

Algorithme de calcul des densités de ferrailage

Résumé :

On présente l'algorithme de calcul des densités de ferrailage de plaques et coques en béton armé implanté au sein de la commande `CALC_FERRAILLAGE` [U4.81.42]. Cet algorithme a été proposé en 1978 par Alain Capra et Jean-Francis Maury [bib1].

Table des Matières

1 Présentation générale de la méthode.....	3
2 Descriptif détaillé de l'algorithme.....	4
2.1 Algorithme originel de Capra et Maury.....	4
2.2 Implantation retenue dans Code_Aster.....	6
2.2.1 Diagrammes contrainte-déformation pris en compte.....	6
2.2.2 Détermination des efforts à l'ELU.....	7
2.2.3 Détermination des efforts à l'ELS.....	8
2.2.4 Détermination du ferrailage transversal.....	9
2.2.5 Algorithme d'optimisation de la section d'acier.....	9
2.2.6 Récapitulatif des causes d'arrêt du calcul.....	10
2.2.6.1 Alarmes lors du calcul à l'ELU.....	10
2.2.6.2 Erreurs lors du calcul à l'ELS.....	10
2.2.6.3 Erreurs lors du calcul du ferrailage transversal.....	10
3 Implantation dans Code_Aster.....	11
4 Références bibliographiques.....	11
5 Description des versions du document.....	11

1 Présentation générale de la méthode

Cette méthode [bib1], mise au point en 1978 par Alain Capra et Jean-Francis Maury (ingénieurs à la Direction technique de Socotec), fait référence en la matière et constitue l'algorithme le plus souvent implanté dans les codes de calcul de ferraillage de plaques et coques en béton armé.

La méthode est fondée sur le principe de l'équilibre de chacune des facettes centrées au point de calcul et dont la normale tourne dans le plan tangent au feuillet moyen. Il s'agit d'un post-traitement d'un calcul statique d'une plaque ou d'une coque en béton armé, conduit à partir de l'état d'efforts généralisés précédemment obtenu.

Pour chaque position de la facette, on effectue un calcul de section rectangulaire soumise à la flexion composée et on en déduit les deux sections d'armatures supérieure et inférieure. Ces deux sections sont ensuite recalées en deux sections (par unité de longueur) suivant l'axe X (AXS pour la nappe supérieure et AXI pour la nappe inférieure) et deux sections (par unité de longueur) suivant l'axe Y (AYS pour la nappe supérieure et AYI pour la nappe inférieure).

On procède ensuite, à l'aide d'un algorithme adapté, à la recherche de l'optimum pour chaque nappe (inférieure et supérieure) correspondant à la valeur minimum de la somme $AXS + AYS$ (respectivement $AXI + AYI$).

L'article de Capra et Maury propose également un calcul de ferraillage transversal en partie courante de plaque, évalué à partir de la contrainte de cisaillement équivalente qui s'exprime suivant la formule :

$$\tau = \frac{1}{\zeta} \sqrt{(T_{ZX}^2 + T_{ZY}^2)}$$

où $\zeta = I/m(0)$ représente le bras de levier du couple élastique de la section et T_{ZX} et T_{ZY} sont les efforts tranchants. La section d'armature transversale est simplement obtenue en divisant cette contrainte par la contrainte limite admissible de l'acier.

Cette méthode, au prix d'un coût de calcul un peu plus fort que dans d'autres méthodes, notamment celle de Wood (rotation de la facette et recherche de l'optimum) permet d'obtenir une répartition d'acier optimale. Le calcul du ferraillage transversal reste, lui, assez sommaire. En particulier, il ne tient pas compte de la contribution de l'effort normal comme le requiert le BAEL.

La détermination des efforts appliqués à une section est effectuée, en standard, selon le BAEL91. L'utilisateur peut cependant modifier la valeur des pivots afin de s'adapter à une autre réglementation.

