Modélisation linéaire des éléments de milieu continu en thermique

Résumé :

On décrit l'expression des termes élémentaires intervenant dans la modélisation linéaire de l'équation de la chaleur et dans les post-traitements. On donne l'expression mathématique de l'intégrale à évaluer, et pour chaque élément on fournit le nombre de points d'intégration utilisés.

Table des Matières

1 Les options de modélisation linéaire

Dans ce document, on ne considère que la modélisation linéaire du phénomène physique d'évolution de la température dans un milieu continu. Tous les coefficients intervenant dans l'équation de la chaleur seront des constantes ou bien des fonctions pouvant dépendre du temps ou de l'espace. Les conditions aux limites ne pourront être que des fonctions linéaires de la température.

Par défaut le matériau est supposé isotrope, la loi de Fourier reliant le flux de chaleur au gradient de température fait intervenir un coefficient scalaire λ la conductivité thermique :

$$q=-\lambda\nabla T$$

Dans le cas général, milieu quelconque, cette relation s'exprime avec un tenseur de conductivité thermique. La matrice associée étant définie positive, il est toujours possible de se ramener à une matrice diagonale dans le repère associée aux directions propres. Le traitement de l'anisotropie thermique (voir [bib 1] s'effectue donc dans *Code_Aster* en fournissant les valeurs de la conductivité thermique pour chaque direction principale et le repère propre. L'évaluation des termes élémentaires s'effectue alors en récupérant les différents coefficients et en changeant de repère. Deux types d'anisotropie sont traitées dans *Code_Aster* , il s'agit :

- de l'anisotropie cartésienne où les directions privilégiées restent fixes dans un repère cartésien, la donnée des trois angles nautiques α , β et γ permet de passer du repère global au repère principal d'anisotropie,
- de l'anisotropie cylindrique où les directions privilégiées restent fixes dans un repère cylindrique, la donnée des deux angles nautiques α et β définissant la direction de l'axe et des trois coordonnées d'un point de cet axe permet de passer du repère global au repère principal d'anisotropie.

La formulation variationnelle de l'équation linéaire de la chaleur (cf [R5.02.01]) conduit à l'évaluation d'un certain nombre d'expressions sous forme d'intégrales qui constituent finalement un système matriciel. La matrice et le second membre sont construits à partir de différentes briques : les options de calcul qui regroupent une ou plusieurs intégrales. Les options décrites ici sont communes à l'ensemble des éléments finis isoparamétriques. Leur évaluation dépend du type d'élément : degré des fonctions de forme, nombre et famille de points d'intégration utilisés.

On pourra se reporter aux documents [U3.23.01], [U3.23.02] et [U3.24.01] concernant les différentes modélisations (type de maille supportant les éléments finis).

2 Expression des termes élémentaires pour les différentes options de calcul

2.1 Notations générales

Nous désignons par :

Ω	un ouvert de $\Re^3$ ou de $\Re^2$ de frontière Γ ,
t	la variable représentant le temps,
Δt	le pas de temps utilisé,
r	la variable d'espace,
T	la température (inconnue du problème),
T^n	la température à l'instant précédent (connue),
T^*	la fonction test,
ρ	la masse volumique,
C_p	la chaleur massique à pression constante,
$c_p=\rho C_p$	la capacité calorifique à pression constante par unité de volume,
θ	le paramètre de la θ -méthode pour l'analyse thermique transitoire.

2.2 Termes élémentaires apportant une contribution

2.2.1 Rigidité thermique

Terme faisant intervenir les gradients de températures et le coefficient de conduction λ dans le cas des milieux isotropes (dénomination utilisée par analogie au terme de rigidité intervenant dans l'équation de la modélisation du phénomène mécanique de l'élasticité). Le coefficient λ peut dépendre du temps.

