

## Comportement viscoplastique avec endommagement de HAYHURST

---

### Résumé :

Le modèle visco-plastique couplé à l'endommagement isotrope dit de Hayhurst est particulièrement adapté pour réaliser des calculs de structures en fluage. La partie viscoplastique du modèle a été proposée par Hayhurst et al dans [bib1] tandis que la loi d'endommagement a été proposée par Charles Pétry dans [bib2]. Ce modèle permet une prédiction satisfaisante de la chute de ductilité en fluage via l'application de critères limites sur la déformation et sur l'endommagement. Ce modèle a pour l'instant été principalement utilisé à EDF R&D/MMC pour des prédictions de durée de vie en fluage sur l'acier de grade 92. Via l'identification de paramètres spécifiques et la réalisation de calculs de structure, ce modèle permet également de prédire de façon satisfaisante le comportement en fluage et la durée de vie de jonctions soudées [bib3].

Ce modèle est implanté dans *Code\_Aster* sous le nom de `HAYHURST` ; les équations en vitesse sont intégrées numériquement par un schéma explicite de Runge-Kutta d'ordre 2 avec découpage automatique en sous-pas locaux en fonction d'une estimation de l'erreur d'intégration (méthode de Runge-Kutta emboîtée, confer [R5.03.14]) ou par une méthode d'intégration implicite de Newton.

Le test SSNV225 valide l'intégration de ce modèle et est présenté dans le document de validation [V6.04.225] qui fournit également des références expérimentales en rapport avec le cas test.

## Table des Matières

---

1 Introduction.....	3
2 Formulation du modèle.....	3
2.1 Cadre théorique.....	3
2.2 Équations du modèle.....	4
3 Paramètres de la loi.....	5
4 Implantation dans Code_Aster.....	6
4.1 Intégration explicite.....	6
4.2 Intégration implicite.....	6
5 Signification des variables internes.....	8
6 Bibliographie.....	9
7 Description des versions du document.....	9

## 1 Introduction

Les applications du secteur thermique à flamme et certaines technologies nucléaires (GENIV, AGR) nécessitent de pouvoir prédire le comportement de matériaux en fluage à la fois en terme de déformation viscoplastique mais également en terme d'endommagement de fluage [bib1].

D'autre part, d'un point de vue « matériau », Les mécanismes de fluage doivent être pris en compte de la façon la plus physique possible pour que la loi de comportement soit valide à la fois dans le domaine du fluage-dislocation (contraintes élevées) et dans le domaine du fluage-diffusion (contraintes faibles). Dans le domaine de plus faibles contraintes, on observe généralement une chute de ductilité pour les aciers marténistiques revenus contenant entre 9 et 12% de chrome. Cette chute de ductilité peut se modéliser via une variable d'endommagement isotrope provoquant la rupture du matériau avant que des déformations plastiques significatives n'aient eu le temps de se développer. Dans ces situations, les critères en déformation maximale ne peuvent pas s'appliquer, tout comme les lois d'évolution d'endommagement fortement liées à la déformation comme la loi de LEMAITRE.

Plus généralement, des cavités de fluage apparaissent dans de nombreuses familles de matériaux métalliques et peuvent s'observer sur site en effectuant des répliques extractives à la surface des composants investigués. Ces cavités, associées à une réduction de la surface effective résistant aux efforts dans le matériau, peuvent être directement corrélées à un endommagement de type Kachanov.

En réponse à ces nécessités de modélisation, tout en restant dans un cadre mécanique phénoménologique simple, une loi de comportement de type Hayhurst (en référence à son écoulement viscoplastique) a été proposée dans [bib2] et appliquée à des calculs de fluage sur un acier P92 couramment utilisé dans les composants modernes de centrales thermiques à flamme.

Ce modèle, implémenté dans *Code\_Aster*, est un modèle de comportement viscoplastique à double écrouissage isotrope, viscosité en loi sinus hyperbolique et couplé à un endommagement de Kachanov.