2 Descriptif détaillé de l'algorithme

L'objet de ce chapitre est de décrire la méthode de Capra et Maury de manière détaillée et de présenter également la technique utilisée pour implanter cette méthode au sein de *Code_Aster* ainsi que les opérations additionnelles nécessaires à sa mise en œuvre.

De manière très globale, l'algorithme utilisé peut être schématisé de la manière suivante :

- Acquisition des paramètres de configuration (type de calcul *ELS/ELU*, valeurs caractéristiques des contraintes limites pour l'acier et le béton, valeur de l'enrobage etc.)
- Acquisition des caractéristiques des éléments (épaisseur, efforts de membrane, moments de flexion)
- Détermination des contraintes réglementaires en fonction du type de calcul effectué (*ELU/ELS*)
- Pour chaque élément traité, détermination du ferrailage.

Cette dernière partie, qui est le cœur de la méthode de Capra et Maury est présentée dans le paragraphe suivant.

2.1 Algorithme originel de Capra et Maury

On définit un ensemble de facettes, centrées au point de calcul, dont la normale tourne dans le plan tangent au feuillet moyen. La facette est repérée par l'angle θ que fait sa normale avec l'axe OX du repère de l'élément (voir figure 2.1-a). L'angle θ est discrétisé régulièrement de -90° à $+90^\circ$ (généralement avec un pas de 10°). Les axes Ox et Oy sont les axes des nappes d'armatures.

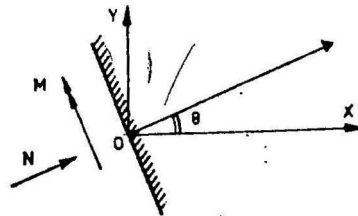


Figure 2.1-a [bib1]

Pour chacune de ces facettes, on évalue le moment de flexion (M) et la tension de membrane (N) qui s'y appliquent en fonction des tenseurs des efforts à l'aide des équations :

$$\begin{aligned} M &= M_{xx} \cos^2 \theta + M_{yy} \sin^2 \theta - 2 M_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ N &= N_{xx} \cos^2 \theta + N_{yy} \sin^2 \theta - 2 N_{xy} \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

Par un calcul en flexion composée, on peut déterminer les forces de traction $FI(\theta)$ et $FS(\theta)$, perpendiculaires à la section, qui doivent être équilibrées par les nappes inférieures et supérieures du ferrailage.

Les efforts résistants dans la direction θ des deux nappes peuvent être évalués à l'aide des expressions $FRI = (AXI \cos^2 \theta + AII \sin^2 \theta) \sigma$ et $FRS = (AXS \cos^2 \theta + AYS \sin^2 \theta) \sigma$ où σ représente la contrainte maximale admissible de l'acier (identique dans les deux directions).

La résistance est assurée si l'effort résistant est supérieur à l'effort appliqué, ce qui s'écrit :

$$FI < FRI \text{ et } FS < FRS.$$

Ainsi, en considérant un repère orthonormé comportant AXS en abscisse et AYS en ordonnée, on a à résoudre finalement pour le ferrailage supérieur :

$$AXS \cos^2 \theta + AYS \sin^2 \theta \geq FS(\theta)/\sigma \quad \text{pour tous les angles } \theta \quad (1)$$

et

$AXS + AYS$ minimum.

Les inégalités (1) définissent pour chaque valeur de θ un demi-espace limité par une droite de pente négative qui traduit un domaine de validité (figure 2.1-b).

