

## SSLP311 - Fissure centrale oblique dans une plaque rectangulaire finie, à deux matériaux, soumise à traction uniforme

---

### Résumé :

Ce test est issu de la validation indépendante de la version 3 en mécanique de la rupture.

Il s'agit d'un test bidimensionnel en statique avec bi-matériau en présence d'une fissure d'interface interne oblique.

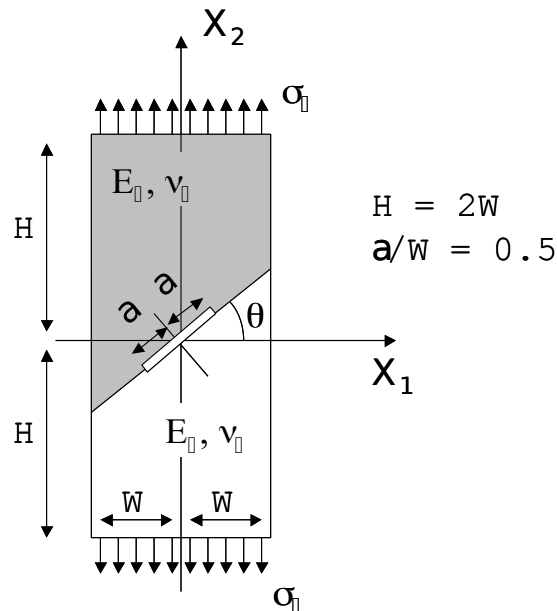
Le comportement de la structure (bi-matériau) est élastique linéaire isotrope.

Le cas test comprend quatre modélisations en contraintes planes dans lesquelles l'influence de l'inclinaison de la fissure  $\theta$  est étudiée (4 cas).

Le calcul des facteurs d'intensité des contraintes n'est pas disponible pour une fissure située à l'interface d'un bi-matériau ; la comparaison à la solution de référence se fait donc sur le taux de restitution de l'énergie uniquement, calculé avec l'opérateur `CALC_G`.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



On considère 4 valeurs de l'angle  $\theta$  :  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $60^\circ$ .  
Les autres dimensions sont choisies telles que  $H = 2W = 4a$ .  
La valeur de  $a$  vaut  $1.E-3\text{ m}$ .

### 1.2 Propriétés des matériaux

#### Matériau n° 1

Élastique, linéaire, isotrope, module d'Young  $E_1 = 2E + 12\text{ Pa}$  et coefficient de Poisson  $\nu_1 = 0,3$ .

#### Matériau n° 2

Élastique, linéaire, isotrope, module d'Young  $E_2 = 2E + 11\text{ Pa}$  et coefficient de Poisson  $\nu_2 = 0,3$ .

### 1.3 Conditions aux limites et chargement

- Les modes rigides sont bloqués par les conditions aux limites suivantes :  
 $UX = UY = 0$  au coin inférieur gauche du modèle.  
 $UY = 0$  sur le bord inférieur.
- Chargement : tension uniforme  $\sigma_{yy} = \sigma_0$  sur le bord supérieur.  
La valeur de  $\sigma_0$  est  $100\text{ MPa}$ .

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Méthode des éléments de frontière, avec des éléments quadratiques [bib1].

Le calcul de  $K_I$  et  $K_{II}$  est effectué par une intégrale de contour (intégrale M [bib2]) dans laquelle interviennent les contraintes et déplacements calculés dans la pièce, ainsi que les contraintes et déplacements déduits de solutions asymptotiques définies analytiquement, dans lesquelles  $K_I$  et  $K_{II}$  sont alternativement nuls.

A titre de comparaison, le calcul des  $K$  est également effectué par la méthode d'extension virtuelle.

### 2.2 Résultats de référence

Les résultats de la solution de référence sont présentés dans le tableau ci-dessous, pour les différentes valeurs de l'angle et pour les deux extrémités de la fissure, avec

$$F_j = \frac{K_j}{\sigma_0 \sqrt{\pi a}} \quad (j = I, II).$$

| Méthode               |          | Côté gauche         |                     |                     |                     | Côté droit          |                     |                     |                     |
|-----------------------|----------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
|                       |          | $\theta = 15^\circ$ | $\theta = 30^\circ$ | $\theta = 45^\circ$ | $\theta = 60^\circ$ | $\theta = 15^\circ$ | $\theta = 30^\circ$ | $\theta = 45^\circ$ | $\theta = 60^\circ$ |
| intégrale<br><i>M</i> | $F_I$    | 1,0115              | 0,7868              | 0,5211              | 0,2770              | 1,1266              | 0,9910              | 0,7646              | 0,4919              |
|                       | $F_{II}$ | 0,4434              | 0,6244              | 0,6723              | 0,5804              | 0,0862              | 0,2961              | 0,4056              | 0,4057              |
| extension             | $F_I$    | 1,0110              | 0,7864              | 0,5210              | 0,2769              | 1,1260              | 0,9904              | 0,7643              | 0,4919              |
| virtuelle             | $F_{II}$ | 0,4429              | 0,6240              | 0,6720              | 0,5801              | 0,0865              | 0,2960              | 0,4055              | 0,4056              |