On notera que les lois HAYHURST et VENDOCHAB sont toutes deux des lois viscoplastiques à endommagement isotrope, cependant la loi de HAYHURST possède ses avantages propres détaillés dans la suite de ce document.

### Nota Bene :

*On trouvera dans la référence [bib3] l'application de ce modèle à des calculs sur joints soudés en acier P92, et dans la référence [bib4] des travaux préliminaires à l'extension de ce modèle pour prendre en compte l'interaction de type fatigue-fluage sur ce même matériau.*

## 2 Formulation du modèle

### 2.1 Cadre théorique

Dans la formulation initiale proposée dans [bib1], deux variables d'endommagement distinctes possédant chacune une cinétique propre sont proposées. Une variable  $\phi$  est notamment associée aux évolutions de la microstructure dépendant uniquement du temps (i.e. vieillissement statique du matériau), alors que la variable  $\omega$  décrit les mécanismes de cavitation se développant sous l'influence combinée de la déformation viscoplastique et de la triaxialité des contraintes.

Dans la modélisation retenue dans *Code\_Aster*, la variable  $\phi$  est conservée. En pratique, son identification est délicate, et il est possible de ne pas faire intervenir le vieillissement microstructural en mettant à zéro le coefficient  $k_c$  (cf. équations en section 2.2). Par ailleurs, la variable  $\omega$  est renommée  $D$  car sa loi d'évolution est différente de celle proposée par Hayhurst (cf. [bib1]) : la loi est ici en sinus hyperbolique. Les avantages de cette formulation sont détaillés dans [bib2].

## 2.2 Équations du modèle

Les équations du modèles s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{élasticité :} \\ \sigma = (I - D) C \varepsilon^e \text{ et } \varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^{th} - \varepsilon^p \\ \\ \text{viscoplasticité :} \\ \dot{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}} \text{ avec } \dot{p} = \varepsilon_0 \sinh \left( \frac{\sigma_{eq}(I-H)}{K(I-D)(I-\phi)} \right) \\ \dot{\phi} = \frac{k_c}{3} (I-\phi)^4 \\ \\ \text{écrouissage :} \\ H = H_1 + H_2 \\ \dot{H}_i = \frac{h_i}{\sigma_{eq}} (H_i^* - \delta_i H_i) \dot{p} \text{ pour } i = 1, 2 \\ \\ \text{endommagement :} \\ \text{si } \alpha_\sigma = 0 \quad \dot{D} = A_0 \sinh \left( \frac{\alpha_D <\sigma_I>_+ + \sigma_{eq}(I-\alpha_D)}{\sigma_0} \right) \\ \text{si } \alpha_\sigma = 1 \quad \dot{D} = A_0 \sinh \left( \frac{\alpha_D <tr(\sigma)>_+ + \sigma_{eq}(I-\alpha_D)}{\sigma_0} \right) \end{array} \right.$$

où :

$\varepsilon$  ,  $\varepsilon^e$  ,  $\varepsilon^{th}$  et  $\varepsilon^p$  sont respectivement les déformations totale, élastique, thermique et plastique,  
 $<x>_+$  est la partie positive de  $x$  ,  
 $\sigma_1$  est la contrainte principale maximale,  
 $\tilde{\sigma} = \sigma - \frac{1}{3} Tr(\sigma) I$  est la partie déviatorique du tenseur des contraintes,  
 $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\sigma}_{ij}}$  est la contrainte déviatorique de Von-Mises,  
 $C$  est le tenseur de rigidité élastique,  
 $p$  est la déformation plastique cumulée,  
 $H$  ,  $H_1$  ,  $H_2$  sont les variables d'écrouissage isotrope viscoplastique,  
 $D$  est la variable scalaire d'endommagement isotrope,  
 $\phi$  est la variable scalaire d'endommagement microstructural,  
 $\alpha_\sigma$  est le paramètre permettant de choisir de calculer l'endommagement par rapport à  $(\sigma_{eq}, \sigma_1)$  pour  $\alpha_\sigma = 0$  ou  $(\sigma_{eq}, Tr(\sigma))$  pour  $\alpha_\sigma = 1$  ,  
 $\alpha_D$  est le paramètre permettant d'ajuster la sensibilité à la triaxialité ( $\alpha_D = 1$ ) ou la sensibilité à la contrainte principale maximale ( $\alpha_D = 0$ ) pour le calcul de l'endommagement,  
 $\delta_i$  vaut 0 ou 1 selon que l'on souhaite un écrouissage isotrope linéaire ou non-linéaire, respectivement.