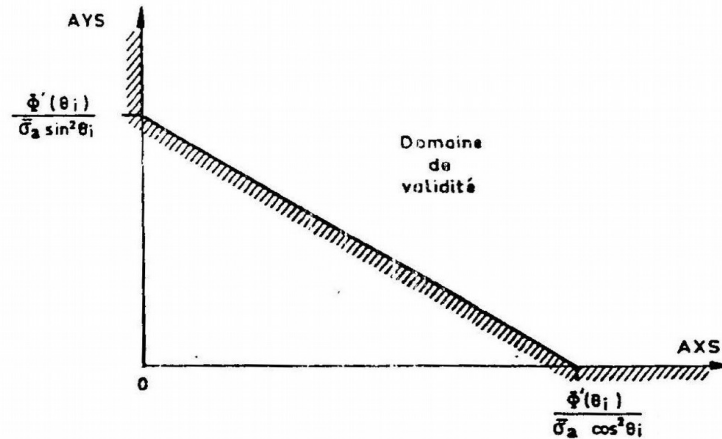


Figure 2.1-b [bib1]

En parcourant toutes les valeurs de θ , on obtient le domaine de validité indiqué sur la figure 2.1-c, délimité par la ligne brisée $ABCD \dots$

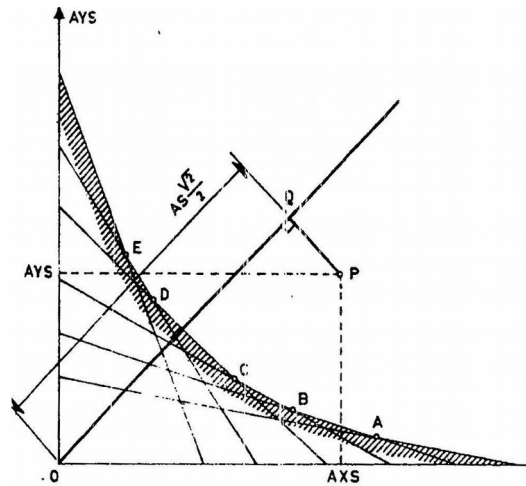


Figure 2.1-c [bib1]

Pour chaque point P du domaine de validité, la section totale des armatures peut être obtenue en projetant le point P en Q sur la première bissectrice. La distance OQ représente alors la valeur $(AS \sqrt{2})/2$ avec $AS = AXS + AYS$.

On constate donc que l'optimum de ferrailage correspond au point de la bordure $ABCD \dots$ dont la projection sur la première bissectrice est la plus proche de l'origine des axes. La recherche de ce point est effectuée par une méthode de type « dichotomie ».

2.2 Implantation retenue dans Code_Aster

L'implantation retenue est un peu différente afin d'optimiser le temps de calcul. De plus, lors du calcul de la section soumise à la flexion composée, on effectue une vérification de non dépassement de la contrainte béton à l'ELS, et de non dépassement de la déformation du béton à l'ELU.

A l'issue du calcul en flexion composée, on détermine la section globale des aciers (supérieure et inférieure) nécessaire à l'équilibre des forces. On dispose donc d'une série de triplets (AS , AI , θ) représentative de chaque facette (AS représentant la section supérieure, AI la section inférieure et θ l'angle caractéristique de la facette).

On effectue alors l'optimisation du ferrailage pour la section inférieure, puis supérieure à l'aide de l'algorithme original décrit ci-dessous.

Il faut noter que tous les calculs ne concernent que des aciers tendus. Il n'est pas prévu de pouvoir traiter des aciers comprimés.

2.2.1 Diagrammes contrainte-déformation pris en compte

Les caractéristiques de la section sont décrites sur la Figure 2.2.1-a. Le diagramme contrainte-déformation, à droite de la Figure 2.2.1-a est le diagramme rectangulaire simplifié utilisé pour le béton :

