

## HPLV103 - Calcul de $K_I$ et de $G$ thermo-élastique 3D pour une fissure circulaire

---

### Résumé

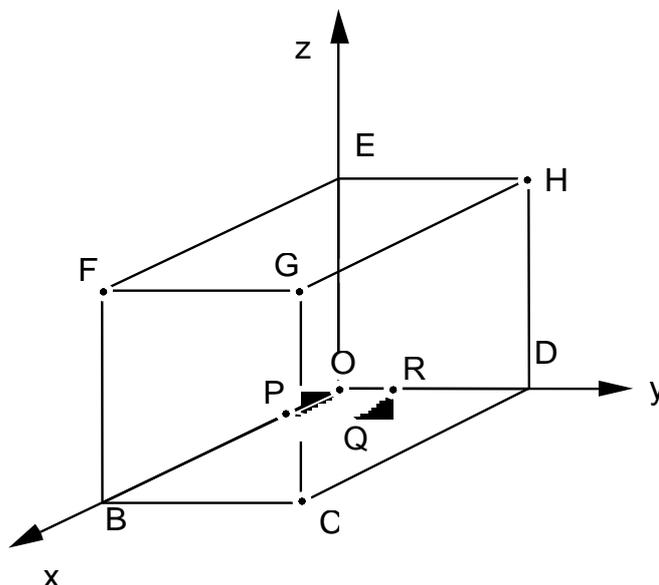
Il s'agit d'un test de mécanique de la rupture en thermo-mécanique pour un problème tridimensionnel. On considère une fissure circulaire plongée dans un milieu thermo-élastique. On impose une température uniforme sur les lèvres de la fissure. Ce test permet de calculer le taux de restitution d'énergie global  $G$  et le facteur d'intensité des contraintes local  $K_I$  en différents points du fond de fissure.

L'intérêt du test est l'invariance de  $G$  et de  $K_I$  selon différentes couronnes et la comparaison à une solution analytique.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

On considère une fissure circulaire plongée dans un milieu thermo-élastique. Compte tenu des symétries du problème, seul un huitième de la structure est représenté :



Les dimensions de la fissure sont les suivantes :

$$OP = OR = 1.0$$

Le milieu est modélisé par un parallélépipède de dimensions :

$$OB = OD = OC = 30.0$$

### 1.2 Propriétés de matériaux

Conductivité thermique :  $\lambda = 1.$   
Coefficient de dilatation thermique :  $\alpha = 10^{-6} / ^\circ C$

Module d'Young :  $E = 2.10^5 \text{ MPa}$   
Coefficient de Poisson :  $\nu = 0.3$

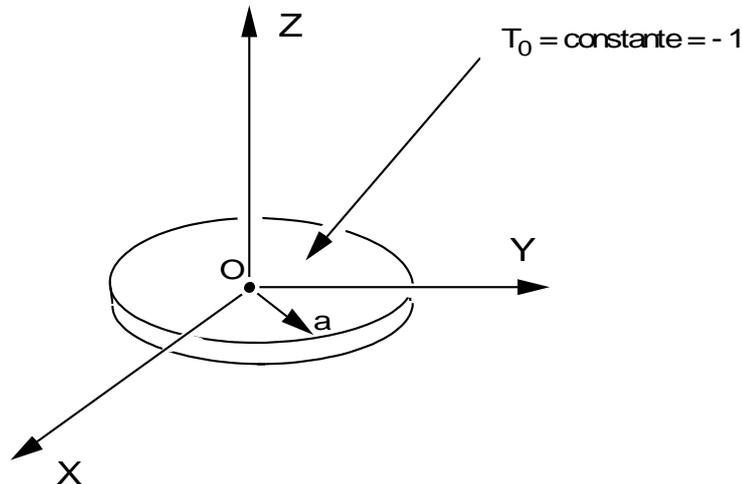
### 1.3 Conditions aux limites et chargements

- Mécanique : déplacements imposés (DDL\_IMPO) sur les groupes de mailles suivants :
  - $DX = 0$  sur  $ODHE$  ;
  - $DY = 0$  sur  $OEFB$  ;
  - $DZ = 0$  sur  $PBCDRQ$  (i.e. face inférieure du parallélépipède, sans la lèvre de la fissure).
- Thermique : température imposée (TEMP\_IMPO) sur les groupes de mailles suivants :
  - $TEMP = 0$  sur  $BCGH$ ,  $CDHG$  et  $EFGH$  (faces extérieures du parallélépipède) ;
  - $TEMP = -1$  sur  $OPQR$ .

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est issue du recueil de MURAKAMI [bib1] :



L'expression du taux de restitution de l'énergie est la suivante :

$$G = \frac{(1-\nu^2)}{E} K_1^2 \text{ avec } K_1 = \frac{\alpha E}{\pi(1-\nu)} |T_0| \sqrt{\pi a} F(\eta), \text{ avec } \eta = a/b \text{ et,}$$

$$F(\eta) = 1 - 0.6366\eta - 0.4053\eta^2 + 2.0163\eta^3 - 0.6773\eta^4 - 3.8523\eta^5 + 4.1687\eta^6 + 3.2741\eta^7.$$

**Remarque :**

Pour  $\eta=0$  (milieu infini), la solution est exacte. Pour un milieu fini, l'incertitude sur la solution est inconnue. Dans ce test,  $\eta=1/30$ .

### 2.2 Résultat de référence

Le résultat de référence est donc :  $K_I = 157.73 \cdot 10^3 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{1/2}$  et  $G = 1.132 \cdot 10^{-1} \text{ J/m}^2$

### 2.3 Références bibliographiques

- 1) Stress intensity factors Handbook (Y. MURAKAMI), case 11.39, pp. 1089-1090, the Society of Material Science, Japon, Pergamon Press, 1987.