**Nota Bene :**

Les paramètres du modèle  $K, \varepsilon_0, \sigma_0, h_1, h_2, A_0, \alpha_D$ , et  $k_c$  peuvent être des fonctions de la température (en  $^{\circ}C$ ). Dans [bib2], les paramètres identifiés varient en fonction de la température suivant une loi d'Arrhénius.

## Remarque :

Le système d'équations précédent peut être réduit : en effet, celles qui sont relatives à l'évolution de l'écrouissage s'intègrent de la façon suivante :

$$H_i = \frac{H_i^*}{\delta_i} \left[ 1 - \exp \left( \frac{-h_i \delta_i}{\sigma_{eq}} p \right) \right]$$

et l'équation relative à l'endommagement micro-structural revient à :

$$\phi = 1 - \frac{1}{(1 + k_c t)^{1/3}}$$

C'est cette expression qui sera utilisée dans la suite du document.

## 3 Paramètres de la loi

Les paramètres matériau requis pour l'utilisation du modèle dans Code\_Aster via la commande `DEFI_MATERIAU` (cf. doc U4.43.01) sont les suivants :

ASTER	Symbole	Définition
EPS0	$\varepsilon_0$	Paramètre agissant sur la cinétique de déformation viscoplastique
K	$K$	Paramètre régissant le comportement en sinus hyperbolique de la loi viscoplastique
H1	$h_1$	Module d'écrouissage
H2	$h_2$	Module d'écrouissage
DELTA1	$\delta_1$	Choix du type d'écrouissage
DELTA2	$\delta_2$	Choix du type d'écrouissage
H1ST	$H_1^*$	Valeur à saturation de l'écrouissage, dans le cas non-linéaire
H2ST	$H_2^*$	Valeur à saturation de l'écrouissage, dans le cas non-linéaire
BIGA	$A_0$	Paramètre agissant sur la cinétique d'endommagement
SIG0	$\sigma_0$	Paramètre régissant le comportement en sinus hyperbolique de la loi d'endommagement
ALPHAD	$\alpha_D$	Coefficient jouant sur la contrainte effective pour le calcul de l'endommagement
KC	$k_c$	Paramètre régissant la cinétique d'endommagement microstructural
S_EQUI_D	$\alpha_{\sigma}$	Choix de contrainte hydrostatique ou principale maximale

Les paramètres  $\alpha_D$ ,  $k_c$ , et  $\alpha_{\sigma}$  sont optionnels et ont des valeurs nulles par défaut.

L'identification des coefficients de la partie viscoplastique du modèle est réalisée à partir d'essais de fluage à différents niveaux de contrainte.

Une fois cette identification réalisée, les coefficients pilotant l'endommagement peuvent être identifiés à partir d'essais de fluage longs à faible contrainte pour lesquels une chute de ductilité est observée (chute des déformations à rupture).

Un exemple type d'identification est détaillé dans [bib2].

## 4 Implantation dans Code\_Aster

L'utilisation du modèle HAYHURST est possible en modélisations 3D, axisymétrique, et déformation plane ( 3D , AXIS , D\_PLAN , respectivement)

Les modèles de déformation possibles sont PETIT , PETIT\_REAC , GDEF\_HYPO\_ELAS , GDEF\_LOG .