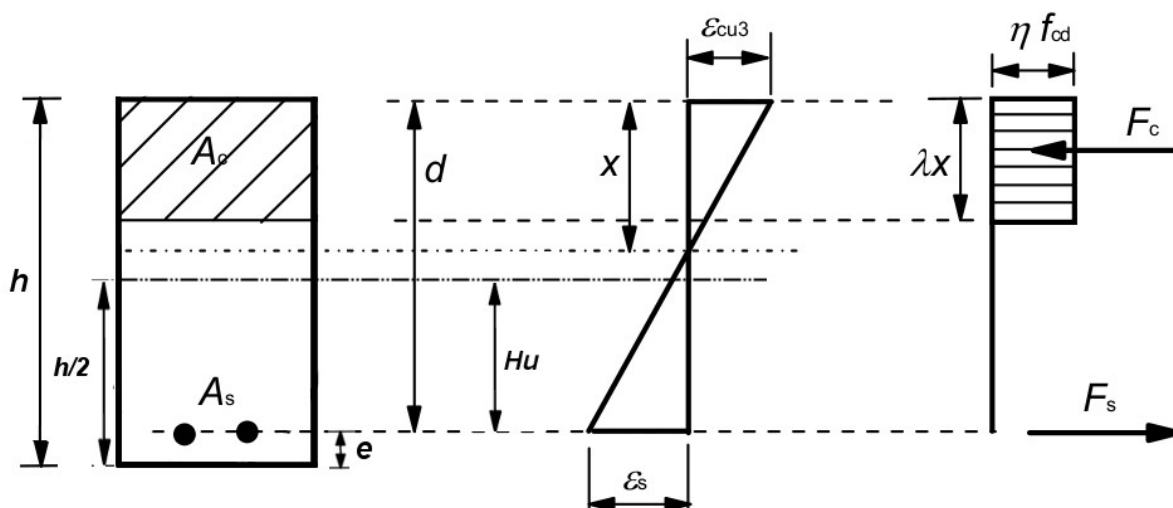
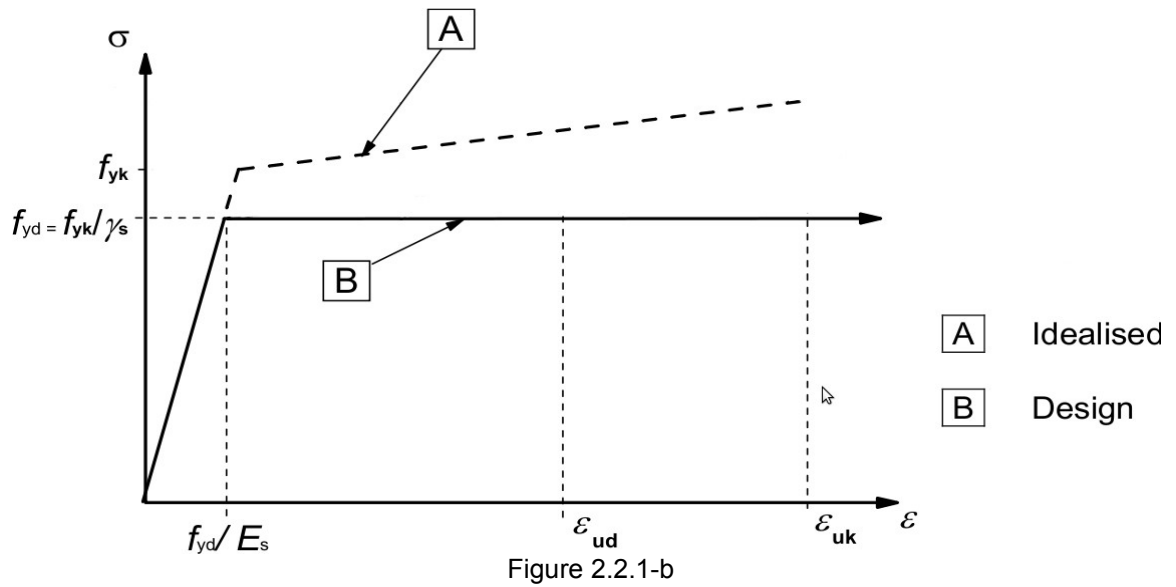


Figure 2.2.1-a

Dans l'implantation actuelle, $\lambda=0.8$ (voir remarque en 2.2.2) et $\eta=1$.

Le diagramme contrainte-déformation utilisé pour l'acier est le diagramme à palier horizontal :



2.2.2 Détermination des efforts à l'ELU

La détermination des efforts conduit à la détermination de FI (effort inférieur) et FS (effort supérieur) à partir de M (moments de flexion) et N (efforts de membrane).

