$

### 6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 128

Nombre de mailles et types : 10 SHB20

Dans le cas du maillage régulier, chaque élément est un carré parfait de côté de longueur 10m

### 6.3 Grandeur testées et résultats

Maillage régulier :

Épaisseur	Point	Grandeur en unité	Référence	% tolérance
$h=10\text{m}$	$A2$	déplacement $W(\text{m})$	2.0E-9	1
	$B2$	déplacement $W(\text{m})$	2.0E-9	1
$h=1\text{m}$	$A2$	déplacement $W(\text{m})$	2.0E-6	1
	$B2$	déplacement $W(\text{m})$	2.0E-6	1

On teste également la non-régression du calcul des champs SIEQ\_ELGA et SIEQ\_ELNO.

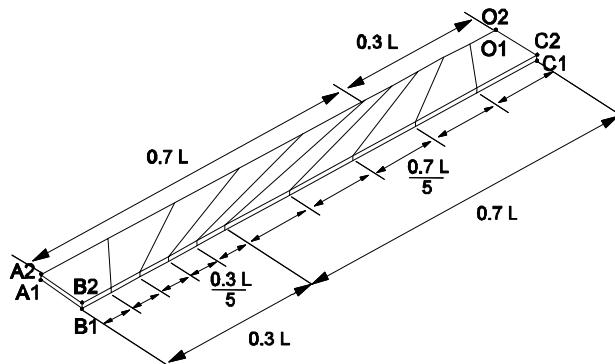
### 6.4 Remarques

Les mêmes remarques que pour les modélisations A et B s'appliquent. Ici dans le cas 3, le conditionnement atteint déjà  $10^{13}$ .

## 7 Modélisation E

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation

Élément SHB20



Découpage : un maillage irrégulier est considéré dans cette modélisation.

Maillage non-régulier :

10 mailles SHB20 : 1 selon la largeur, 10 selon la longueur, 1 selon l'épaisseur

Trois valeurs d'épaisseur sont considérées dans cette modélisation : **cas 1**  $h=10\text{ m}$  , **cas 2**  $h=1\text{ m}$  , **cas 3**  $h=0.1\text{ m}$

Conditions aux limites :

- En tous les nœuds du côté  $OC$  : déplacement bloqué suivant  $X$
- en  $C1$  : déplacement bloqué suivant  $Y$  et  $Z$
- en  $C2$  : déplacement bloqué suivant  $Y$
- en  $O1$  : déplacement bloqué suivant  $Z$

Chargement :

- en  $A2$  : force nodale suivant  $X$  :  $FX=0,5$
- en  $B2$  : force nodale suivant  $Y$  :  $FY=0,5$

### 7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 128

Nombre de mailles et types : 10 SHB20

### 7.3 Grandeurs testées et résultats

Maillage non-régulier :

Épaisseur	Point	Grandeur en unité	Référence	% tolérance
Cas 1 $h=10\text{ m}$	$A2$	déplacement $W(\text{m})$	2.0E-9	1
	$B2$	déplacement $W(\text{m})$	2.0E-9	1
Cas 2 $h=1\text{ m}$	$A2$	déplacement $W(\text{m})$	2.0E-6	7
	$B2$	déplacement $W(\text{m})$	2.0E-6	7

On teste également la non-régression du calcul des champs SIEQ\_ELGA et SIEQ\_ELNO.

### 7.4 Remarques

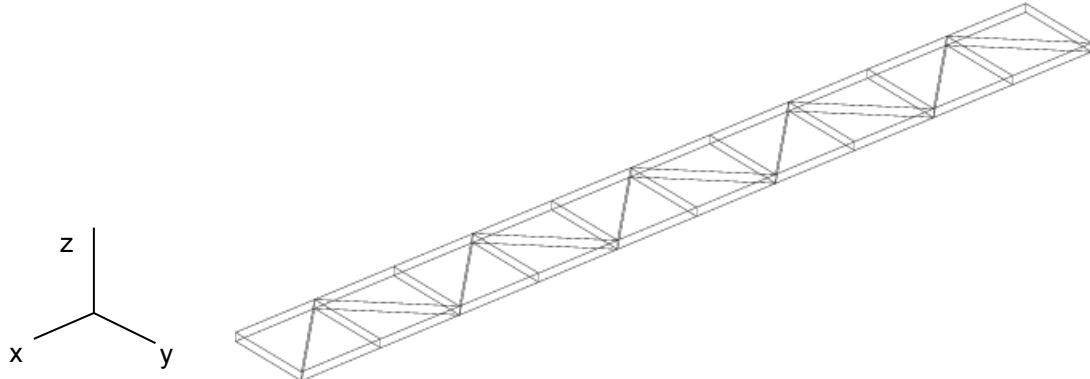
Comme on peut le constater, la dégradation de la qualité du maillage a une influence sur la qualité du résultat pour les forts élancements mais reste neutre vis-à-vis des élancements standards.

Dans le cas 3, le conditionnement atteint déjà  $10^{13}$ .

## 8 Modélisation F

### 8.1 Caractéristiques de la modélisation

Élément SHB15



Découpage : un maillage régulier est considéré dans cette modélisation.