L'algorithme utilisé est du type global-local. Les itérations globales utilisent la matrice de rigidité élastique calculée à partir de la matrice de Hooke endommagée :  $\underline{\underline{D}} = (1 - D) \underline{\underline{D}}^0$

### 4.1 Intégration explicite

Au niveau des itérations locales (c'est-à-dire en chaque point de GAUSS), l'intégration numérique des équations en vitesse est effectuée par un schéma explicite de Runge-Kutta d'ordre 2 avec découpage automatique en sous-pas locaux en fonction d'une estimation de l'erreur d'intégration (méthode de Runge-Kutta emboîtée) (cf. [R5.03.14]). Le test SSNV225A illustre cette méthode.

### 4.2 Intégration implicite

Pour l'intégration implicite, on emploiera les notations suivantes :

$A^-$  ,  $A$  et  $\Delta A$  représentent respectivement les valeurs d'une quantité au début et à la fin du pas de temps considéré ainsi que son incrément durant le pas. Le système est discrétisé suivant une thêta-méthode :  $\Delta A = \Delta t g(A^- + \theta \Delta A) = \Delta t g(A^0)$   $0 < \theta \leq 1$

Le problème discrétisé à résoudre est alors le suivant : connaissant l'état au temps  $t^-$  ainsi que les incréments de déformation  $\Delta \varepsilon$  (issus de la phase de prédiction , cf. [R5.03.01]) et de température  $\Delta T$  , déterminer l'état des variables internes au temps  $t$  ainsi que les contraintes  $\sigma$  .

Pour bien prendre en compte la variation des paramètres d'élasticité avec la température, il est nécessaire de discrétiser (de façon implicite) la relation contrainte-déformation élastique de la façon suivante (voir par exemple [R5.03.02]) :

$$C^{-1} \sigma = \frac{(1-D)}{(1-D^-)} (C^-)^{-1} \sigma^- + (1-D) (\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon^{th}) - (1-D) \Delta \varepsilon^p \quad \text{avec} \quad \Delta \varepsilon^p = \Delta p \frac{3}{2} \frac{\tilde{\sigma}^\theta}{\sigma_{eq}^\theta} = \Delta p n$$

Pour simplifier les expressions et diminuer le nombre d'opérations lors de la résolution, il est aussi possible d'écrire la première équation en fonction de la déformation élastique ; cela suppose de stocker les déformations élastiques ou plastiques comme variables internes. On obtient alors :

$$\Delta \varepsilon^e - (\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon^{th}) + \Delta p n^\theta = 0 \quad \text{avec} \quad n^\theta = \frac{3}{2} \frac{\tilde{\sigma}^\theta}{\sigma_{eq}^\theta} \quad ($$

$F_e)$

et les contraintes se calculent ensuite à l'aide des déformations plastiques au temps  $t^-$  par :

$$\sigma = (1-D) \sigma^{nd} = (1-D) C \varepsilon^e = (1-D) C ((\varepsilon)^- - (\varepsilon^{th})^- - (\varepsilon^p)^- + \theta \Delta \varepsilon^e)$$

Les équations suivantes se déduisent des expressions des dérivées des variables internes :

$$\Delta p - \Delta t \varepsilon_0 \sinh \left( \frac{\sigma_{eq}^\theta (1 - H_1^\theta - H_2^\theta)}{K(1 - D^\theta)(1 - \phi)} \right) = 0 \quad (F_p)$$

$$\Delta H_i - \frac{h_i}{\sigma_{eq}} (H_i^* - \delta_i (H_i + \theta \Delta H_i)) \Delta p = 0, \quad \text{pour } i=1,2 \quad (F_{H_i})$$

$$\Delta D - \Delta t A_0 \sinh \left( \frac{\alpha_D < \sigma_p^\theta > + \sigma_{eq}^\theta (1 - \alpha_D)}{\sigma_0} \right) = 0 \quad \text{avec } \sigma_p^\theta = \max_I \sigma_I^\theta \text{ ou } tr(\sigma^\theta) \quad (F_D)$$