- Pour les efforts de membrane (N), une valeur positive signifie un effort de traction
- Pour les moments de flexion (M), une valeur positive traduit une contrainte de traction en fibre inférieure de l'élément. Cette convention étant inverse de celle utilisée au sein de Code_Aster, une inversion de signe est réalisée en début de calcul.

Le but de cet algorithme est de déterminer l'effort de traction auquel est soumis chaque lit d'acier, afin de déterminer la section des armatures par simple division par la contrainte admissible de l'acier.

On calcule la hauteur significative $H_s = d$ (distance entre l'acier utile et la fibre comprimée) et la hauteur utile $H_u = \frac{h}{2} - e$ (distance séparant une nappe d'acier du milieu de la section de la plaque ou coque).

On évalue ensuite le moment ultime dans la section de béton armé que les aciers doivent reprendre et qui tient compte du moment de flexion et de l'effort de membrane.

Si ce moment est négatif, on se trouve dans la situation d'une section entièrement tendue. Le calcul est alors particulièrement simple, chaque nappe reprenant l'effort de traction qui lui est appliqué. Sinon, on établit la valeur du moment réduit μ_u qui, s'il est supérieur à 0.48 conduit à une impossibilité de calcul (aucun acier tendu). Dans ce cas, la densité d'armature retournée sera égale à -1 pour l'élément.

Remarque :

Cette valeur limite 0.48 correspond au moment réduit frontière entre le pivot B et le pivot C, qui est égale (pour le diagramme rectangulaire simplifié) à :

$$\mu_{BC} = \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)$$

Soit, avec $\lambda = 0.8$ donné dans le BAEL, $\mu_{BC} = 0.48$

Cette valeur reste vraie pour les calculs à l'Eurocode 2 si l'on considère des bétons de classe de résistance inférieure à C50. Pour les bétons de classe supérieure, une légère différence entre les sections données par le module CALC_FERRAILLAGE et celles données par des calculs manuels peut être observée.

On évalue successivement la valeur du coefficient $\alpha = \frac{x}{d}$, la contrainte béton et l'effort global N_G auquel est soumis le lit le plus tendu.

- ➔ Si cet effort est négatif, cela traduit une section entièrement comprimée pour laquelle aucune section d'acier n'est probablement nécessaire. Toutefois, si toutes les facettes sont dans ce cas, on peut se poser la question d'un pivot C. Dans ce cas, la densité d'armature retournée sera égale à -1 pour l'élément.
- ➔ Si cet effort est effectivement positif, on teste alors la valeur de α .
 - Si $\alpha < \alpha_{AB} = \frac{PIV_B}{(PIV_B + PIV_A)}$, on est sur le pivot A. La déformation de l'acier est maximum $\varepsilon_A = PIV_A$ et la section d'acier est égale à $A_s = \frac{N_G}{f_{yd}}$.
 - Si $\alpha \geq \alpha_{AB} = \frac{PIV_B}{(PIV_B + PIV_A)}$, on est sur le pivot B. La déformation du béton est maximum $\varepsilon_B = PIV_B$ et la section d'acier est égale à :
 - x $A_s = \frac{N_G}{f_{yd}}$ si $\varepsilon_A = \frac{PIV_B(1-\alpha)}{\alpha} > \frac{f_{yd}}{E_s}$ soit une déformation plastique de l'acier
 - x ou $A_s = \frac{N_G}{E_s \varepsilon_A}$ si $\varepsilon_A = \frac{PIV_B(1-\alpha)}{\alpha} \leq \frac{f_{yd}}{E_s}$ soit une déformation élastique de l'acier

2.2.3 Détermination des efforts à l'ELS

La détermination des efforts conduit à la détermination de FI (effort inférieur) et FS (effort supérieur) à partir de M (moment de flexion) et N (effort de membrane)

- Pour les efforts de membrane (N), une valeur positive signifie un effort de traction
- Pour les moments de flexion (M), une valeur positive traduit une contrainte de traction en fibre inférieure de l'élément. Cette convention étant inverse de celle utilisée au sein de Code_Aster, une inversion de signe est réalisé en début de calcul.