Maillage régulier :

20 mailles SHB15 : 1 selon la largeur, 10 selon la longueur, 1 selon l'épaisseur

Trois valeurs d'épaisseur sont considérées dans cette modélisation : **cas 1**  $h=10\text{m}$  , **cas 2**  $h=1\text{m}$  , **cas 3**  $h=0.1\text{m}$

Conditions aux limites :

- En tous les nœuds du côté  $OC$  : déplacement bloqué suivant  $X$
- en  $C1$  : déplacement bloqué suivant  $Y$  et  $Z$
- en  $C2$  : déplacement bloqué suivant  $Y$
- en  $O1$  : déplacement bloqué suivant  $Z$

Chargement :

- en  $A2$  : force nodale suivant  $X$  :  $FX=0,5$
- en  $B2$  : force nodale suivant  $Y$  :  $FY=0,5$

### 8.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 148

Nombre de mailles et types : 20 SHB15

### 8.3 Grandeur testées et résultats

Maillage régulier :

Épaisseur	Point	Grandeur en unité	Référence	% tolérance
Cas 1 $h=10\text{m}$	$A2$	déplacement $W(\text{m})$	2.0E-9	1
	$B2$	déplacement $W(\text{m})$	2.0E-9	1
Cas 2 $h=1\text{m}$	$A2$	déplacement $W(\text{m})$	2.0E-6	1.5
	$B2$	déplacement $W(\text{m})$	2.0E-6	1.5

On teste également la non-régression du calcul des champs SIEQ\_ELGA et SIEQ\_ELNO.

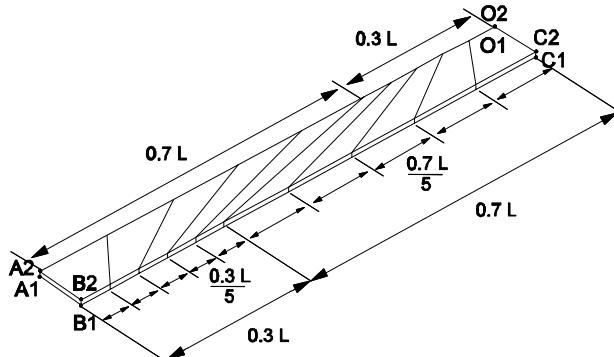
## 8.4 Remarques

Les mêmes remarques que pour les modélisations A et B s'appliquent. Ici dans le cas 3, le conditionnement atteint déjà  $10^{13}$ .

## 9 Modélisation G

### 9.1 Caractéristiques de la modélisation

Élément SHB15



Découpage : un maillage irrégulier est considéré dans cette modélisation.

Maillage non-régulier :

20 mailles SHB15 : 1 selon la largeur, 10 selon la longueur, 1 selon l'épaisseur

Trois valeurs d'épaisseur sont considérées dans cette modélisation : **cas 1**  $h=10\text{ m}$  , **cas 2**  $h=1\text{ m}$  , **cas 3**  $h=0.1\text{ m}$

Conditions aux limites :

En tous les noeuds du côté  $OC$  : déplacement bloqué suivant  $X$

- en  $C1$  : déplacement bloqué suivant  $Y$  et  $Z$
- en  $C2$  : déplacement bloqué suivant  $Y$
- en  $O1$  : déplacement bloqué suivant  $Z$

Chargement :

- en  $A2$  : force nodale suivant  $X$  :  $FX=0,5$
- en  $B2$  : force nodale suivant  $Y$  :  $FY=0,5$

### 9.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de noeuds : 148

Nombre de mailles et types : 20 SHB15

### 9.3 Grandeur testées et résultats

Maillage non-régulier :

Épaisseur	Point	Grandeur en unité	Référence	% tolérance
Cas 1 $h=10\text{m}$	$A2$	déplacement $W(\text{m})$	2.0E-9	2.5
	$B2$	déplacement $W(\text{m})$	2.0E-9	2
Cas 2 $h=1\text{m}$	$A2$	déplacement $W(\text{m})$	2.0E-6	7
	$B2$	déplacement $W(\text{m})$	2.0E-6	7

On teste également la non-régression du calcul des champs SIEQ\_ELGA et SIEQ\_ELNO.

## 9.4 Remarques

Comme on peut le constater, la dégradation de la qualité du maillage a une influence sur la qualité du résultat y compris pour des élancements faibles.

Dans le cas 3, le conditionnement atteint déjà  $10^{13}$ .

## 10 Synthèse des résultats

Dans le cas du maillage régulier :

- pour le SHB8 (modélisation *A*), de bons résultats sont obtenus, même lorsque l'élancement de l'élément (rapport côté/épaisseur) atteint 500.
- pour le SHB6 (modélisation *C*), on obtient de bons résultats à condition de raffiner le maillage surfacique au fur et à mesure que l'élancement augmente. Néanmoins, pour les élancements au-delà de 50, les résultats se dégradent. L'élément SHB6 présente un verrouillage (assez faible) en flexion.
- pour les éléments quadratiques (modélisations *D* et *F*), les résultats sont très bons jusqu'à un élancement de 200.
- Dans le cas du maillage non régulier (modélisations *B*, *E* et *G*), quelque soit l'élancement de l'élément, pour le SHB8 on tend à sous-estimer la rigidité de la poutre d'environ 4%, mais les résultats restent bons jusqu'à un élancement de 500. Les éléments quadratiques donnent de bons résultats jusqu'à un élancement de 200.

Pour la gamme d'élancements couramment rencontrés en modélisations plaques et coques (de 10 à 100), les éléments SHB obtiennent de bons résultats quelle que soit la qualité du maillage.

Quand on fait tendre l'épaisseur par zéro, des phénomènes de verrouillage peuvent rendre la matrice de rigidité singulière et donc empêcher la résolution ou ralentir la convergence en non-linéaire.

Au delà de 1/1000, la plaque devient trop fine et suffisamment élancée. Il peut dès lors apparaître une sensibilité des résultats de 1.E-3%.