- expression mathématique : $\int_\Omega \theta \lambda(t) \nabla T . \nabla T^* d\,\Omega$,
  lorsque le milieu est anisotrope, l'évaluation du flux $\lambda(t)\nabla T$ est effectuée dans le repère principal d'anisotropie après un premier changement de repère (le tenseur de conductivité thermique y est diagonal) puis par un changement repère inverse, on revient dans le repère global,
- dénomination de l'option dans les catalogues : `RIGI_THER`,
- nombre de points d'intégration utilisés : (première famille de points d'intégration cf. [R3.01.01]).

maille support	nombre de nœuds	nombre de points
triangle	3	1
	6	3
quadrangle	4	4
	8 ou 9	9
tétraèdre	4	4
	10	15
pentaèdre	6	6
	15	21
hexaèdre	8	8
	20	27
	27	27

Tableau 2.2.1-1

2.2.2 Masse thermique

Terme faisant intervenir le coefficient de capacité calorifique à pression constante $c_p = \rho C_p$ (dénomination utilisée par analogie au terme de masse intervenant dans l'équation de la modélisation des équations de la dynamique). Le coefficient C_p peut dépendre du temps.

- expression mathématique : $\int_\Omega \frac{1}{\Delta t} \rho C_p(t) T . T^* d\Omega$
- dénomination de l'option dans les catalogues : `MASS_THER`
- nombre de points d'intégration utilisés : (deuxième famille de points d'intégration)

maille support	nombre de noeuds	nombre de points
triangle	3	3
	6	6
quadrangle	4	4
	8 ou 9	9
tétraèdre	4	4
	10	15
pentaèdre	6	6
	15	21
hexaèdre	8	8
	20	27
	27	27

Tableau 2.2.2-1

2.2.3 Rigidité due aux conditions aux limites d'échange

Terme faisant intervenir le coefficient d'échange h ayant pour origine une condition aux limites modélisant les échanges convectifs avec le bord du domaine. Le coefficient h peut dépendre du temps et de l'espace.

- expression mathématique : $\int_G \theta h(r,t) T . T^* dG$
- dénomination de l'option dans les catalogues : `RIGI_THER_COEF_R` ou `RIGI_THER_COEF_F`
- nombre de points d'intégration utilisés :

maille support	nombre de nœuds	nombre de points
segment	2	4
	3	4
triangle	3	3
	6	4
quadrangle	4	4
	8 ou 9	9

Tableau 2.2.3-1

2.2.4 Rigidité due aux conditions d'échange entre parois

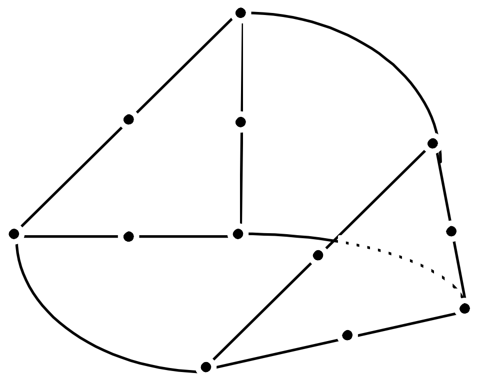
Terme dû à la condition aux limites de type Neumann mettant en jeu deux sous parties de la frontière en vis à vis et faisant intervenir un unique coefficient d'échange h. Ce type de condition aux limites crée de nouvelles relations entre les degrés de liberté de la frontière.

Dans ce cas, on utilise un élément fini particulier dont la maille support est obtenue en associant deux mailles de bord ou de face identiques, les fonctions de forme utilisées et les points d'intégration sont ceux de la maille de départ.

En tridimensionnel, les mailles support des éléments de face sont du type TRIA3-TRIA3, QUAD4-QUAD4, TRIA6-TRIA6, QUAD8-QUAD8 ou QUAD9-QUAD9.

En bidimensionnel, elles sont du type SEG2-SEG2 ou SEG3-SEG3.

On pourra se reporter à [U4.25.02 § 3.1.3] pour la description de l'algorithme de recherche de mailles en vis à vis.



- expression mathématique :

$$\int_{\Gamma_1} (h(r,t+\Delta t)\theta(T_2-T_1)).T^* d\Gamma_1 \text{ et } \int_{\Gamma_2} (h(r,t+\Delta t)\theta(T_1-T_2)).T^* d\Gamma_2$$

où Γ_1 et Γ_2 sont deux sous parties de la frontière en vis à vis.