On peut formellement écrire ce système :  $F(\Delta Y) = 0$ , avec  $\Delta Y = (\Delta \varepsilon^e, \Delta p, \Delta H_1, \Delta H_2, \Delta D)^t$   
et  $F(\Delta Y) = (F_e, F_p, F_{H_1}, F_{H_2}, F_D)^t$

Ce système non-linéaire est résolu par la méthode itérative de Newton [R5.03.14] :

$$F(\Delta Y_k) + \left( \frac{\partial F}{\partial \Delta Y} \right)_k (\Delta Y_{k+1} - \Delta Y_k) \quad \text{en itérant en } k \text{ jusqu'à convergence.}$$

La matrice jacobienne du système, nécessaire à la résolution par la méthode de Newton, peut être calculée soit numériquement (ALGO\_INTE='NEWTON\_PERT', cf. test SSV225B), soit analytiquement.

Dans ce dernier cas l'expression des dérivées est :

$$\left( \frac{\partial F_e}{\partial \Delta \varepsilon^e} \right) = I_d + \Delta p \frac{\partial n^\theta}{\partial \Delta \varepsilon^e} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial n^\theta}{\partial \Delta \varepsilon^e} = 2 \mu \theta \frac{(1 - D^\theta)}{\sigma_{eq}} [I_{dev} - n \otimes n] \quad \text{et} \quad I_{dev} = \frac{3}{2} (I_4 - \frac{1}{3} I_2 \otimes I_2)$$

$$\left( \frac{\partial F_e}{\partial \Delta p} \right) = n^\theta \quad \left( \frac{\partial F_e}{\partial \Delta D} \right) = 0$$

$$\left( \frac{\partial F_p}{\partial \Delta \varepsilon^e} \right) = -\Delta t \varepsilon_0 \cosh \left( \frac{\sigma_{eq}^\theta (1 - H_1^\theta - H_2^\theta)}{K(1 - D^\theta)(1 - \phi)} \right) \frac{(1 - H_1^\theta - H_2^\theta)}{K(1 - D^\theta)(1 - \phi)} \frac{\partial \sigma_{eq}^\theta}{\partial \Delta \varepsilon^e}$$

$$\left( \frac{\partial F_p}{\partial \Delta p} \right) = 1$$

$$\left( \frac{\partial F_p}{\partial \Delta H_i} \right) = \Delta t \varepsilon_0 \cosh \left( \frac{\sigma_{eq}^\theta (1 - H_1^\theta - H_2^\theta)}{K(1 - D^\theta)(1 - \phi)} \right) \theta \frac{\sigma_{eq}^{nd}}{K(1 - \phi)}$$

$$\left( \frac{\partial F_p}{\partial \Delta D} \right) = 0 \quad \text{car : } \frac{\sigma^\theta}{1 - D^\theta} = \sigma^{nd} \text{ est indépendant de } \Delta D$$

$$\left( \frac{\partial F_{H_i}}{\partial \Delta \varepsilon^e} \right) = \frac{h_i}{\sigma_{eq}^2} \Delta p (H_i^* - \delta_i H_i^\theta) \frac{\partial \sigma_{eq}^\theta}{\partial \Delta \varepsilon^e}$$

$$\left( \frac{\partial F_{H_i}}{\partial \Delta p} \right) = -\frac{h_i}{\sigma_{eq}} (H_i^* - \delta_i H_i^\theta)$$

$$\left( \frac{\partial F_{H_i}}{\partial \Delta H_i} \right) = 1 + \frac{h_i}{\sigma_{eq}} \delta_i \theta \Delta p$$

$$\left( \frac{\partial F_{H_i}}{\partial \Delta D} \right) = \frac{-h_i}{\sigma_{eq}^2} \Delta p (H_i^* - \delta_i H_i^\theta) \theta \sigma_{eq}^{nd}$$