La relation entre le taux global de restitution de l'énergie  $G$  et les  $K_j$  s'écrit comme suit [bib3] :

$$G = \beta (K_I^2 + K_{II}^2)$$

avec :

$$\beta = \frac{1}{16 C h^2 (\alpha \pi)} \left( \frac{1 + \kappa_1}{\mu_1} + \frac{1 + \kappa_2}{\mu_2} \right) \quad \text{et} \quad \kappa_i = \frac{3 - \nu_i}{1 + \nu_i}$$

$$\mu_i = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)}$$

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \ln \left[ \left( \frac{\kappa_1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \left( \frac{\kappa_2}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right)^{-1} \right]$$

### 2.3 Incertitude sur la solution

Estimée à moins de 0,1%. On note que l'écart entre la méthode des intégrales de contour et la méthode d'extension virtuelle est généralement inférieur à 0,05 %.

### 2.4 Références bibliographiques

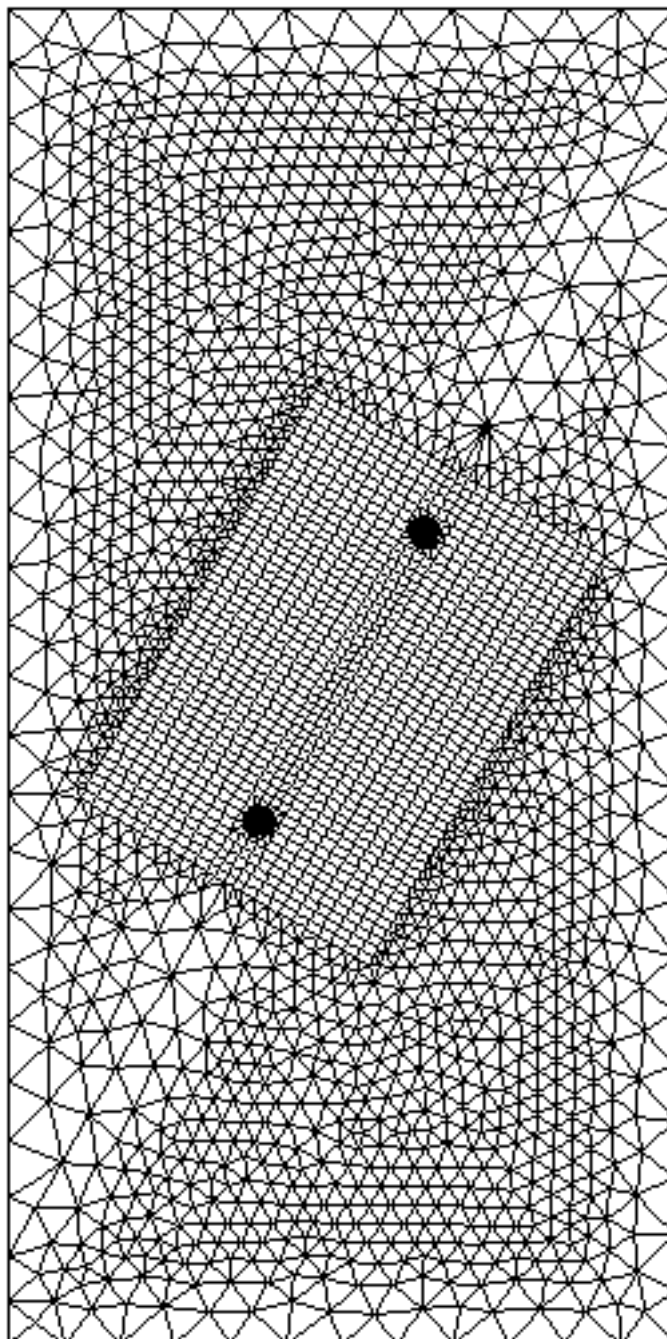
- 1) Stress intensity factor analysis of interface crack using boundary element method. Application of contour-integral method. N. MIYAZAKI, T. IKEDA, T.SODA et T. MUNAKATA. Engng.Fract.Mechs., 45, n°5, 599-610, 1993.
- 2) An analysis of interface cracks between dissimilar isotropic materials using conservation integrals in elasticity. J. F. YAU et T. C. CHANG. Engng.Fract.Mechs., 20, 423-432, 1984.