- dénomination de l'option dans les catalogues : `RIGI_THER_PARO_R` ou `RIGI_THER_PARO_F`
- nombre de points d'intégration utilisés : cf [Tableau 2.2.3-1].

2.3 Termes élémentaires apportant une contribution au second membre

2.3.1 Discrétisation en temps

Terme dû :

- à la discrétisation de la dérivée en temps faisant intervenir une partie du terme de masse avec le coefficient de capacité calorifique ρC_p ,
- à la θ-méthodefaisant intervenir une partie de la rigidité dans le second membre avec le coefficient de conduction λ ,

- expression mathématique dans le cas des milieux isotropes :
$$\int_\Omega \frac{1}{\Delta t}\rho C_p T^n.T^* d\Omega - \int_\Omega (1-q)\lambda \nabla T^n.\nabla T^* d\Omega$$
lorsque le milieu est anisotrope, l'évaluation du flux $\lambda(t)\nabla T$ est effectuée dans le repère principal d'anisotropie après un premier changement de repère (le tenseur de conductivité thermique y est diagonal) puis par un changement repère inverse, on revient dans le repère global,
- dénomination de l'option dans les catalogues : `CHAR_THER_EVOL`,
- nombre de points d'intégration utilisés : cf [Tableau 2.2.2-1].

2.3.2 Terme de source volumique

Terme dû à la source volumique de chaleur.

- expression mathématique : $\int_\Omega (\theta s(r,t+\Delta t)+(1-q)s(r,t)).T^* d\Omega$,

- dénomination de l'option dans les catalogues : `CHAR_THER_SOUR_R` ou `CHAR_THER_SOUR_F`,
- nombre de points d'intégration utilisés : cf [Tableau 2.2.1-1].

2.3.3 Terme d'échange convectif

Terme dû à la condition aux limites d'échange convectif faisant intervenir le coefficient d'échange h et la température du milieu "extérieur" T_{ex} .

- expression mathématique :

$$\int_{\Gamma}(\theta h(r,t+\Delta t)T_{ex}(r,t+\Delta t)+(1-\theta)h(r,t)(T_{ex}(r,t)-T^{n})).T^{*}d\Gamma$$

- dénomination de l'option dans les catalogues : `CHAR_THER_R` ou `CHAR_THER_F`,
- nombre de points d'intégration utilisés : cf [Tableau 2.2.3-1].

2.3.4 Terme de flux normal imposé

Terme dû à la condition aux limites de flux imposé selon la normale à la frontière, faisant intervenir une fonction pouvant dépendre des variables r et t .

- expression mathématique : $\int_{\Gamma}(\theta f(r,t+\Delta t)+(1-\theta)f(r,t)).T^{*}d\Gamma$,
- dénomination de l'option dans les catalogues : `CHAR_THER_FLUN_R` ou `CHAR_THER_FLUN_F`,
- nombre de points d'intégration utilisés : cf [Tableau 2.2.3-1].

2.3.5 Terme d'échange entre parois

Terme dû à la condition aux limites de type Neumann mettant en jeu deux sous parties de la frontière en vis à vis et faisant intervenir un unique coefficient d'échange h.

- expression mathématique :

$$\int_{\Gamma_1}(h(r,t)(1-\theta)(T_2^n-T_1^n)).T^{*}d\Gamma_1 \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_2}(h(r,t)(1-\theta)(T_1^n-T_2^n)).T^{*}d\Gamma_2$$

  où Γ_1 et Γ_2 sont deux sous parties de la frontière en vis à vis
- dénomination de l'option dans les catalogues : `CHAR_THER_PARO_R` ou `CHAR_THER_PARO_F`,
- nombre de points d'intégration utilisés : cf [Tableau 2.2.3-1].

3 Bibliographie

1) N.RICHARD : Développement de l'anisotropie thermique dans le logiciel *Aster*. Note EDF/DER HM-18/94/0011 du 05/07/1994.

4 Description des versions du document

Version	Auteur(s)	Description des modifications

Aster	Organisme(s)	
3	*J.P. LEFEBVRE, X. DESROCHES (EDF/IMA/MMN)*	Texte initial