$$\left( \frac{\partial F_D}{\partial \Delta \epsilon^e} \right) = -\Delta t \frac{A_0}{\sigma_0} \cosh \left( \frac{\alpha_D \langle \sigma_p^\theta \rangle_+ + \sigma_{eq}^\theta (1 - \alpha_D)}{\sigma_0} \right) \left( \alpha_D \frac{\partial \langle \sigma_p^\theta \rangle_+}{\partial \Delta \epsilon^e} + (1 - \alpha_D) \frac{\partial \sigma_{eq}^\theta}{\partial \Delta \epsilon^e} \right)$$

$$\left( \frac{\partial F_D}{\partial \Delta D} \right) = 1 + \frac{\Delta t A_0 \theta}{\sigma_0} \cosh \left( \frac{\alpha_D \langle \sigma_p^\theta \rangle_+ + \sigma_{eq}^\theta (1 - \alpha_D)}{\sigma_{nd}} \right) \left[ \alpha_D \langle \sigma_p^0 \rangle_+ + (1 - \alpha_D) \sigma_{eq}^{nd} \right]$$

avec :  $\frac{\partial \sigma_{eq}^\theta}{\partial \Delta \epsilon^e} = 2 \mu \theta (1 - D^\theta) \mathbf{n}^\theta$

et

$$\frac{\partial \langle tr \sigma^\theta \rangle}{\partial \Delta \epsilon^e} = \frac{\langle tr \sigma^\theta \rangle}{tr \sigma^\theta} (3\lambda + 2\mu) \theta (1 - D^\theta) \mathbf{I}_d \quad \text{dans le cas où } \sigma_p^\theta = tr(\sigma^\theta)$$

$$\frac{\partial \langle \sigma_1^\theta \rangle}{\partial \Delta \epsilon^e} = \frac{\langle \sigma_1^\theta \rangle}{\sigma_1^\theta} \mathbf{I}_H \quad \text{dans le repère principal, dans le cas où } \sigma_p^\theta = \sigma_1 = \max_I \sigma_I^\theta$$

avec  $\mathbf{I}_H = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

## 5 Signification des variables internes

Les variables internes du modèle aux points de Gauss (mot-clé VARI\_ELGA) sont accessibles par :

- 1)  $V1 = \epsilon_{vp}^{11}$
- 2)  $V2 = \epsilon_{vp}^{22}$
- 3)  $V3 = \epsilon_{vp}^{33}$
- 4)  $V4 = \epsilon_{vp}^{12}$
- 5)  $V5 = \epsilon_{vp}^{13}$
- 6)  $V6 = \epsilon_{vp}^{23}$
- 7)  $V7 = p$ , la déformation plastique cumulée
- 8)  $V8 = H_1$  la première variable d'écrouissage isotrope viscoplastique
- 9)  $V9 = H_2$ , la deuxième variable d'écrouissage isotrope viscoplastique
- 10)  $V10 = \phi$ , la variable d'endommagement microstructural
- 11)  $V11 = D$ , la variable d'endommagement
- 12)  $V12 = 0$ , variable interne non utilisée en explicite, indicateur de plasticité en implicite.



## 6 Bibliographie

1. MUSTATA , R. & HAYHURST , D. « Creep constitutive equations for a 0.5Cr 0.5 Mo 0.25V ferritic steel in the temperature range 565°C-675°C », *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, **2005** , 82 , 363-372
2. PETRY , C. « Comportement en fluage de l'acier P92 : caractérisation expérimentale et modélisation », Note H-T24-2009-00594-FR.
3. PETRY , C. « Comportement en fluage des jonctions soudées de l'acier P92 : caractérisation expérimentale et modélisation », Note H-T24-2010-00225-FR
4. LATOURTE, F. "Étude du comportement mécanique de l'acier grade 92 : résultats d'essais de caractérisation de l'interaction fatigue-fluage et premières tentatives de modélisation", Note H-T24-2011-02094-FR

## 7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
11.2	F. LATOURTE EDF R&D/MMC	Texte initial
11.4	J.M.PROIX EDF R&D/AMA	Ajout de l'intégration implicite