Le but de cet algorithme est de déterminer l'effort de traction auquel est soumis chaque lit d'acier, afin de déterminer la section des armatures par simple division par la contrainte admissible de l'acier.

On calcule la hauteur significative $H_s = d$ (distance entre l'acier utile et la fibre comprimée) et la hauteur utile $H_u = \frac{h}{2} - e$ (une nappe d'acier du milieu de la section de la plaque ou coque).

On évalue ensuite le moment de service que les aciers doivent reprendre et qui tient compte du moment de flexion et de l'effort de membrane.

Si ce moment est négatif, on se trouve dans la situation d'une section entièrement tendue. Le calcul est alors particulièrement simple, chaque nappe reprenant l'effort de traction qui lui est appliqué.

Sinon, on calcule, à l'aide de la méthode de Newton, la position exacte de la fibre neutre en résolvant une équation du 3^{ème} degré en $\alpha = \frac{x}{d}$. Une fois celle-ci connue, on évalue la valeur de la contrainte

béton et l'effort repris par la section la plus tendue. Si cet effort est négatif, cela traduit une section entièrement comprimée pour laquelle aucune section d'acier n'est nécessaire ; on corrige alors simplement la contrainte de compression du béton. Si cet effort est effectivement positif, on l'attribue à la section effectivement tendue.

Remarque :

En section entièrement comprimée, le centre de gravité de la section homogène est considéré comme confondu avec le centre de gravité de la section béton et donc la contrainte maximale de compression dans le béton est égale à :

$$\sigma_{c,max} = \frac{-N}{A} + \frac{|M|}{I} y$$

Avec $y = \frac{h}{2}$ et $I = \frac{bh^3}{12}$

$$\text{Soit } \sigma_{c,max} = \frac{-N}{bh} + |M| \frac{h}{2} \frac{12}{bh^3} = \frac{-N}{bh} + \frac{6|M|}{bh^2}$$

Un test final est effectué sur la contrainte de compression du béton. Si celle-ci est au delà de la limite admissible, un message d'erreur est affiché et un indicateur positionné.

Les sections d'armature sont finalement établies en divisant l'effort par la contrainte admissible de l'acier.

2.2.4 Détermination du ferrailage transversal

L'article de Capra et Maury propose également un calcul de ferrailage transversal en partie courante de plaque, évalué à partir de la contrainte de cisaillement équivalente qui s'exprime suivant la formule :

$$\tau = \frac{1}{z} \sqrt{(T_{ZX}^2 + T_{ZY}^2)}$$

où z représente le bras de levier du couple élastique de la section et T_{ZX} et T_{ZY} sont les efforts tranchants. La section d'armature transversale est simplement obtenue en divisant cette contrainte par la contrainte limite admissible de l'acier.

Ce calcul n'est à prendre en compte que lors d'un calcul à l'ELU, c'est-à-dire avec des contraintes ELU.

Remarque :

Le bras de levier implanté $z = h - 2e$ est très approximatif et ne correspond pas à la valeur approchée $0.9d$ donnée par l'Eurocode 2 et le BAEL.

De plus, contrairement au calcul à l'Eurocode 2, ce calcul fixe l'inclinaison des bielles de béton comprimé à 45° et suppose que les cadres sont droits ($\alpha = 90^\circ$). La relation tirée de l'Eurocode 2 est la suivante :

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{ed}}{z (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha f_{ywd}}$$

Avec

s l'espacement entre les armatures transversales.

$z = 0.9d$

α l'angle d'inclinaison des cadres, tel que : $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

θ l'angle d'inclinaison des bielles de béton comprimé, tel que : $1 \leq \cot \theta \leq 2.5$

f_{ywd} la limite d'élasticité de calcul des armatures d'effort tranchant

$V_{ed} = \sqrt{(T_{ZX}^2 + T_{ZY}^2)}$ l'effort tranchant moyen pris en compte pour le calcul.