- 3) The strength of adhesive joints using the theory of cracks. B. M. MALYSHEV et R. L. SALGANIK. Int.J.Fract.Mech., 1, 114-128, 1965.

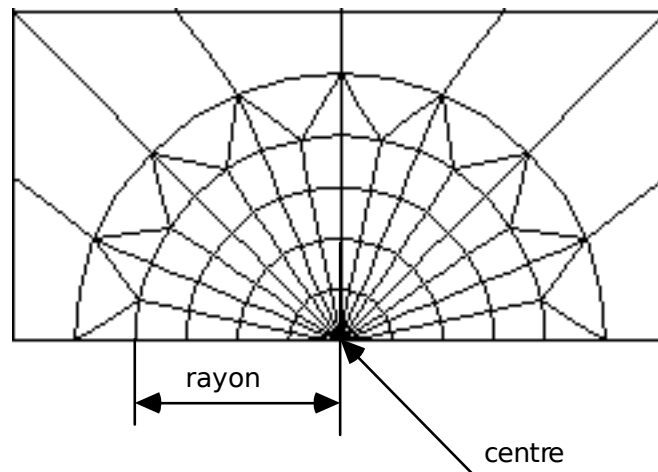
## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Les différentes modélisations sont identiques à part l'inclinaison de la fissure.



Maillage complet pour un angle  $\beta = 60^\circ$



Zoom sur la pointe de fissure

Le rayon vaut  $7.5E-5\text{ m}$ .

Il y a quatre couronnes définies par la commande `CALC_G` :

couronne 1 :  $R_{inf} = 0$ ,  $R_{sup} = 1.875E-5\text{ m}$   
 couronne 2 :  $R_{inf} = 1.875E-5\text{ m}$ ,  $R_{sup} = 3.750E-5\text{ m}$   
 couronne 3 :  $R_{inf} = 3.750E-5\text{ m}$ ,  $R_{sup} = 5.625E-5\text{ m}$   
 couronne 4 :  $R_{inf} = 5.625E-5\text{ m}$ ,  $R_{sup} = 7.500E-5\text{ m}$

La direction de propagation est définie par :  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$

## 3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 10676 nœuds et 4584 éléments, dont 1392 éléments QUA8 et 3168 éléments TRI6.

## 3.3 Fonctionnalités testées

Le calcul de  $K_I$  et  $K_{II}$  n'est pas valide pour un bimatériau : l'option `CALC_K_G` ne peut être utilisé et seul le calcul du taux de restitution de l'énergie est possible.

## 3.4 Grandeurs testées et résultats

### 3.4.1 Valeurs testées

| Identification                        | Référence  | Aster     | % différence |
|---------------------------------------|------------|-----------|--------------|
| Extrémité gauche, $\theta = 15^\circ$ |            |           |              |
| $G$ , couronne 1                      | 9,67362E+1 | 9,2428E+1 | 4,45         |
| $G$ , couronne 2                      | 9,67362E+1 | 9,6392E+1 | 0,356        |
| $G$ , couronne 3                      | 9,67362E+1 | 9,6417E+1 | 0,330        |
| $G$ , couronne 4                      | 9,67362E+1 | 9,6421E+1 | 0,326        |
| $K_I$                                 | 5,6694E+6  | -         | -            |
| $K_{II}$                              | 2,4852E+6  | -         | -            |
| Extrémité droite, $\theta = 15^\circ$ |            |           |              |

|                  |           |           |       |
|------------------|-----------|-----------|-------|
| $G$ , couronne 1 | 1,0125E+2 | 9,6763E+1 | 4,33  |
| $G$ , couronne 2 | 1,0125E+2 | 1,0093E+2 | 0,315 |
| $G$ , couronne 3 | 1,0125E+2 | 1,0095E+2 | 0,295 |
| $G$ , couronne 4 | 1,0125E+2 | 1,0095E+2 | 0,291 |
| $K_I$            | 6,3145E+6 | -         | -     |
| $K_{II}$         | 4,8309E+5 | -         | -     |

## 3.4.2 Remarques

Pour obtenir le  $G$  sur le fond de fissure, on calcule le taux de restitution d'énergie à l'aide de la relation entre  $G$  et les  $K_j$  [bib3] :