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'une modélisation tridimensionnelle. Le maillage a été réalisé à l'aide de la procédure GIBI de bloc fissuré 3D [bib1]. On n'a représenté que le huitième de la structure (et donc un quart du front de la fissure), le quart de ce front étant discrétisé en 16 secteurs.

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est composé d'éléments quadratiques

Nombre de mailles et types : 624 PENTA15, 5600 HEXA20

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

Les valeurs testées sont celles du taux de restitution de l'énergie  $G$  global et du taux de restitution de l'énergie local aux points  $A$  et  $B$  à partir des différentes couronnes d'intégration et des deux méthodes de définition des champs  $\theta$  :

| Identification  | Référence              | Aster                | % différence |
|---|------------------------|----------------------|--------------|
| <b><math>G</math> global</b>                              |                        |                      |              |
| Couronne 1 $G$  | $8.8910 \cdot 10^{-8}$ | $8.66 \cdot 10^{-8}$ | 2.53         |
| Couronne 2 $G$  | $8.8910 \cdot 10^{-8}$ | $8.68 \cdot 10^{-8}$ | 2.31         |
| Couronne 3 $G$  | $8.8910 \cdot 10^{-8}$ | $8.69 \cdot 10^{-8}$ | 2.17         |
| Couronne 4 $G$  | $8.8910 \cdot 10^{-8}$ | $8.68 \cdot 10^{-8}$ | 2.31         |
| <b><math>G</math> local Lagrange – Legendre (degré 7)</b> |                        |                      |              |
| $G$ local 1 en $A$  | $5.66 \cdot 10^{-8}$   | $6.13 \cdot 10^{-8}$ | 8.31         |
| $G$ local 2 en $A$  | $5.66 \cdot 10^{-8}$   | $6.19 \cdot 10^{-8}$ | 9.37         |
| $G$ local 3 en $A$  | $5.66 \cdot 10^{-8}$   | $6.42 \cdot 10^{-8}$ | 13.46        |
| <b><math>G</math> local Lagrange – Legendre (degré 7)</b> |                        |                      |              |
| $G$ local 1 en $B$  | $5.66 \cdot 10^{-8}$   | $5.50 \cdot 10^{-8}$ | 2.75         |
| $G$ local 2 en $B$  | $5.66 \cdot 10^{-8}$   | $5.51 \cdot 10^{-8}$ | 2.62         |
| $G$ local 3 en $B$  | $5.66 \cdot 10^{-8}$   | $5.50 \cdot 10^{-8}$ | 2.84         |
| <b><math>G</math> local Legendre – Legendre (degré 7)</b> |                        |                      |              |
| $G$ local 1 en $A$  | $5.66 \cdot 10^{-8}$   | $5.54 \cdot 10^{-8}$ | 2.07         |
| $G$ local 2 en $A$  | $5.66 \cdot 10^{-8}$   | $5.58 \cdot 10^{-8}$ | 1.39         |
| $G$ local 3 en $A$  | $5.66 \cdot 10^{-8}$   | $5.71 \cdot 10^{-8}$ | 1.01         |
| <b><math>G</math> local Legendre – Legendre (degré 7)</b> |                        |                      |              |
| $G$ local 1 en $B$  | $5.66 \cdot 10^{-8}$   | $5.51 \cdot 10^{-8}$ | 2.62         |
| $G$ local 2 en $B$  | $5.66 \cdot 10^{-8}$   | $5.52 \cdot 10^{-8}$ | 2.46         |
| $G$ local 3 en $B$  | $5.66 \cdot 10^{-8}$   | $5.52 \cdot 10^{-8}$ | 2.52         |

Couronne 1 :  $R_{inf} = 0.07$   $R_{sup} = 0.2$   
 Couronne 2 :  $R_{inf} = 0.2$   $R_{sup} = 0.4$   
 Couronne 3 :  $R_{inf} = 0.4$   $R_{sup} = 0.6$   
 Couronne 4 :  $R_{inf} = 0.07$   $R_{sup} = 0.6$

Les supports du champ  $\theta$  local correspondent aux trois premières couronnes du champ global.

## 3.4 Remarques

- La valeur de référence est la valeur du taux de restitution de l'énergie local :  $G_{réf} = 5.66 \cdot 10^{-8} J/m^2$ . Le taux de restitution de l'énergie global fourni par Code\_Aster est :

$G_{Aster} = G_{réf} \times \frac{2\Pi a}{8}$ , puisque par raison de symétrie on ne modélise qu'un quart du plan de la fissure et une seule lèvres.

- Les résultats du  $G$  local ne sont donnés que pour les points  $A$  et  $B$  respectivement situés sur un plan de symétrie et au milieu du front de fissure. Les résultats concernant le point  $B$  (milieu du front) font apparaître un écart d'environ 3% par rapport au résultat de référence. Les résultats concernant le point  $A$  sont moins bons (l'écart se situe entre 3% et 13.5%), ce qui est un constat habituel pour l'estimation du  $G$  local pour les points situés sur un plan de symétrie.

## 4 Synthèse des résultats

---

- Le passage d'un maillage quadratique à un maillage linéaire pour le calcul mécanique diminue la précision du résultat : les  $G$  globaux ont un écart de 4.8% en moyenne avec la référence pour le maillage linéaire contre 2.2% pour le maillage quadratique.
- Le lissage LEGENDRE-LEGENDRE conduit, sur ce cas test, aux résultats les plus précis pour les valeurs locales de  $G$ . Pour le calcul des  $K$  locaux, on conseille le lissage LAGRANGE-LAGRANGE.
- La précision sur le calcul de  $K_I$  local est satisfaisante, l'écart moyen étant limité à 2.3% .