2.2.5 Algorithme d'optimisation de la section d'acier

L'algorithme utilisé vise à rechercher géométriquement l'optimum de ferrailage dans le repère orthonormé comportant AXS en abscisse et AYS en ordonnée.

La discrétisation de la rotation de la facette égale à 5° , conduit à une numérotation de ces facettes de 1 à 36.

Dans le repère orthonormé utilisé, on positionne 3 points, $P0$, $P1$ et $P2$. Les coordonnées du point $P1$ correspondent respectivement à la section d'acier de la facette 18 (correspondant à une valeur nulle de θ) et à la section d'acier de la facette 1 (correspondant à une valeur de θ égale à $-\pi/2$). Le point $P0$ est situé à la même abscisse que $P1$ mais avec une ordonnée très grande (définissant ainsi une verticale pratiquement infinie), et le point $P2$ est situé à la même ordonnée que $P1$ mais avec une abscisse très grande (définissant ainsi une horizontale pratiquement infinie).

On effectue alors une boucle sur toutes les facettes de $-\pi/2$ à $+\pi/2$ en excluant la première ainsi que la facette correspondant à la valeur nulle de θ , facettes qui ont été implicitement traitées lors de la définition des points initiaux.

On détermine alors les points d'intersection de la facette de référence avec les autres segments. Dans chaque cas, une comparaison de la position du point représentatif de la facette traitée par rapport au domaine de validité de la facette de référence permet de déterminer l'orientation du segment à prendre en compte pour la recherche des intersections.

A l'issue de ce traitement, on dispose des points représentatifs de la polyligne définissant le domaine de validité global.

En fin de traitement, on effectue un balayage sur les points retenus, afin de déterminer celui dont la somme des coordonnées est minimum (somme des armatures minimum). En cas d'identité (à 10^{-5} près en relatif), la facette de plus petit numéro est retenue.

2.2.6 Récapitulatif des causes d'arrêt du calcul

2.2.6.1 Alarmes lors du calcul à l'ELU

Le calcul à l'ELU peut émettre une alarme si la section est comprimée :

- Si le moment réduit M_u est supérieur à 0.48 (la section se situe donc au pivot C qui n'est pas traité par le module) sur une facette. On retourne une densité de -1 dans ce cas.
- Si toutes les facettes ont des aciers comprimés même la section n'est pas totalement comprimée. On retourne une densité de -1 pour l'élément dans ce cas.
- Si une ou plusieurs facettes ont des aciers comprimés même la section n'est pas totalement comprimée. On met la densité à 0 sur la facette et le calcul continu sur les autres facettes. La densité sur l'élément est donc non nulle.

2.2.6.2 Erreurs lors du calcul à l'ELS

Le calcul à l'ELS peut se terminer en erreur si :

La contrainte de compression du béton est supérieure à sa valeur admissible.

2.2.6.3 Erreurs lors du calcul du ferrailage transversal

Le calcul des armatures transversales peut se terminer en erreur si :

Le bras de levier pris en compte dans le calcul de la contrainte de cisaillement est nul ou négatif (problème de la valeur de l'enrobage).

3 Implantation dans Code_Aster

L'opérateur `CALC_FERRAILAGE` [U4.81.42] permet de déterminer le ferrailage d'un élément ou d'un ensemble d'éléments de plaques et coques de type `DKT`.

Sa mise en œuvre est illustrée par les cas-tests `SSLS134` [V3.03.134] et `SSLS135` [V3.03.135].

4 Références bibliographiques

- [1] Calcul automatique du ferrailage optimal des plaques et coques en béton armé. Alain CAPRA et Jean-Francis MAURY Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des travaux publics, n°367, 12/1978.

5 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) / Organisme(s)	Description des modifications
10	P. LANG (INGEROP IES)	Texte initial