$$\kappa_1 = \kappa_2 = 2.076923$$

$$\mu_1 = 7.6923 E + 11$$

$$\mu_2 = 7.6923 E + 10$$

$$\alpha = -9.37742 E - 2$$

$$\beta = 2.524488 E - 12$$

$$G = \beta (K_I^2 + K_{II}^2)$$

## 4 Modélisation B

### 4.1 Valeurs testées

| Identification                        | Référence  | Aster     | % différence |
|---------------------------------------|------------|-----------|--------------|
| Extrémité gauche, $\theta = 30^\circ$ |            |           |              |
| $G$ , couronne 1                      | 8,0017E+1  | 7,6431E+1 | 4,48         |
| $G$ , couronne 2                      | 8,0017E+1  | 7,9707E+1 | 0,387        |
| $G$ , couronne 3                      | 8,0017E+1  | 7,9730E+1 | 0,358        |
| $G$ , couronne 4                      | 8,0017E+1  | 7,9734E+1 | 0,353        |
| $K_I$                                 | 4,4100E+6  | -         | -            |
| $K_{II}$                              | 3,499E+6   | -         | -            |
| Extrémité droite, $\theta = 30^\circ$ |            |           |              |
| $G$ , couronne 1                      | 8,48417E+1 | 8,1080E+1 | 4,433        |
| $G$ , couronne 2                      | 8,48417E+1 | 8,4583E+1 | 0,305        |
| $G$ , couronne 3                      | 8,48417E+1 | 8,4602E+1 | 0,282        |
| $G$ , couronne 4                      | 8,48417E+1 | 8,4602E+1 | 0,282        |
| $K_I$                                 | 5,5545E+6  | -         | -            |
| $K_{II}$                              | 1,6596E+6  | -         | -            |

## 5 Modélisation C

### 5.1 Valeurs testées

| Identification                        | Référence  | Aster      | % différence |
|---------------------------------------|------------|------------|--------------|
| Extrémité gauche, $\theta = 45^\circ$ |            |            |              |
| $G$ , couronne 1                      | 5,73826E+1 | 5,48161E+1 | 4,473        |
| $G$ , couronne 2                      | 5,73826E+1 | 5,71687E+1 | 0,373        |
| $G$ , couronne 3                      | 5,73826E+1 | 5,71865E+1 | 0,342        |
| $G$ , couronne 4                      | 5,73826E+1 | 5,7189E+1  | 0,337        |
| $K_I$                                 | 2,92076E+6 | -          | -            |
| $K_{II}$                              | 3,7682E+6  | -          | -            |
| Extrémité droite, $\theta = 45^\circ$ |            |            |              |
| $G$ , couronne 1                      | 5,94122E+1 | 5,7039E+1  | 3,994        |
| $G$ , couronne 2                      | 5,94122E+1 | 5,9505E+1  | 0,157        |
| $G$ , couronne 3                      | 5,94122E+1 | 5,9516E+1  | 0,175        |
| $G$ , couronne 4                      | 5,94122E+1 | 5,9518E+1  | 0,179        |
| $K_I$                                 | 4,28557E+6 | -          | -            |
| $K_{II}$                              | 2,27338E+6 | -          | -            |



## 6 Modélisation D

### 6.1 Valeurs testées

| Identification                        | Référence  | Aster      | % différence |
|---------------------------------------|------------|------------|--------------|
| Extrémité gauche, $\theta = 60^\circ$ |            |            |              |
| $G$ , couronne 1                      | 3,28015E+1 | 3,10680E+1 | 5,285        |
| $G$ , couronne 2                      | 3,28015E+1 | 3,24037E+1 | 1,213        |
| $G$ , couronne 3                      | 3,28015E+1 | 3,24140E+1 | 1,181        |
| $G$ , couronne 4                      | 3,28015E+1 | 3,24156E+1 | 1,177        |
| $K_I$                                 | 1,55258E+6 | -          | -            |
| $K_{II}$                              | 3,2531E+6  | -          | -            |
| Extrémité droite, $\theta = 60^\circ$ |            |            |              |
| $G$ , couronne 1                      | 3,22436E+1 | 3,11825E+1 | 3,291        |
| $G$ , couronne 2                      | 3,22436E+1 | 3,25321E+1 | 0,895        |
| $G$ , couronne 3                      | 3,22436E+1 | 3,25383E+1 | 0,914        |
| $G$ , couronne 4                      | 3,22436E+1 | 3,25398E+1 | 0,919        |
| $K_I$                                 | 2,75709E+6 | -          | -            |
| $K_{II}$                              | 2,27394E+6 | -          | -            |

## 7 Synthèse des résultats

Le calcul de  $K_I$  et  $K_{II}$  n'est pas disponible pour une fissure située à l'interface d'un bimatériau, et la comparaison se fait donc directement sur le taux de restitution de l'énergie  $G$ .

Le calcul de  $G$  n'est pas précis sur la première couronne dans tous les cas d'inclinaison de la fissure, ce qui confirme qu'il faut éviter de prendre un rayon  $R_{inf}$  nul. En ce qui concerne les autres couronnes, les écarts sont de l'ordre de 0,4%. Pour le cas d'inclinaison  $\theta = 60^\circ$  l'écart dépasse 1 %. Dans l'ensemble, les résultats sont satisfaisants pour  $G$ .